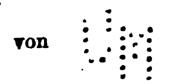


# Lehrbuch

der

# elementaren Mathematik

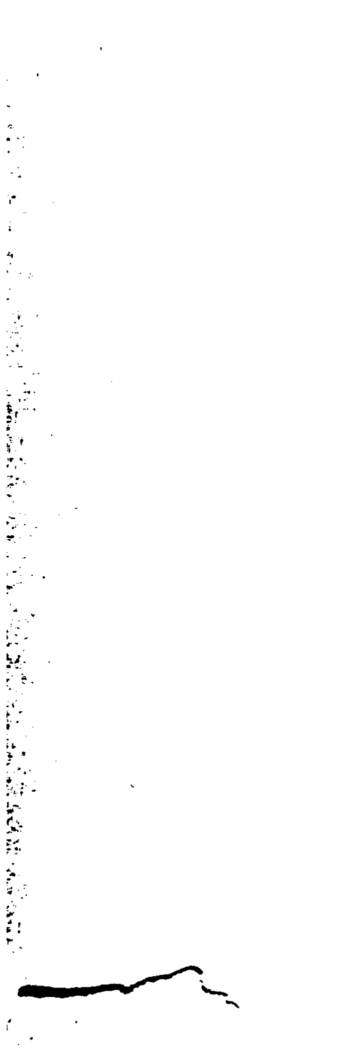
von 

**Victor Schlegel,**
Oberlehrer am Gymnasium in Waren.

## Erster Theil.

## Arithmetik und Combinatorik.

**Wolfenbüttel.**
Druck und Verlag von Julius Zwissler.
1878.



# Vorrede.

Als ich, zunächst in Folge äusserer Veranlassung, den Entschluss fasste, eine neue Bearbeitung der Elementar-Mathematik zu unternehmen, da war es mir nicht zweifelhaft, dass nur eine mit den alten Traditionen brechende und den modernen strengeren Anforderungen an die Wissenschaftlichkeit gerecht werdende Darstellung ein solches Unternehmen rechtfertigen könne. Ich konnte mich aber um so eher zur Ausführung einer derartigen Arbeit entschliessen, weil theils theoretische Studien, theils eine längere Schulpraxis mich allmälig auf einen Standpunkt geführt hatten, der von demjenigen der meisten übrigen Autoren im Gebiet der Elementar-Mathematik wesentlich abweicht.

Ich will im Folgenden zunächst die in der Neuzeit vorherrschende besondere Richtung der Literatur auf dem Gebiete der Elemente zu charakterisiren und die Ursachen dieser Richtung anzugeben versuchen, sodann meinen eigenen abweichenden Standpunkt darlegen und zuletzt einige Bemerkungen über den vorliegenden ersten Theil meiner Arbeit hinzufügen.

Es zeigen bis auf wenige neue Erscheinungen fast alle im Laufe der letzten Jahrzehnte erschienenen Werke über die Elemente, soweit mir bekannt geworden, das Bestreben, in möglichster Kürze und Uebersichtlichkeit das Nothwendigste des Stoffes zu geben, sich gegenseitig in kleinen pädagogischen Vortheilen zu überbieten und gelegentlich neue Lösungsversuche für von früher her bestehende Schwierigkeiten zu geben. Neben dieser alle Zweige der Elemente gleichmässig treffenden Behandlungsweise hat die Darstellung einzelner derselben noch besondere Richtungen angenommen.

Je mehr man die Arithmetik und Algebra als ein Universal-Instrument zur Behandlung der verschiedensten Aufgaben schätzen lernte, je mehr namentlich die rechnende Geometrie in den höheren Schulen festen Fuss fasste, desto mehr legte man Gewicht auf Erreichung der Fähigkeit, jenes Instrument in möglichst virtuoser Art zu handhaben, desto mehr aber trat auch das Bestreben zurück, die Regeln der Arithmetik systematisch aufzubauen. Begnügen sich doch manche Leitfäden der Arithmetik heut schon mit einfacher Aufzählung der Regeln, und prätendiren doch manche neueren Uebungsbücher schon, ein Lehrbuch der Arithmetik zu ersetzen. So sehr ist in manchen Kreisen der Sinn geschwunden für die Nothwendigkeit, die Arithmetik ebenso wissenschaft-lich zu begründen und zu behandeln, wie man es von der Geometrie verlr

Die Geometrie sehen wir gegenwärtig in voller Krisis begriffen. Hier hat der mächtige Druck, den die Geometrie der Hochschule auf den elementaren Unterricht ausübte, zuerst das Bewusstsein hervorgerufen, dass man denn doch den Fortschritten der modernen Wissenschaft, soweit ihre Resultate sich elementar darstellen lassen, Rechnung tragen müsse. Damit war das Signal zu einer dem Abkürzungsverfahren entgegengesetzten Strömung gegeben, die sich darin äusserte, dass manchen neueren Lehrbüchern eine mehr oder minder grosse Menge Stoffes aus der modernen Geometrie anhangsweise einverleibt wurde, wodurch diese Bücher in demselben Masse anschwollen, in welchem die arithmetischen zusammenschrumpften. Im weiteren Verlaufe der Entwickelung hat man nun eingesehen, dass mit einer solchen äusserlichen Hinzufügung wenig gewonnen sei, dass es vielmehr nöthig sei, die euclidische Geometrie im Sinne der modernen Wissenschaft zu reformiren. Das erste und natürlichste Beginnen war, den Stoff der euclidischen Geometrie vom modernen Standpunkte aus ganz selbständig darzustellen. Einzelne derartige Versuche sind neuerdings gemacht worden; dieselben erheben aber natürlich nicht den Anspruch, sofort als Grundlage des Schul-Unterrichtes zu gelten; dazu würde nicht eine Reform, sondern eine totale Revolution des mathematischen Unterrichtes erforderlich sein. Der eigentlich praktischen Aufgabe aber, eine vom modernen Geiste getragene, äusserlich dem euclidischen Gange folgende, innerlich an Stelle seines Princips der Congruenzbeweise ein neues setzende Darstellung der Geometrie zu geben, dieser Aufgabe hat man noch nicht näher treten können, weil über das neue Princip selbst noch durchaus keine Klarheit, geschweige Einigkeit besteht. (Ausführlicher werde ich auf diesen Gegenstand in der speciellen Vorrede zum geometrischen Theile dieses Werkes zurückkommen.)

Weniger als die beiden bisher genannten Gebiete sind vorderhand Trigonometrie und Stereometrie von neuen Strömungen berührt worden, obwohl es auch hier später an Reformen nicht fehlen wird.

Die Ursache des oben charakterisirten Strebens nach Herstellung möglichst compendiöser Bücher liegt, wie ich meine, zunächst in der Ueberfüllung der mittleren Klassen unserer höheren Schulen, vornehmlich grösserer Städte; ferner in der durch Theilung dieser Klassen nothwendig gewordenen Einrichtung halbjähriger Pensa, und in der aus beiden Umständen erwachsenden Nothwendigkeit, auf Einübung der Hauptsachen sich zu beschränken, wobei überdies durch den Mangel an Zeit einer verstandesmässigen, den Gegenstand vielseitig beleuchtenden Einprägung das grösste Hinderniss in den Weg gelegt wird. Das Ideal des mathematischen Unterrichtes, nämlich mathematische Durchbildung des Schülers, muss unter solchen Umständen im Allgemeinen von vornherein aufgegeben werden, wenn das Lehrbuch den Schüler ebenso stiefmütterlich behandelt, wie es aus Mangel an Zeit der mündliche Unterricht thun muss. Erreicht wird jenes Ideal dann nur von einzelnen, besonders befähigten, durch rasche Auffassung ausgezeichneten Köpfen; erreicht wird im günstigen Falle im Allge-

meinen Sicherheit der Kenntnisse und Geläufigkeit im Anwenden derselben zur Lösung von Aufgaben — immerhin ganz schätzbare Resultate, die aber gerade den Werth der Mathematik als eines allgemeinen Bildungsmittels noch nicht genügend hervortreten lassen. Denn wenn in neuerer Zeit die elementare Mathematik mit mehr Respect behandelt wird, als früher, so liegt der Grund wahrlich weit weniger in der allgemeiner gewordenen Erkenntniss jenes Bildungswerthes, als in dem Ansehen, welches sich die Mathematik überhaupt durch ihre Anwendungen auf andere Wissenschaften erworben hat.

Im Allgemeinen ist es also, wie ich glaube, ein pädagogischer Nothstand gewesen, der auf den Charakter der Lehrbücher in abgekürzter Form hingewirkt hat. Von diesen „Leitfäden" durch das vermeintliche Labyrinth der Mathematik fanden sich nun freilich oft nur die Autoren, die ihren individuellen pädagogischen Bedürfnissen darin gerecht geworden waren, befriedigt; weitere Verbreitung erlangten nur wenige derartige Bücher. Man hat neuerdings, die Noth in eine Tugend verkehrend, sogar die Theorie aufgestellt, als sei der kürzeste Leitfaden in der Hand des Schülers der beste, und die Befürchtung durchblicken lassen, ein ausführliches Lehrbuch lasse dem Lehrer zu wenig zu thun übrig. Ich kann diese Ansicht nicht theilen. Der denkende Lehrer wird gerade aus einem ausführlichen Lehrbuche für sich selbst wie für den zur Selbstthätigkeit angeregten Schüler den grössten Nutzen schöpfen; er wird die Auswahl des Stoffes freier gestalten und dem jedesmaligen Standpunkte der Generation anpassen können; er wird, wenn auch das Lehrbuch alles enthalten sollte, was dem Schüler an Kenntnissen beizubringen ist, in der Anleitung zum mathematischen Denken und Arbeiten eine mehr als ausreichende Beschäftigung finden, und zugleich genügenden Spielraum für die Entfaltung seiner Individualität. Und gerade da, wo unzweckmässige Schuleinrichtungen eine genügende Durcharbeitung des Lehrstoffes in der Schule erschweren, wird es von besonderem Werthe sein, den strebsamen Schüler auf sein Lehrbuch verweisen zu können, damit er nicht nöthig habe, sich auf die karge Kost zu beschränken, welche für die grosse Masse der Mittelmässigen genügt. Auch die Besorgniss, der Schüler werde sich in einem ausführlichen Werke nicht zurecht finden, kann ich nicht als begründet erkennen; findet er sich doch in den regelmässigen Gängen und den labyrinthischen Seitenpfaden der Grammatik zurecht. Nicht die Ausführlichkeit hindert das Sichzurechtfinden, sondern der Mangel einer Anordnung des Stoffes nach logischen Principien.

Dies sind im Allgemeinen die Gründe, aus denen ich mich gegen die l tfaden-Literatur auf dem Gebiete der Mathematik aussprechen muss, und d Ansicht bin, man müsse, wenn auch äussere Umstände zu allerlei Beschrän- h igen des Lehrstoffes nöthigen, doch dem Schüler wie dem Lehrer Gelegenheit g en, mit Hilfe des Lehrbuches die Elemente von einer wissenschaftlicheren S e kennen zu lernen, resp. kennen zu lehren, als es mit Hilfe der Leitfäden t selbst mündlicher Ergänzungen möglich ist. — Hat man in den letzten

Jahrzehnten über der Ausbildung der Elemente nach der pädagogischen Seite hin jene wissenschaftliche Seite vernachlässigt, so ist es wohl Zeit — und es fehlt nicht an Zeichen, dass das Bedürfniss hiernach sich wirklich geltend macht — nun auch der letzteren ihr Recht werden zu lassen.

Indem ich nun meine eigene Arbeit den hier entwickelten Principien gemäss zu gestalten suche, indem ich namentlich danach strebe, eine allgemeinere Auffassung darin hervortreten zu lassen, die sich nicht ängstlich an Pensa anklammert, sondern diese zufälligen Eintheilungen dem Lehrer überlässt, hoffe ich, dass dieselbe dazu beitragen möge, das darin vertretene Princip der freien wissenschaftlichen Entfaltung auf dem Gebiete der Elemente wieder mehr zur Geltung zu bringen. Ich hoffe, dass das Buch dem jüngeren Schüler unter Anleitung und verständiger Auswahl des Stoffes seitens des Lehrers ebenso ein nützlicher Begleiter sein soll, wie es dem geistig Gereiften auch ohne weitere Beihilfe einen Einblick in den regelmässigen Bau des mathematischen Systems und einen zu weiterem Studium anregenden Ausblick in die nicht elementaren Gebiete der Mathematik gewähren soll.

Soviel über die allgemeine Anlage des Werkes. Was den hier vorliegenden ersten Theil betrifft, so schliesst sich die Arithmetik an eine Ausarbeitung an, die ich bereits vor neun Jahren vollendete, und an der ich bei Verfolgung der wichtigsten seither erschienenen Literatur wenig oder nichts zu ändern fand. Inzwischen haben namentlich die bahnbrechenden Arbeiten von Hankel (Theorie der complexen Zahlensysteme) und Schröder (Lehrbuch der Arithmetik und Algebra) sich mit Erfolg bemüht, das Wesen der Grundoperationen tiefer erfassen zu lehren, als es vordem geschah. Auch J. G. Grassmann's scharfsinnige Abhandlung „Ueber den Begriff und Umfang der reinen Zahlenlehre“ wäre hier in erster Linie zu nennen, wenn sie nur überhaupt bekannter geworden wäre. Von Arbeiten, die mir bei der Darstellung einzelner Gegenstände von Nutzen gewesen sind, habe ich zu nennen: H. Grassmann's Lehrbuch der Arithmetik (in der Reihentheorie) und verschiedene Arbeiten von S. Günther (zur Theorie der Kettenbrüche), während ich in der Darstellung der Probleme der Wahrscheinlichkeitsrechnung mich den Vorlesungen Kummer's anschloss.

Als Anwendung der Arithmetik habe ich eine vollständige Theorie der Decimalrechnung hinzugefügt. Ich halte es für wichtig, dass der Schüler, und sei es auch erst in den oberen Klassen, einen deutlichen Einblick in das Verhältniss des gemeinen Rechnens zur Buchstabenrechnung gewinne, bin aber auch der Ansicht, dass alles, was eben nur das Erlernen dieses Rechnens betrifft, dem Rechenpensum der unteren Klassen bis incl. Quarta zuzuweisen ist. Ich halte die sogenannten bürgerlichen Rechnungsarten, mit Ausnahme der Zinsrechnung, für einen Ballast, den man aus dem Unterrichte der Quarta entfernen sollte. Legt man Werth auf die Umsetzung von Wortaufgaben in Gleichungen, so bietet später die Lehre von den Gleichungen selbst genug Gelegenheit, diese Uebung in weit fruchtbarerer, weil mannigfaltigerer Weise anzustellen. Die

dadurch frei werdende Zeit in Quarta sollte man aber durch zwei Gegenstände des eigentlichen Decimalrechnens: Quadratwurzelausziehung und Uebung im Gebrauche der vierstelligen Logarithmentafel ausfüllen. Diese Arbeit ist für den Schüler viel leichter, interessanter, und namentlich nützlicher, als die Beschäftigung mit den meist recht wenig der Wirklichkeit entsprechenden Aufgaben der bürgerlichen Rechnungsarten, die überdies später durch Gleichungen viel besser gelöst werden. Man erspart dann auch die durch die Logarithmen ganz überflüssig gewordenen und zum Theil viel zu schwierigen abgekürzten Rechnungen mit Decimalbrüchen. — Die directe Methode der Cubikwurzelausziehung verwerfe ich wegen ihrer Complicirtheit. Man könnte höchstens einwenden, dass Quadrat- und Cubikwurzeln in praktischen Aufgaben vorkommen, was bei höheren Wurzeln nicht der Fall ist. Ich denke aber, dass die in neuerer Zeit hergestellten vierstelligen Logarithmentafeln bald genug Gemeingut des Volkes werden können, sobald man durch Herstellung wirklicher Tafelform, sowie durch ihre Aufnahme in Kalender, Taschenbücher und Lehrbücher der Mathematik ihre Verbreitung fördert. Für die gewöhnlichen Fälle der Praxis werden sie alle wünschenswerthe Genauigkeit geben, und namentlich auch für die directe Methode der Cubikwurzelausziehung genügenden Ersatz gewähren.

Begriff und Anwendung der Determinanten habe ich in dem Umfange aufgenommen, als es die Verwendbarkeit dieses Instrumentes in der elementaren Mathematik erfordert. Dagegen halte ich die Uebungen im Umformen der Determinanten, sowie die Entwickelung ihrer weiteren Eigenschaften für einen dem Schul-Unterrichte ferner liegenden Gegenstand; einmal, weil die Determinante in ihrer gegenwärtig üblichen Gestalt das Ideal einer abgekürzten Schreibweise nur unvollkommen erreicht, sodann, weil der Nutzen derselben doch besonders in Gebieten der Mathematik hervortritt, die man gegenwärtig noch nicht zu den elementaren rechnet. — Bei der unter Nr. 118 mitgetheilten gemeinsamen Methode zur Lösung der Gleichungen vom 2., 3. und 4. Grade wird man leicht den Zusammenhang mit der Theorie der binären Formen und deren geometrischer Darstellung in der projectivischen Geometrie erkennen. — Das für den Logarithmus gewählte Zeichen empfehle ich mit Rücksicht auf seine Einfachheit, und auf den Umstand, dass es sich besonders leicht an die bisher übliche Bezeichnung „log" anschliesst. — Die am Schluss gegebene Uebersicht der Formeln und Regeln ist zur Erleichterung der Repetition bestimmt. Ueber andere Eigenthümlichkeiten der Darstellung, die dem aufmerksamen Blicke des Kenners nicht entgehen werden, habe ich hier nichts weiter hinzuzufügen.

Ich empfehle schliesslich mein Unternehmen und zunächst den vorliegenden Theil der Aufmerksamkeit des mathematischen Publikums und bitte um Mittheilung von Wünschen behufs etwaiger Aenderungen.

Waren im Februar 1878.

V. Schlegel.

# Inhalt des ersten Theils.

Seite

**Einleitung in die Mathematik** . . 1

## Reine Arithmetik.

**Einleitung (1—3).**

1. Entstehung, Begriff und Bezeichnung der Zahlen (1) 6
2. Vergleichung der Zahlen (2. 3) . . . . . 6

**Erste Abtheilung: Die einfachen Zahlen (4—71).**

**A. Die absoluten Zahlen (4—55).**

1. Die Addition (5—9) . . . . . . . . . . 8

5. Vorbemerkung. — 6. Erklärungen. — 7. Eigenschaften der Addition. — 8. Weitere Bemerkungen zur Addition. — 9. Rechnung mit Resultaten.

2. Die Subtraction (10—16) . . . . . . . . . 11

10. Vorbemerkung. — 11. Erklärungen. — 12. Eigenschaft der Subtraction. — 13. Weitere Bemerkungen zur Subtraction. — 14. Zusammenhang mit der Addition. — 15. Rechnung mit Resultaten. — 16. Erweiterungen.

3. Die Multiplication (17—22) . . . . . . . . 15

17. Vorbemerkung. — 18. Erklärungen. — 19. Eigenschaften der Multiplication. — 20. Weitere Bemerkungen zur Multiplication. — 21. Rechnung mit Resultaten 1. Stufe. — 22. Rechnung mit Resultaten 2. Stufe.

4. Die Division (23—30) . . . . . . . . . . 19

23. Vorbemerkung. — 24. Erklärungen. — 25. Eigenschaft der Division. — 26. Weitere Bemerkungen zur Division. — 27. Zusammenhang mit der Multiplication. — 28. Rechnung mit Resultaten 1. Stufe. — 29. Rechnung mit Resultaten 2. Stufe. — 30. Erweiterungen.

5. Die Potenzirung (31—37) . . . . . . . . 26

31. Vorbemerkung. — 32. Erklärungen. — 33. Eigenschaft der Potenzirung. — 34. Weitere Bemerkungen zur Potenzirung. — 35. Rechnung mit Resultaten 1. Stufe. — 36. Rechnung mit Resultaten 2. Stufe. — 37. Rechnung mit Resultaten 3. Stufe.

Seite

6. Die Radicirung (38—46) . . . . . . . . . . 30

38. Vorbemerkung. — 39. Erklärungen. — 40. Eigenschaft der Radicirung. — 41. Weitere Bemerkungen zur Radicirung. — 42. Zusammenhang mit der Potenzirung. — 43. Rechnung mit Resultaten 1. Stufe. — 44. Rechnung mit Resultaten 2. Stufe. — 45. Rechnung mit Resultaten 3. Stufe. — 46. Erweiterungen.

7. Die Logarithmirung (47—55) . . . . . . . 37

47. Vorbemerkung. — 48. Erklärungen. — 49. Eigenschaft der Logarithmirung. — 50. Weitere Bemerkungen zur Logarithmirung. — 51. Zusammenhang mit der Potenzirung. — 52. Rechnung mit Resultaten 1. Stufe. — 53. Rechnung mit Resultaten 2. Stufe. — 54. Rechnung mit Resultaten 3. Stufe. — 55. Rückblick.

**B. Die relativen Zahlen (56—71).**

1. Die Null (57—59) . . . . . . . . . . . 42

57. Vorbemerkungen. — 58. Erklärung. — 59. Rechnungen mit der Null.

2. Die negativen Zahlen (60—62) . . . . . . . 44

60. Vorbemerkungen. — 61. Erklärungen. — 62. Rechnungen mit den negativen Zahlen.

3. Die Eins (63—65) . . . . . . . . . . . 47

63. Vorbemerkungen. — 64. Erklärung. — 65. Rechnungen mit der Eins.

4. Die umgekehrten Zahlen (66—68) . . . . . . 49

66. Vorbemerkungen. — 67. Erklärungen. — 68. Rechnungen mit den umgekehrten Zahlen.

5. Die irrationalen Zahlen (69—71) . . . . . . 51

69. Allgemeines. — 70. Vorbemerkung. — 71. Erklärungen.

**Zweite Abtheilung: Die zusammengesetzten Zahlen (72—153).**

**A. Die Polynome (72—76)** . . . . . . 52

72. Uebersicht. — 73. Reduction eines zusammengesetzten Ausdrucks auf eine allgemeine Form. — 74. Erklärungen. — 75. Vereinfachungen der allgemeinen Form des Polynoms. — 76. Rechnungen mit Polynomen.

**B. Die Proportionen (77—88)** . . . . . . 58

77. Vorbemerkung. — 78. Erklärungen.

1. Die arithmetische Proportion (79—83) . . . 58

79. Allgemeine Form. — 80. Eigenschaften der arithm. Proportion. — 81. Besondere Eigenschaften der Differenz-Proportion. — 82. Stetige Proportion. — 83. Erweiterung.

2. Die geometrische Proportion (84—88) . . . 60

84. Allgemeine Form. — 85. Eigenschaften der geom. Proportion. — 86. Besondere Eigenschaften der Quotienten-Proportion. — 87. Stetige Proportion. — 88. Erweiterung.

Seite

C. Die Gleichungen (89—119) . . . . . 63

89. Vorbemerkung. — 90. Erklärungen. — 91. Eintheilung der Gleichungen.

I. Algebraische Gleichungen (92—118) . . 64

92. Reduction einer algebraischen Gleichung auf die Normalform. — 93. Eintheilung der algebraischen Gleichungen. — 94. Auflösung der algebraischen Gleichungen. (Vorbemerkungen.)

1. Die Gleichung vom 1. Grade (95—97) . . . 66

95. Auflösung. — 96. Erweiterung. Gleichungen mit mehreren Unbekannten. — 97. Eliminationsmethoden. 1) Die Substitutionsmethode. 2) Die Comparationsmethode. 3) Die Additionsmethode. 4) Die Determinantenmethode.

2. Die Gleichung vom 2. Grade (98—107) . . . 73

98. Die reine Gleichung. Auflösung. — 99. Die gemischte Gleichung. Auflösung. — 100. Zusammenhang zwischen den Wurzeln und den Coefficienten der Gleichung. — 101. Erweiterung des Zahlbegriffes durch die Gleichungen 2. Grades. — 102. Die imaginäre Einheit. Erklärung. — 103. Eigenschaften der imaginären Einheit. — 104. Die imaginären und complexen Zahlen. Erklärungen. — 105. Beziehungen zwischen zwei conjugirten Zahlen. — 106. Rechnungen mit zwei complexen Zahlen. — 107. Erweiterung. Gleichungen mit mehreren Unbekannten.

3. Die Gleichung vom 3. Grade (108—112) . . 82

108. Die reine Gleichung. Auflösung. — 109. Die gemischte Gleichung. Herstellung der reducirten Form. — 110. Auflösung. — 111. Untersuchung der Wurzeln. — 112. Zusammenhang zwischen den Wurzeln und den Coefficienten der Gleichung.

4. Die Gleichung vom 4. Grade (113—118) . . 87

113. Die reine Gleichung. Auflösung. — 114. Die gemischte Gleichung. Herstellung der reducirten Form. — 115. Auflösung. — 116. Untersuchung der Wurzeln. — 117. Zusammenhang zwischen den Wurzeln und den Coefficienten der Gleichung. — 118. Gemeinsame Methode zur Lösung der Gleichungen 2., 3. und 4. Grades.

II. Exponentialgleichungen (119) . . . 95

119. Auflösung.

D. Die Reihen (120—148) . . . . . . 95

120. Vorbemerkung.

I. Die arithmetische Reihe (121—139) . . 97

1. Reihen erster Ordnung (121—134) . . . . 97

121. Reihen erster Stufe. Erklärungen. — 122. Eigenschaften der arithmetischen Reihe. — 123. Specielle Fälle. — 124. Die unendliche arithmetische Reihe. — 125. Reihen zweiter Stufe. Vorbemerkung. — 126. Erklärungen. — 127. Andere Formen der Factorielle. — 128. Factoriellen-Gebiet einer Zahl. — 129. Beziehung zwischen zwei Factoriellen mit der Exponentensumme $a$. — 130. Beziehung zwischen zwei benachbarten Factoriellen. — 131. Beziehung zwischen den Factoriellen zweier

Seite

benachbarter Zahlen. — 132. Factorielle einer Summe. — 133. Factorielle einer negativen Zahl. — 134. Factorielle einer umgekehrten Zahl.

2. Reihen höherer Ordnung (135—139) . . . . 103

135. Summenreihen. — 136. Differenzreihen. — 137. Reihen $n^{\text{ter}}$ Ordnung. — 138. Bestimmung des allgemeinen Gliedes der Reihe $n^{\text{ter}}$ Ordnung. — 139. Bestimmung der Summe der Reihe $n^{\text{ter}}$ Ordnung.

II. Die geometrische Reihe (140—143) . . 107

140. Erklärungen. — 141. Eigenschaften der geometrischen Reihe. — 142. Specielle Fälle. — 143. Die unendliche geometrische Reihe.

**E. Die Kettenbrüche (144—153)** . . . . . 111

I. Endliche Kettenbrüche (144—150) . . 111

144. Vorbemerkung. — 145. Erklärungen. — 146. Verwandlung eines Quotienten in einen Kettenbruch. — 147. Verwandlung eines Kettenbruchs in einen Quotienten. — 148. Näherungsbrüche eines Kettenbruches. — 149. Eigenschaften der Näherungswerthe. — 150. Diophantische Gleichungen.

II. Unendliche Kettenbrüche (151—153) . . 120

151. Vorbemerkung. — 152. Darstellungen der Wurzel einer quadratischen Gleichung als Kettenbruch. — 153. Verwandlung eines periodischen Kettenbruchs in einen irrationalen Ausdruck.

---

## Angewandte Arithmetik.

**I. Die Decimalrechnung (154—169).**

1. Ganze Decimalzahlen (154—157) . . . . . 123

154. Vorbemerkung. — 155. Erklärungen. — 156. Rechnungen mit Decimalzahlen. — 157. Anwendungen der Kettenbrüche auf Decimalzahlen und Gleichungen.

2. Decimalbrüche (158—163) . . . . . . . . 126

158. Vorbemerkung. — 159. Erklärungen. — 160. Rechnungen mit Decimalbrüchen. — 161. Verwandlung eines Quotienten und einer Quadratwurzel in einen Decimalbruch. — 162. Eintheilung der Decimalbrüche. — 163. Verwandlung eines Decimalbruchs in einen Quotienten.

3. Näherungswerthe (164—169) . . . . . . . 132

164. Vorbemerkung. — 165. Näherungswerthe durch Kettenbrüche. Näherungsweise Bestimmung der Wurzel einer Gleichung. — 166. Näherungsweise Bestimmung eines Logarithmus. — 167. Näherungsw[illegible]the durch Logarithmen. — 168. Logarithmische Systeme. — 1[illegible] Eigenschaften des gemeinen logarithmischen Systems.

**II. Die Zinsrechnung (170—176).**

1. Einfache Zinsrechnung (170—172) . . . . . 139

170. Vorbemerkung. — 171. Erklärungen. — 172. Weitere Formeln.

2. Zinseszins-Rechnung (173—176) . . . . . 140

173. Vorbemerkung. — 174. Bestimmung der Summe, zu der ein a[illegible]inseszins stehendes Capital anwächst. — 175. Erweiterung. — 176. S[illegible]ielle Fälle.

---

Seite

## Reine Combinatorik.

**Einleitung (177)** . . . . . . . . . . . . . . . 143

1. Das Permutiren (178—180) . . . . . . . . 144

178. Erklärungen. — 179. Bildung der Permutationen. — 180. Bestimmung der Anzahl der Permutationen.

2. Das Combiniren (181—183) . . . . . . . . 146

181. Erklärungen. — 182. Bildung der Combinationen. — 183. Bestimmung der Anzahl der Combinationen.

3. Das Variiren (184—189) . . . . . . . . . 148

184. Erklärungen. — 185. Bildung der Variationen. — 186. Bestimmung der Anzahl der Variationen.

## Angewandte Combinatorik.

**I. Die Binomialreihe (187—189)** . . . . . 150

187. Vorbemerkung. — 188. Aufstellung der Binomialreihe. — 189. Erklärung.

**II. Die Wahrscheinlichkeitsrechnung (190—198)** . . 152

Einleitung (190. 191) . . . . . . . . . . . . . 152

190. Wahrscheinlichkeit durch Beobachtung. — 191. Wahrscheinlichkeit durch Berechnung.

A. Wahrscheinlichkeit für einen Fall (192—197) . 155

a. Einfache Wahrscheinlichkeit (192—195) . . . 155

192. Erklärung. — 193. Folgerungen. — 194. Einfache Ereignisse. — 195. Zusammengesetzte Ereignisse.

b. Combinirte Wahrscheinlichkeit (196. 197) . . 161

196. Getrennte Wahrscheinlichkeit. — 197. Zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit.

B. Wahrscheinlichkeit für mehrere Fälle (198) . . 163

---

Uebersicht der Formeln und Regeln . . . . . 165

Register . . . . . . . . . . . . . . . . 179

Berichtigungen . . . . . . . . . . . . . 182

# Einleitung

## in die Mathematik.

---

1. Durch Sinneswahrnehmung erlangt unser Geist die Vorstellungen von Objecten. Die Bearbeitung dieser Vorstellungen heisst Denken. Die Arbeit des Geistes im Denken kann aber sowohl mit Rücksicht auf das Object des Denkens wie auf die Art des Denkens von zweierlei Art sein. In erster Hinsicht bezieht sie sich entweder auf mehrere unveränderliche oder auf ein veränderliches Object.

Anm. Da verschiedene Zustände eines veränderlichen Objectes als ebensoviele unveränderliche Objecte betrachtet werden können, so ist klar, wie ein und dasselbe Object beiden Betrachtungsweisen unterworfen werden kann.

In beiden Fällen ist die Arbeit des Geistes wiederum eine doppelte:

1a. Da mehrere Objecte sich in manchen ihrer Merkmale unterscheiden, so kann man sich auf die Betrachtung dieser Merkmale beschränken, und die Objecte überhaupt als ungleich ansehen.

1b. Da sie aber auch Merkmale gemeinsam haben (und wäre es auch nur das der Existenz), so kann man sich auf die Betrachtung dieser Merkmale beschränken, und die Objecte überhaupt als gleich ansehen.

2a. Da ein Object manches seiner Merkmale ändert, so kann man sich auf diese veränderlichen Merkmale beschränken und die Zustände des Objectes als ungleich ansehen.

2b. Da andere seiner Merkmale unverändert bleiben, so kann man auch auf diese sich beschränken und die Zustände des Objectes als gleich ansehen.

2. Die Mathematik ist nun diejenige Wissenschaft, in welcher an den Objecten stets nur entweder die veränderlichen resp. ungleichen, oder die unveränderlichen resp. gleichen Merkmale betrachtet werden, und zwar nicht einzeln, sondern in ihrer Gesammtheit, so zwar, dass die Objecte überhaupt nur als

| | |
|---|---|
| 1. unveränderlich | a ungleich |
| 2. veränderlich | b gleich |

erscheinen.

3. Aus den gegebenen Vorstellungen leiten wir neue ab durch Zusammenfassung, indem wir nämlich entweder die Vorstellungen mehrerer Objecte oder die Reihe von Zuständen eines Objectes als ein neues Object betrachten. Diese neuen Vorstellungen heissen Formen, und zwar

1. discrete, wenn sie aus Vorstellungen unveränderlicher,
2. stetige, wenn sie aus Vorstellungen veränderlicher,
a. combinatorische, wenn sie aus Vorstellungen ungleicher,
b. arithmetische, wenn sie aus Vorstellungen gleicher

Objecte abgeleitet sind.

Durch Zusammenstellung dieser Betrachtungsweisen ergeben sich folgende Resultate:

I. Man betrachtet die unveränderlichen Objecte als gleich. In diesem Falle nennt man sie Einheiten, die aus den Einheiten durch Zusammenfassung abgeleiteten Formen: Zahlen, und die Wissenschaft, deren Gegenstand die Zahlen sind: Arithmetik (Zahlenlehre).

Anm. Beim Zählen von Gegenständen fassen wir nur das Merkmal der Existenz ins Auge und betrachten alle Gegenstände als gleich und unveränderlich. Das Resultat der Zusammenfassung ist die Zahl, zunächst die benannte Zahl, d. h. die Verbindung von Zahl und Begriff, sodann, indem wir den gezählten Gegenständen den gemeinsamen Namen Einheiten geben, also vom Begriff absehen, die absolute Zahl. — Statt vom Begriff kann man auch von der Zahl absehen. Aus dieser Betrachtungsweise geht die Begriffslehre oder Logik hervor, die man als einen der Zahlenlehre verwandten Zweig der Mathematik betrachten und behandeln kann, indem nur die Grundgesetze für die Verbindung der Einheiten von denen für die Verbindung der Begriffe verschieden sind. (Vgl. Die Formenlehre oder Mathematik, von R. Grassmann. Stettin 1872. S. 13.)

II. Man betrachtet die unveränderlichen Objecte als ungleich. In diesem Falle nennt man sie Elemente, die aus den Elementen durch Zusammenfassung abgeleiteten Formen:

Combinationen, und die Wissenschaft, deren Gegenstand die Combinationen sind: Combinatorik (Combinationslehre).

Anm. Beim Ordnen von Gegenständen, z. B. bei der Zusammenfügung von Buchstaben zu einem Worte, betrachten wir die Objecte, also hier die Buchstaben, mit Rücksicht auf ihre verschiedene Bedeutung als absolut ungleich. Die etwaigen gleichen Merkmale, also der gleiche Stoff (Tinte, Kreide), oder die Zugehörigkeit zu derselben Schriftgattung, bleiben gänzlich unberücksichtigt. Wörter, die aus denselben Buchstaben, nur in verschiedener Folge, bestehen, wie „nebel" und „leben", sind verschiedene Combinationen derselben Elemente.

III. Man betrachtet die Zustände eines veränderlichen Objectes als gleich. In diesem Falle nennt man das ursprüngliche Object: Grösse, jede Form, deren Beziehung zu dem gegebenen Objecte bei Aenderung des letzteren unverändert bleibt: Funktion, und die Wissenschaft, deren Gegenstand die Funktionen sind: Funktionslehre.

Anm. Beispiel: Das veränderliche Object sei der von einem fallenden Körper seit Beginn des Falles zurückgelegte Weg. Wir nennen diesen Weg $x$, gleichviel, welcher Dauer des Falles er entspricht, und betrachten somit die verschiedenen Zustände des veränderlichen Objectes als gleich. Eine Form, deren Beziehung zur Grösse $x$ unverändert bleibt, wenn $x$ sich ändert, ist die Geschwindigkeit des fallenden Körpers; wir nennen daher die Geschwindigkeit eine Funktion von $x$.

IV. Man betrachtet die Zustände eines veränderlichen Objectes als ungleich. In diesem Falle nennt man das ursprüngliche Object: Punkt, den Inbegriff der ungleichen Zustände: Gebilde; ebenso jede aus einem Gebilde durch Aenderung abgeleitete Form. Die Wissenschaft, deren Gegenstand die Gebilde sind, heisst Raumlehre.

Anm. Die durch Bewegung eines Punktes entstehende Strecke umfasst alle verschiedenen Zustände des Punktes während der Bewegung, ist also ein Gebilde, desgl. die durch Bewegung einer Strecke entstehende Fläche.

Hiernach behandelt

I. die Zahlenlehre die arithmetischen discreten Formen,
II. die Combinationslehre die combinatorischen discreten Formen,
III. die Funktionslehre die arithmetischen stetigen Formen,
IV. die Raumlehre die combinatorischen stetigen Formen.

Anm. Ein und dasselbe Object kann unter verschiedenen Namen erscheinen, je nach der Betrachtung, welcher dasselbe unterworfen wird. Z. B.: Der Würfel als Einheit, wenn mehrere Würfel gezählt werden, als Zahl, wenn sein Inhalt durch eine Kubikeinheit gemessen wird, als Element, wenn mehrere Würfel geordnet werden, als Combination, wenn eine Menge von Elementen in Form eines Würfels geordnet werden, als Punkt, wenn es sich um die Bahn eines bewegten Würfels handelt, als

Gebilde, wenn seine Entstehung aus dem Punkte verfolgt wird, als Grösse, wenn die Abhängigkeit des Inhalts der ihm umschriebenen Kugel von seinem eigenen, als Funktion, wenn die Abhängigkeit seines Inhalts von der Länge seiner Seite untersucht wird.

4. Die Bezeichnung der gegebenen Objecte sowie der Formen geschieht durch Buchstaben. — In den Zweigen, welche die algebraischen Formen behandeln, erscheinen die als gleich betrachteten Einheiten und Grössen nicht einzeln unter besonderen Zeichen, sondern dasselbe Zeichen (1, $x$) genügt für alle. In den Zweigen, welche die combinatorischen Formen behandeln, erscheinen die als verschieden betrachteten Punkte und Elemente, jedes durch einen besonderen Buchstaben bezeichnet.

5. Für jeden Zweig der Mathematik ergeben sich zwei verschiedene Behandlungsweisen, je nachdem man von den speciellen, einfachen Formen zu den allgemeinen, zusammengesetzten vorschreitet, oder die Formen in ihrer grössten Allgemeinheit aufstellt, und die daran gefundenen Gesetze hinterher auf die speciellen Fälle anwendet. Die erste Methode ist die genetische; sie führt vor unseren Augen das Gebäude der Wissenschaft Stück für Stück auf. Die andere ist die dogmatische; sie führt uns in dem fertigen Gebäude herum und zeigt uns seine Theile. Es ist klar, dass der erste Weg den Vorzug verdient, wo es sich darum handelt, Jemand in die Wissenschaft einzuführen, während für denjenigen, welcher das Ganze schon beherrscht, der zweite Weg der kürzere und übersichtlichere ist.

Wie es in jedem einzelnen der vier Zweige die Aufgabe der allgemeinen Betrachtungen ist, die speciellen Resultate unter einem höheren Gesichtspunkte zu vereinigen, und das Gemeinsame derselben festzustellen, so lässt sich auch ein allen vier Zweigen gemeinsamer Theil aussondern, der „allgemeine Formenlehre" genannt werden, und je nach der gewählten Form der Darstellung den Anfang oder den Schluss des Ganzen bilden kann.

6. Die Wahrheiten der Mathematik, mit andern Worten die Resultate mathematischer Forschungen, lassen sich ebenso wie andere Producte geistiger Arbeit in Sätzen ausdrücken. Die Form dieser Sätze wird aber abgekürzt, indem die Nomina (Formen) durch Buchstaben, die Beziehungen derselben durch Zeichen von verabredeter Bedeutung ausgedrückt werden. Ein so ausgedrückter Satz heisst Formel, und das Uebertragen einer Formel in die gewöhnliche Sprache: Lesen der Formel.

7. Alle die mannigfachen Objecte, die sich dem denkenden Geiste zur Bearbeitung darbieten, liegen gleichmässig in zwei Gebieten, die gewissermassen ein von vornherein gegebenes Feld seiner Thätigkeit sind, von dem er sich nicht entfernen kann. Diese Gebiete sind Raum und Zeit. Innerhalb dieser Gebiete können wir Objecte zusammenfassen und ihren Aenderungen folgen.

Der Raum ist dasjenige Gebiet, in welchem die Objecte als Elemente oder Punkte, die Zeit dasjenige, in welchem sie als Einheiten oder Grössen (in dem oben festgestellten Sinne) erscheinen. Hiernach handelt es sich in der Zahlenlehre um die zeitliche, in der Combinationslehre um die räumliche Zusammenfassung mehrerer Objecte; in der Funktionslehre um die zeitliche, in der Raumlehre um die räumliche Aenderung eines Objectes.

Mehrere Objecte heissen, insofern sie sich zusammenfassen lassen,

als Einheiten: zählbar, als Elemente: combinationsfähig.

Ein Object heisst, insofern es sich ändern lässt,

als Grösse: veränderlich, als Punkt: beweglich.

8. Zwischen den vier Zweigen der Mathematik bestehen mannigfache Beziehungen. Da nämlich alle Objecte gleichmässig in Zeit und Raum existiren, so gestatten Zahlen- und Combinationslehre, sowie Funktions- und Raumlehre gegenseitige Anwendung auf einander. Da ferner die Zustände eines veränderlichen Objectes als einzelne Objecte betrachtet werden können, so ist die Funktionslehre mit der Zahlenlehre, und ebenso die Raumlehre mit der Combinationslehre verwandt.

9. Die Elemente der Mathematik umfassen Arithmetik und Combinatorik, sowie die Anfangsgründe der Raumlehre. Die Anfänge der Funktionslehre pflegen nicht als besonderer Zweig behandelt zu werden, sondern nehmen ihre Stelle da ein, wo sie auf die Raumlehre angewendet werden. — Wir unterscheiden ferner reine und angewandte Mathematik, je nachdem die Einheiten und Elemente, Grössen und Punkte nur für sich, oder zu dem Zwecke untersucht werden, Beziehungen zwischen Objecten der Wirklichkeit zu entdecken, die man sich unter dem Bilde jener vorstellt. (Ausführlicheres über das Verhältniss der vier Zweige der Mathematik s. bei H. Grassmann. Die lineale Ausdehnungslehre. Leipzig 1844, in der Einleitung.)

# Reine Arithmetik.

## Einleitung.

### 1. Entstehung, Begriff und Bezeichnung der Zahlen.

**1.** Alle Gegenstände unserer Wahrnehmung haben das Merkmal des Vorhandenseins (der Existenz) an sich. Indem wir nur auf dieses Merkmal achten, betrachten wir sie alle als gleich, nennen sie Einheiten, und können sie zusammenfassen. Die Thätigkeit dieses Zusammenfassens heisst „Zählen", und die Formen, welche dadurch entstehen, heissen „Zahlen". — Eine Zahl ist also der Inbegriff einer Menge von Einheiten.

Eine Zahl, die eine bestimmte Menge von Einheiten ausdrücken soll, (specielle, natürliche Zahl) bezeichnet man durch eine Ziffer, oder durch eine gesetzmässige Zusammenfügung mehrerer Ziffern. (Mit diesen Zahlen beschäftigt sich das gewöhnliche Rechnen).

Eine Zahl, die eine beliebige Menge von Einheiten ausdrücken soll, (allgemeine Zahl) bezeichnet man durch einen Buchstaben (einfache Zahl) oder durch eine gesetzmässige Vereinigung mehrerer Buchstaben (zusammengesetzte Zahl). Mit diesen Zahlen beschäftigt sich die Arithmetik.

Ein Buchstabe kann jede bestimmte Zahl vorstellen, aber nur eine und dieselbe, wenn er in einer zusammengesetzten Zahl mehrmals vorkommt.

Es genügt folglich, die allgemeinen Zahlen zu betrachten, da deren Gesetze auf alle speciellen Zahlen anwendbar sind.

Wenn uns mehrere Zahlen gegeben sind, so achten wir auf die Menge ihrer Einheiten (Grösse der Zahl). Wir können dann die Zahlen entweder nur vergleichen, oder sie nach bestimmten Gesetzen zu neuen Zahlen vereinigen (rechnen).

### 2. Vergleichung der Zahlen.

**2.** *Zwei Zahlen.* — Zwei Zahlen ($a$, $b$) heissen ungleich, wenn die eine mehr Einheiten enthält als die andere. — $a \gtrless b$.

Von zwei ungleichen Zahlen heisst diejenige Zahl ($a$), welche mehr Einheiten enthält, die grössere. — $a > b$.

Diejenige Zahl ($b$), welche **weniger** Einheiten enthält, heisst die **kleinere**. — $b < a$.

Anm. „Gross“ und „klein“, auf Zahlen angewendet, sind bildliche Ausdrücke.

Zwei Zahlen ($a$, $b$) heissen **gleich**, wenn die eine ebensoviele Einheiten enthält als die andere. — $a = b$, oder $b = a$.

**Vertauschungsgesetz: Von zwei gleichen Zahlen kann man die eine an die Stelle der anderen setzen.** 1.
— Denn $a = b$ und $b = a$ bedeuten dasselbe.

Anm. Zwischen zwei Zahlen ($a$, $b$) sind nur folgende Grössenbeziehungen möglich: $a > b$; $a = b$; $a < b$.

Der Ausdruck $a = b$ (in welchem statt $a$ und $b$ auch zusammengesetzte Zahlen stehen können) heisst eine **Gleichung**; $a$ und $b$ heissen die **Seiten** der Gleichung (rechte, linke).

**Folgerung** aus dem Vertauschungsgesetz: Man kann die beiden Seiten einer Gleichung mit einander vertauschen.

Wie die Wörter einer Sprache, zu einem Satze zusammengefügt, der Ausdruck einer Aussage oder einer Frage sind, so sind auch die Zahlen, zu einer Gleichung zusammengefügt, der Ausdruck einer mathematischen Wahrheit oder Aufgabe. Im ersten Falle heisst die Gleichung: **Formel**, und jeder ihrer Buchstaben kann durch eine beliebige Zahl ersetzt werden; im zweiten Falle heisst sie: **Bestimmungsgleichung**, und einer ihrer Buchstaben wird durch die Werthe der übrigen bestimmt, hat also nicht mehr einen willkürlichen Werth.

Anm. Was ist hiernach $a = b$? was $a = a$? Welche mathematische Aufgabe oder Wahrheit liegt in jeder dieser Gleichungen?

**3.** *Drei Zahlen.* — Wir fanden zwischen zwei Zahlen ($a$, $b$) die drei Fälle $a > b$, $a = b$, $a < b$. Bei Hinzunahme einer dritten Zahl $c$ kann sein: $b > c$, $b = c$, $b < c$. Es fragt sich nun: Wenn wir $a$ mit $b$ und $b$ mit $c$ verglichen haben, wie ist das Resultat der Vergleichung von $a$ mit $c$ beschaffen? Diese Frage beantwortet der Verstand wie folgt:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1. | Wenn | $a > b$ | und | $b > c$, | so | ist umsomehr | $a > c$. |
| 2. | » | $a > b$ | » | $b = c$, | » | » auch | $a > c$. |
| 3. | » | $a > b$ | » | $b < c$, | » | kann sein | $a \gtreqless c$. |
| 4. | » | $a = b$ | » | $b > c$, | » | ist auch | $a > c$. |
| 5. | » | $a = b$ | » | $b = c$, | » | » » | $a = c$. |
| 6. | » | $a = b$ | » | $b < c$, | » | » » | $a < c$. |
| 7. | » | $a < b$ | » | $b > c$, | » | kann sein | $a \lesseqgtr c$. |

8. » $a < b$ » $b = c$, » ist auch $a < c$.
9. » $a < b$ » $b < c$, » » umsomehr $a < c$.

2. Der wichtigste dieser Sätze, Nr. 5, lautet in Worten: **Sind zwei Zahlen derselben dritten gleich, so sind sie unter einander gleich.**

Anm. Die Sätze 2, 4, 5, 6, 8 folgen auch aus der Anwendung des Vertauschungsgesetzes. — Wie lauten die übrigen Sätze (ausser 5) in Worten? Welche Sätze gestatten denselben Wortausdruck?

# Erste Abtheilung.

# Die einfachen Zahlen.

## A. Die absoluten Zahlen.

**4.** *Uebersicht.* — Wir gehen von der aus Einheiten zusammengesetzten Zahl aus, und untersuchen die mannigfachen Weisen, in denen zwei Zahlen zu einer neuen Zahl vereinigt werden können. — Die beiden gegebenen Zahlen verbinden wir beim Schreiben und Sprechen für jede Art der Vereinigung durch ein besonderes Zeichen und setzen das Resultat der Vereinigung diesem Ausdrucke gleich. Bei jeder neuen Vereinigung (Rechnungsart) führen die gegebenen Zahlen sowohl, wie das Resultat, neue Namen. — Aus der einfachsten Art der Vereinigung zweier Zahlen, welche der Vereinigung von Einheiten entspricht, leiten wir neue Rechnungsarten ab, stellen die Eigenschaften jeder Rechnungsart fest, und wenden zuletzt die Rechnungsarten auf ihre Resultate an. Dabei lassen sich drei Stufen der Vereinigung (Rechnungsstufen) unterscheiden.

## Erste Rechnungsstufe.

### 1. Die Addition.

**5.** *Vorbemerkung.* — Wir hatten bereits Einheiten zu einer Zahl vereinigt. Sei das Zeichen dieser Vereinigung +, so können wir die Bedeutung einer beliebigen Zahl $a$ durch die Gleichung ausdrücken:

$$a = 1 + 1 + 1 + \dots$$

Wir können nun in derselben Weise zwei Zahlen zu einer neuen Zahl vereinigen, in welcher die Einheiten jener beiden Zahlen zusammen enthalten sind. Die neue Zahl ist dann aus

den gegebenen Zahlen geradeso zusammengesetzt, wie eine der letzteren aus den Einheiten. Diese Art der Vereinigung heisst Addition.

6. *Erklärungen.* — 1) Unter der Summe zweier Zahlen $a$ und $b$ versteht man diejenige Zahl $c$, welche so viele Einheiten enthält wie $a$ und $b$ zusammengenommen.

Gleichung der Addition: $a + b = c$. ($a$ plus $b$ gleich $c$.)

2) Die Zahlen $a$ und $b$ heissen Summanden.

3) Die Summe zweier Zahlen bilden, heisst: sie addiren.

Anm. Die der Summenbildung entgegengesetzte Aufgabe ist die Zerlegung einer gegebenen Summe in Summanden. In diesem Falle nennt man die gegebene Summe das Ganze, und die Summanden die Theile. Die Gleichung der Addition kann dann gelesen werden: Das Ganze ist gleich der Summe seiner Theile.

Von zwei durch Addition zu vereinigenden Zahlen kann die eine, $a$, als erstgegebene, zu vermehrende, die andere, $b$, als hinzuzufügende Zahl betrachtet werden. In diesen Eigenschaften kann man $a$ und $b$ durch die Namen Augend und Addend unterscheiden, und sagen, es werde $b$ zu $a$ addirt.

7. *Eigenschaften der Addition.* — 1) Die Summanden können beliebig geordnet werden. — Denn die gleichen Einheiten, die in der Zahl $c$ enthalten sind, können in jede beliebige Reihenfolge gebracht werden (nach dem allgemeinen Vertauschungsgesetz); namentlich können entweder alle aus $a$, oder alle aus $b$ stammenden Einheiten vorangestellt werden. Es gilt also das 3.

Vertauschungsgesetz: $a + b = b + a$.

Anm. Aus der Geltung des Vertauschungsgesetzes erklärt es sich, dass die durch Addition zu vereinigenden Zahlen nicht einzeln besonderer Namen bedürfen, sondern einen gemeinschaftlichen Namen (Summand) führen.

2) Die Summanden können beliebig zusammengefasst werden. — Eine aus den Einheiten dreier Zahlen $a$, $b$, $c$ zusammengesetzte Summe kann in zwei Zahlen zerlegt werden, von denen die eine die Einheiten von $a$ und $b$, die andere diejenigen von $c$ enthält, oder von denen die eine die Einheiten von $b$ und $c$, die andere diejenigen von $a$ enthält. Da die beiden so gebildeten Ausdrücke dieselbe Menge von Einheiten enthalten, so sind sie einander gleich. 4.

*Regel:* Jeder aus mehreren Buchstaben bestehende Ausdruck, der als eine einzige Zahl betrachtet werden soll, wird in Klammern ( ) geschlossen.

Demnach gilt also das

Zusammenfassungsgesetz: $(a+b)+c=a+(b+c)$.

Anm. Welche dritte Art der Zusammenfassung ist noch möglich? Wie lassen sich die drei Ausdrücke mit Hilfe des Vertauschungsgesetzes ändern?

**8.** *Weitere Bemerkungen zur Addition.* — 1) Da in einer aus drei (oder mehr) Summanden bestehenden Summe die Klammerzeichen an beliebige Stellen gesetzt werden dürfen, so kann man sie auch ganz weglassen, also schreiben:

$$(a+b)+c=a+b+c.$$

Der letztere Ausdruck wird gebildet durch fortschreitende Addition, d. h. so, dass man erst $b$ zu $a$, dann $c$ zu dem erhaltenen Resultate addirt.

2) Wenn $a+b=c$, so ist

$$c>a,\ c>b;$$

5. d. h.: Die Summe ist grösser als jeder Summand.

3) Wenn $a=c$ und $b=d$, so ist nach 1 *)

$$a+b=c+d,$$

6. mithin: Gleiches zu Gleichem addirt giebt Gleiches.

**9.** *Rechnung mit Resultaten.* — In der Formel 4

$$(a+b)+c=a+(b+c)$$

kann jede der beiden Seiten als Aufgabe und die jedesmalige andere Seite als Lösung betrachtet werden. Die Aufgabe rechts lässt sich mit ihrer Lösung in der Regel aussprechen:

**Addition einer Summe.**

7. Eine Summe addirt man zu einer Zahl, indem man ihre Summanden einzeln addirt.

Die Aufgabe links:

Eine Zahl wird zu einer Summe addirt, indem man sie zu einem der Summanden addirt.

Anm. Da man statt $(a+b)+c$ gewöhnlich $a+b+c$ schreibt, so wird durch Lösung der Aufgabe rechts eine Klammer beseitigt, durch Lösung der Aufgabe links dagegen eine Klammer eingeführt. Die erstere Operation ist aber die wichtigere, weil durch sie die Rechnung mit einem Resultate auf diejenige mit seinen einzelnen Bestandtheilen zurückgeführt wird. Es wird daher künftig in ähnlichen Fällen nur diejenige Deutung der Formel hervorgehoben werden, welche eine Klammer beseitigen lehrt.

---

*) Die einfachen Zahlen beziehen sich im ganzen Buche auf die am Rande stehenden Nummern der Formeln und Regeln. Die Nummern der Abschnitte sind durch Nr. bezeichnet.

Folgerung: Eine Zahl addirt man, indem man ihre Einheiten einzeln addirt.

Aus

$$(a+b)+c=a+(b+c)$$

folgt durch Vertauschung von $b$ und $c$

$$(a+c)+b=a+(c+b).$$

Da diese Vertauschung die rechte Seite ungeändert lässt, so sind auch die linken Seiten gleich; also

$$(a+b)+c=(a+c)+b.$$

In Worten: Die Reihenfolge, in der man mehrere Zahlen addirt, ist beliebig. 8.

## 2. Die Subtraction.

**10.** *Vorbemerkung.* — In der Aufgabe, die Summe $c$ zweier Zahlen $a$ und $b$ zu bestimmen, waren $a$ und $b$ die gegebenen, $c$ die gesuchte Zahl. Statt dessen kann man auch $a$ oder $b$ als gesuchte, $c$ und $b$ oder $c$ und $a$ als gegebene Zahlen betrachten. Die Lösung dieser beiden neuen Aufgaben würde zwei neue Rechnungsarten erfordern, wenn nicht $a$ und $b$ vertauscht werden könnten, sodass beide Aufgaben durch eine neue Rechnung gelöst werden. — Die eine der beiden Aufgaben heisst: Eine Zahl $b$ zu finden, die, zu einer gegebenen Zahl $a$ addirt, eine andere gegebene Zahl $c$ hervorbringt. Diejenige Vereinigung von $c$ und $a$, durch welche diese Aufgabe gelöst wird, heisst Subtraction.

**11.** *Erklärungen.* 1) Unter der Differenz zwischen zwei Zahlen $c$ und $a$ versteht man diejenige Zahl $b$, welche man zu $a$ addiren muss, um $c$ zu erhalten. — Wenn

$$a+b=c,$$

so ist die

Gleichung der Subtraction: $c-a=b$ ($c$ minus $a$ gleich $b$).

Anm. Die zweite Gleichung findet also in der ersten ihre Erklärung und gilt für die nämlichen Zahlenwerthe von $a$, $b$ und $c$, wie diese.

2) $c$ heisst Minuend, $a$ Subtrahend.

3) Die Differenz zwischen $c$ und $a$ bilden, heisst: $a$ von subtrahiren.

**12.** *Eigenschaft der Subtraction.* — Minuend und Subahend sind nicht vertauschbar (führen daher auch inen gemeinsamen Namen). Denn Minuend und Subtrahend aren in der Addition resp. Summe und Summand. — Wohl

aber sind Differenz und Subtrahend vertauschbar. Denn aus der Vertauschbarkeit von $a$ und $b$ folgt, dass, wenn

$$c - a = b,$$

auch

$$c - b = a$$

ist. Hieraus geht wieder die Eingangs gemachte Bemerkung hervor, dass die beiden Aufgaben: $b$ zu bestimmen, wenn $c$ und $a$, $a$ zu bestimmen, wenn $c$ und $b$ gegeben sind, durch dieselbe Rechnung gelöst werden.*)

Anm. Während eine Summe aus beliebig vielen Summanden bestehen konnte, enthält eine Differenz immer nur zwei Glieder. Die Frage nach der beliebigen Zusammenfassung ist dadurch von selbst ausgeschlossen.

**13.** *Weitere Bemerkungen zur Subtraction.* — 1) Da die Summe grösser ist als jeder Summand, so muss der Minuend einer Differenz grösser sein als der Subtrahend. Nur unter dieser Bedingung ist die Differenz eine Zahl in dem oben festgestellten Sinne. Ist die Bedingung nicht erfüllt, so muss man, um überhaupt eine Lösung der Aufgabe zu erhalten, den Begriff der Zahl erweitern. Dies wird weiter unten geschehen.

2) Wenn $a = c$ und $b = d$, so ist

$$a - b = c - d,$$

9. mithin: Gleiches von Gleichem subtrahirt giebt Gleiches.

**14.** *Zusammenhang mit der Addition.* — Aus jeder der drei Gleichungen:

$$1)\ a + b = c$$
$$2)\ c - a = b$$
$$3)\ c - b = a$$

kann man den Werth des rechts stehenden Buchstabens in die beiden anderen einsetzen. Dies giebt die Formeln:

1) in 2) $(a + b) - a = b$; 2) in 1) $a + (c - a) = c$;
2) in 3) $c - (c - a) = a$; 3) in 2) $c - (c - b) = b$;
3) in 1) $(c - b) + b = c$; 1) in 3) $(a + b) - b = a$.

Die dritte Reihe liefert die Regeln:

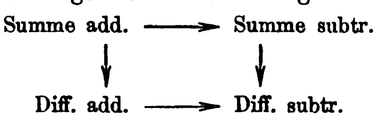
10. Eine Zahl bleibt ungeändert, wenn man eine andere erst zu ihr addirt und dann vom Resultate sub-

*) Stellt man sich die Aufgaben, aus $c - b = a$ die Zahlen $c$ und $b$ zu bestimmen, so ist ersichtlich, dass, da $c$ und $b$ nicht vertauschbar sind, beide Aufgaben durch verschiedene Rechnungen lösbar sein müssen. In der That wird $c$ durch Addition, $b$ durch Subtraction gefunden.

trahirt (oder umgekehrt). Addirt man zu einer Differenz den Subtrahend, so erhält man den Minuend. — Subtrahirt man von einer Summe den einen Summand, so erhält man den andern. — Daher besteht die Subtraction in der Fortschaffung eines Summanden.

Anm. Welche Regeln liegen in den beiden ersten Reihen? — Vermöge der ersten Regel sind Addition und Subtraction entgegengesetzte Rechnungsarten.

**15.** *Rechnung mit Resultaten.* — Im Anschluss an die in dem Abschnitt „Addition" gelöste Aufgabe: eine Summe zu addiren, lassen sich die Fragen stellen: Wie addirt man eine Differenz? Wie subtrahirt man eine Summe und eine Differenz? Um die beiden ersten Fragen zu beantworten, geht man von der Addition einer Summe aus und macht vermittelst einer ersten Methode den Uebergang von der Summe zur Differenz, vermittelst einer zweiten den Uebergang von der Addition zur Subtraction. Von jeder der beiden so erhaltenen Formeln kann man dann zur dritten Formel durch eine dieser beiden Methoden gelangen, wie folgendes Schema zeigt:




**Addition einer Differenz.**

$a + (b + c) = a + b + c$; 7.
Sei $(b + c) = x$; $b = (x - c)$;
$a + x = a + (x - c) + c$; 1.
$(a + x) - c = a + (x - c)$. 9. 10.

Eine Differenz addirt man zu einer Zahl, indem man den Minuend addirt und den Subtrahend subtrahirt. 11.

Anm. Welche Regel erhält man, wenn man die linke Seite $(a + x) - c$ als Aufgabe betrachtet?

Die dritte Reihe kann nach 8 geschrieben werden:

$$(a + x) = (a + c) + (x - c),$$

d. h.: Eine Summe bleibt ungeändert, wenn man dieselbe Zahl zu dem ei n Summand addirt und von dem andern subtrahirt. — Oder:

$$(x - c) = (x + a) - (c + a);$$

d. h.: Eine Differenz bleibt ungeändert, wenn man dieselbe Zahl zu M uend und Subtrahend addirt. — Oder:

$$(a + c) = (x + a) - (x - c);$$

d. .?

Aus

$$(a + x) - c = a + (x - c)$$

folgt durch Vertauschung der Summanden auf beiden Seiten:

$$(x + a) - c = (x - c) + a;$$

12. d. h.: Die Reihenfolge, in der man mehrere Zahlen addirt und subtrahirt, ist beliebig.

Anm. Welche Regel ergiebt sich, wenn man die rechte Seite als Aufgabe betrachtet?

**Subtraction einer Summe.**

13. $a + (b + c) = a + b + c.$ 7.
$a + (b + c) - b = a + c + b - b.$ 9. 8.
$a - b + (b + c) = a + c.$ 12. 10.
$a - b - c + (b + c) = a.$ 9. 12. 10.
$(a - b) - c = a - (b + c).$ 9. 10.

Eine Summe subtrahirt man von einer Zahl, indem man die Summanden einzeln subtrahirt.

Anm. Welche Regel erhält man, wenn man die linke Seite als Aufgabe betrachtet?

Folgerung: Eine Zahl subtrahirt man, indem man ihre Einheiten einzeln subtrahirt.

Aus

$$a - (b + c) = (a - b) - c$$

folgt durch Vertauschung von $b$ und $c$:

$$a - (c + b) = (a - c) - b.$$

Da diese Vertauschung die linke Seite ungeändert lässt, so sind auch die rechten Seiten gleich, also:

$$(a - b) - c = (a - c) - b;$$

14. d. h.: Die Reihenfolge, in der man mehrere Zahlen subtrahirt, ist beliebig.

**Subtraction einer Differenz.**

15. $a - (b + c) = a - b - c.$ 13.
Sei $(b + c) = x;\ b = (x - c).$
$a - x = a - (x - c) - c.$ 1.
$(a - x) + c = a - (x - c).$ 6. 10.

Eine Differenz subtrahirt man von einer Zahl, indem man den Minuend subtrahirt und den Subtrahend addirt.

Anm. Welche Regel erhält man, wenn man die linke Seite als Aufgabe betrachtet? — Von nun an wird dem Leser selbst überlassen werden, sich in den entsprechenden Fällen diese Frage zu stellen.

Die dritte Reihe kann nach 14 geschrieben werden:

$$(a - x) = (a - c) - (x - c);$$

d. h.: Eine Differenz bleibt ungeändert, wenn man dieselbe Zahl von Minuend und Subtrahend subtrahirt. — Oder:

$$(a - c) = (a - x) + (x - c);$$

d. h.? — Oder:

$$(x - c) = (a - c) - (a - x);$$

d. h.?

*Folgerung.* Nennt man eine Klammer, vor welcher $+$ steht, eine Plusklammer, eine solche, vor welcher $-$ steht, eine Minusklammer, so lassen sich die Regeln 7, 11, 13, 15, wie aus den zugehörigen Formeln ersichtlich ist, durch folgende mechanische Regel ersetzen:

Eine Plusklammer kann beliebig gesetzt und weg- 16.
gelassen werden, eine Minusklammer nur dann, wenn man gleichzeitig alle in der Klammer stehenden Plus- und Minuszeichen umkehrt (d. h. $-$ in $+$ verwandelt und $+$ in $-$).

**16.** *Erweiterungen.* 1) Setzt man in den Formeln 7, 11, 13, 15 $a = d + e$, und $a = d - e$, so erhält man die Ausführung der Rechnungen erster Stufe zwischen Summen und Differenzen. Von den 8 sich ergebenden Formeln lautet die erste:

$$(d + e) + (b + c) = [(d + e) + b] + c = d + e + b + c.$$

2) Setzt man in denselben Formeln $c = d + e$, und $c = d - e$, so erhält man die Ausführung der Rechnungen erster Stufe mit Resultaten, deren Theile wieder ein Resultat enthalten. Die erste dieser 8 Formeln lautet:

$$a + [b + (d + e)] = (a + b) + (d + e).$$

Die links gestellte Aufgabe ist also auf die vorher gelöste zurückgeführt. Man sieht hierbei, dass erst die äussere, dann die innere Klammer gelöst worden ist. Ebenso wird man, mit Benutzung der Regel 16, verfahren, wenn noch mehrere Klammern zu lösen sind, von denen immer eine in der anderen enthalten ist. (Aufgaben: Hofmann,*) 2. Erster Abschnitt. I. — Bardey,**) IV.)

# Zweite Rechnungsstufe.

## 3. Die Multiplication.

**17.** *Vorbemerkung.* — Die Einheiten, welche wir oben zu einer Zahl vereinigten, waren einander gleich; die Zahlen dagegen, deren Summe wir bildeten, waren es im Allgemeinen

---

*) Sammlung v. Aufg. a. d. Arithm. u. Algebra. Bayreuth 1874 bei Grau.

**) Methodisch geordnete Aufgabensammlung. Leipzig bei Teubner.

nicht. Nehmen wir nun an, eine Summe bestehe aus lauter gleichen Summanden, so brauchen wir, um diese Summe zu bilden, nur zwei Zahlen zu kennen, nämlich den wiederholten Summand und die Anzahl der Summanden. Diese Art der Summenbildung kann also als eine neue Art der Vereinigung zweier Zahlen betrachtet werden. Dieselbe heisst **Multiplication.**

**18.** ***Erklärungen.*** — 1) Unter dem **Producte** $c$ zweier Zahlen $a$ und $b$ versteht man eine Summe aus $a$ Summanden, deren jeder gleich $b$ ist. (Kurz: Ein Product ist eine Summe aus lauter gleichen Summanden.)

17. $$ab = b + b + \ldots \ (a\text{mal})$$

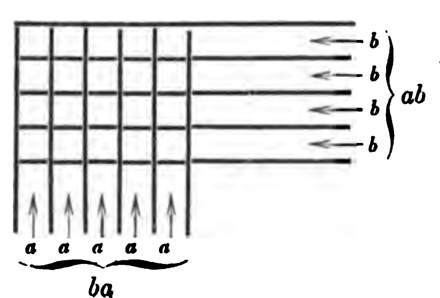
Gleichung der Multiplication: $ab = c$ ($a$(mal)$b$ gleich $c$).

2) Der wiederholte Summand, $b$, heisst **Multiplicand**, die Anzahl der Summanden, $a$, **Multiplicator**, beide Zahlen gemeinsam: **Factoren.**

3) Das Product zweier Zahlen $a$ und $b$ bilden, heisst: **$a$ mit $b$ multipliciren.**

Anm. Die Multiplication zweier allgemeiner Zahlen wird durch einfaches Nebeneinanderschreiben bezeichnet. Die Verbindung $ab$ wird ursprünglich gelesen: $a$-mal $b$, wobei also die Silbe „mal" mit der vorangehenden Zahl ein Wort bildet. (Ebenso bei speciellen Zahlen, z. B.: einmal, dreimal.) Da aber, wie sogleich gezeigt werden wird, $a$ und $b$ vertauscht werden können, so pflegt man die Silbe „mal" als selbständiges, zwischen $a$ und $b$ gesetztes Wort zu betrachten (ebenso wie „plus" in der Addition), welches dadurch seine ursprüngliche Bedeutung verliert und nur noch zur Bezeichnung der Multiplication dient.

18. **19.** ***Eigenschaften der Multiplication.*** — 1) **Die Factoren können beliebig geordnet werden.** — Denn da $ab = b + b + \ldots$ ($a$mal) ist, so können wir alle in dem Producte $ab$ enthaltenen Einheiten in $a$ Horizontalreihen ordnen, von denen jede $b$ Einheiten enthält (wie die nebenstehende Figur zeigt, in der die Einheiten durch Quadrate dargestellt sind).



Gleichzeitig aber ordnen sich die Einheiten in $b$ Verticalreihen, jede mit $a$ Einheiten, sodass diese zweite Zählung das Product $ba$ giebt. Da dies zweite Product dieselben Einheiten enthält, wie das erste, nur anders gezählt, so gilt das

Vertauschungsgesetz: $ab = ba$.

**Anm.** Die Geltung dieses Gesetzes rechtfertigt die Aufstellung des gemeinsamen Namens „Factor" für Multiplicand und Multiplicator. Diese letztern Benennungen sind aber nicht überflüssig, da die Vertauschung unzulässig ist, sobald die beiden Zahlen aus verschiedenartigen Einheiten abgeleitet sind, was in der angewandten Arithmetik vorkommen kann. Ist nämlich der Multiplicand eine benannte Zahl, z. B. 7 Meter (also nicht aus der Zahleneinheit, sondern aus der Längeneinheit „Meter" abgeleitet), so kann man zwar das Product bilden: dreimal Siebenmeter, nicht aber: Siebenmeter-mal drei; d. h.: es gilt hier keine Vertauschung von Multiplicand und Multiplicator, Vergl. Nr. 25 Anm.

2) Die Factoren können beliebig zusammengefasst 19.
werden. — Denn setzt man in der Figur zu 18 statt jeder Einheit die Zahl $c$, so giebt jede Horizontalreihe $bc$ Einheiten, also alle $a$ Horizontalreihen $a(bc)$ Einheiten. Jede Verticalreihe aber giebt $ac$ Einheiten, also alle $b$ Verticalreihen $b(ac)$ Einheiten. Demnach gilt das

Zusammenfassungsgesetz: $a(bc) = b(ac)$

oder mit Benutzung von 18:

$$a(bc) = c(ab) = (ab)c.$$

**20.** *Weitere Bemerkungen zur Multiplication.* — 1) Da in einem aus drei (oder mehr) Factoren bestehenden Producte die Klammerzeichen an beliebiger Stelle gesetzt werden dürfen, so kann man sie auch ganz weglassen und schreiben:

$$(ab)c = abc;$$

d. h.: bei fortschreitender Multiplication wird erst $a$ mit $b$, dann das Product mit $c$ multiplicirt.

2) Wenn $ab = c$, so ist

$$c > a \text{ und } c > b;$$

d. h.: Das Product ist grösser als jeder Factor; ferner 20.
ist dasselbe ein Vielfaches jedes Factors.

3) Wenn $a = c$ und $b = d$, so ist nach 1

$$ab = cd,$$

mithin: Gleiches mit Gleichem multiplicirt giebt 21.
Gleiches.

**21.** *Rechnung mit Resultaten.* — Wie in der ersten Rechnungsstufe aus einer Grundformel (7) die übrigen drei Formeln

(11, 13, 15) abgeleitet wurden, so ist es auch hier der Fall, nur dass man 2 Grundformeln aufstellen muss, da die Rechnungen nicht blos an einem Resultate erster, sondern auch an einem solchen zweiter Stufe ausgeführt werden können. Die Methoden der Ableitung sind dieselben, welche bereits oben angewendet wurden.

## A. Rechnung mit Resultaten 1. Stufe.

**Multiplication einer Summe.**

22. $c(a+b)=(a+b)+(a+b)+\ldots(\text{cmal})$ 17.
$=a+a+\ldots.(\text{cmal})$
$+b+b+\ldots(\text{cmal})$ 16. 3.
$c(a+b)=ca+cb$ 17.
oder
$(a+b)c=ac+bc$ 18.

Eine Summe multiplicirt man mit einer Zahl, indem man die Summanden einzeln multiplicirt und die Producte addirt.

**Multiplication einer Differenz.**

23. $(a+b)c=ac+bc.$ 22.
Sei
$a+b=x;\ a=x-b.$
$xc=(x-b)c+bc.$
$xc-bc=(x-b)c.$ 9. 10.

Eine Differenz multiplicirt man mit einer Zahl, indem man ihre Glieder einzeln multiplicirt und das Product des Subtrahend von dem des Minuend subtrahirt.

Betrachtet man in 22 die rechte, in 23 die linke Seite
24. der Formel als Aufgabe, so erhält man die Regel: Producte mit einem gemeinsamen Factor werden addirt oder subtrahirt, indem man den gemeinsamen Factor mit der Summe oder Differenz der nicht gemeinsamen Factoren multiplicirt.

Dieses Verfahren wird auch Heraussetzung des gemeinsamen Factors genannt.

Also nur bedingungsweise kann eine Summe oder Differenz von Producten als Product dargestellt werden. Wie diese Bedingung nachträglich in einer Aufgabe erfüllt werden kann, werden wir weiter unten sehen. (S. Anm. zu 33.) (Aufgaben: Hofmann 2. Erster Abschn. II, 33—53, 83—121.)

*Erweiterungen.* Setzt man in den Formeln 22 und 23 $c=d+e$ und $c=d-e$, so erhält man nach Lösung der Klammern mittelst derselben Formeln:

$$1)\ (a+b)(d+e)=ad+ae+bd+be;$$
$$2)\ (a+b)(d-e)=ad-ae+bd-be;$$
$$3)\ (x-b)(d+e)=xd+xe-bd-be;$$
$$4)\ (x-b)(d-e)=xd-xe-bd+be;$$

d. h.: Summen und Differenzen werden mit einander 25.
multiplicirt, indem man jedes Glied der einen mit jedem Gliede der andern multiplicirt, und alle Producte aus zwei Summanden oder Subtrahenden addirt, dagegen alle Producte aus einem Summand und einem Subtrahend subtrahirt.

## 22. B. Rechnung mit Resultaten 2. Stufe.

Formel 19: $a(bc)=(ab)c$ enthält die

**Multiplication mit einem Producte.**

Eine Zahl wird mit einem Producte multiplicirt, 26.
indem man sie mit den Factoren der Reihe nach multiplicirt.

Betrachtet man die rechte Seite von 19 als Aufgabe, so ergiebt sich die Regel: Ein Product wird mit einer Zahl multiplicirt, indem man einen Factor mit ihr multiplicirt.

Aus

$$(ab)c=a(bc)$$

folgt durch Vertauschung von $b$ und $c$

$$(ac)b=a(cb).$$

Da diese Vertauschung die rechte Seite ungeändert lässt, so sind auch die linken Seiten gleich, also:

$$(ab)c=(ac)b.$$

In Worten: Die Reihenfolge, in der man mit mehreren 27.
Zahlen multiplicirt, ist beliebig. (Aufgaben: Hofmann 2. Erster Abschn. II, 1—16, 54—60; III, 1—66, 115—137. — Bardey VI.)

### 4. Die Division.

**23.** *Vorbemerkung.* — Wie aus der Gleichung der Addition, $a+b=c$, so gehen auch aus derjenigen der Multiplication $ab=c$ zwei neue Aufgaben dadurch hervor, dass man entweder $a$ oder $b$ als gesuchte, $b$ und $c$ oder $a$ und $c$ als gegebene Zahlen betrachten kann. Auch hier bewirkt die Vertauschbarkeit von $a$ und $b$, dass beide Aufgaben durch eine neue Rechnung ge-

löst werden. Die eine dieser Aufgaben wird also lauten: Eine Zahl $b$ zu finden, die, mit einer gegebenen Zahl $a$ multiplicirt, eine andere gegebene Zahl $c$ hervorbringt. Diejenige Vereinigung von $c$ und $a$, deren Resultat $b$ ist, heisst Division.

24. *Erklärungen:* 1) Unter dem Quotienten zwischen zwei Zahlen $c$ und $a$ versteht man diejenige Zahl $b$, mit welcher man $a$ multipliciren muss, um $c$ zu erhalten. — Wenn

$$ab = c,$$

so ist die

Gleichung der Division: $\frac{c}{a} = b$ ($c$ durch $a$ gleich $b$).

2) $c$ heisst Dividend, $a$ Divisor.

3) Den Quotienten zwischen $c$ und $a$ bilden, heisst: $c$ durch $a$ dividiren.

Anm. Ein in natürlichen Zahlen ausgedrückter Quotient wird gewöhnlich „Bruch" genannt, sein Dividend „Zähler," sein Divisor „Nenner".

25. *Eigenschaft der Division.* — Dividend und Divisor sind nicht vertauschbar. — Wohl aber sind Quotient und Divisor vertauschbar. Denn aus der Vertauschbarkeit von $a$ und $b$ folgt, dass, wenn

$$\frac{c}{a} = b,$$

auch

$$\frac{c}{b} = a$$

ist. Durch letztere Gleichung ist die zweite der oben erwähnten Aufgaben gelöst, nämlich $a$ zu bestimmen, wenn $c$ und $b$ gegeben sind.

Anm. Sind die Factoren eines Productes nicht vertauschbar (vgl. Anm. in Nr. 19), so werden die beiden Aufgaben: $a$ zu bestimmen, wenn $c$ und $b$, und $b$ zu bestimmen, wenn $c$ und $a$ gegeben sind, verschiedene Rechnungsarten erfordern. So führt z. B. die a. a. O. gestellte Aufgabe: „dreimal sieben Meter = 21 Meter" einerseits auf die Bestimmung der Zahl „Sieben Meter", andrerseits auf die Bestimmung der Zahl „drei". Die erste Aufgabe wird durch Theilung, die zweite durch Messung gelöst, sodass man erhält:

21 Meter, getheilt durch 3, = 7 Meter.
21 Meter, gemessen durch 7 Meter, = 3.

26. *Weitere Bemerkungen zur Division.* — 1) Da das Product nicht nur grösser ist als jeder Factor, sondern auch ein Vielfaches jedes Factors, so muss der Dividend ein Viel-

faches des Divisors sein. Nur unter dieser Bedingung ist der Quotient eine Zahl in dem oben festgestellten Sinne. — Die Division ist demnach nur eine wiederholte Subtraction, bei welcher die Zahl der Subtrahenden oder die Grösse eines derselben bestimmt wird.

2) Wenn $a = c$, und $b = d$, so ist

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d},$$

mithin: Gleiches durch Gleiches dividirt giebt Gleiches. 28.

**27.** *Zusammenhang mit der Multiplication.* — Aus jeder der drei Gleichungen:

$$1)\ ab = c;\ 2)\ \frac{c}{a} = b;\ 3)\ \frac{c}{b} = a$$

kann man den Werth des rechts stehenden Buchstabens in die beiden andern einsetzen. (Vgl. die entsprechende Stelle in der Subtraction). Dies giebt 6 Formeln, von denen die wichtigsten sind:

$$3)\text{ in }1)\ \frac{c}{b}\,b = c;\ 1)\text{ in }3)\ \frac{ab}{b} = a.$$

In Worten: Eine Zahl bleibt ungeändert, wenn man sie erst mit einer anderen multiplicirt, und dann durch dieselbe dividirt (oder umgekehrt). 29.

Oder: Multiplicirt man einen Quotienten mit dem Divisor, so erhält man den Dividend. — Dividirt man ein Product durch den einen Factor, so erhält man den andern. — Daher besteht die Division in der Fortschaffung eines Factors.

Anm. Vermöge der ersten Regel sind Multiplication und Division entgegengesetzte Rechnungsarten. — In zusammengesetzten Rechnungen vertritt der Divisionsstrich die Stelle der Klammer.

**28.** *Rechnung mit Resultaten.* — Die Rechnung mit Resultaten 1. Stufe ergiebt sich aus dem entsprechenden Abschnitt der Multiplication, indem man in den dortigen Formeln den Uebergang vom Product zum Quotienten macht. Die Rechnung mit Resultaten 2. Stufe stimmt in den Methoden genau mit der Subtraction überein, nur dass die dort angewandten Zeichen der Addition und Subtraction hier durch diejenigen der Multiplication und Division zu ersetzen sind. Der Zusammenhang der Formeln 26 (19) und 7 (4) kann bereits als Beispiel hierfür dienen.

# A. Rechnung mit Resultaten 1. Stufe.

**Division einer Summe.**

30. $(a + b)\,c = ac + bc.$

Sei $ac = x$; $a = \frac{x}{c}$

und $bc = y$; $b = \frac{y}{c}$.

$$\left(\frac{x}{c} + \frac{y}{c}\right)c = x + y;$$

$$\frac{x}{c} + \frac{y}{c} = \frac{x + y}{c}. \qquad 28.\,29.$$

22. Eine Summe dividirt man durch eine Zahl, indem man die Summanden einzeln dividirt und die Quotienten addirt.

**Division einer Differenz.**

31. $$\frac{x + y}{c} = \frac{x}{c} + \frac{y}{c}. \qquad 30.$$

Sei $x + y = z$; $x = z - y$.

$$\frac{z}{c} = \frac{z - y}{c} + \frac{y}{c}.$$

$$\frac{z}{c} - \frac{y}{c} = \frac{z - y}{c}. \qquad 9.\,10.$$

Eine Differenz dividirt man durch eine Zahl, indem man ihre Glieder einzeln dividirt und den Quotienten des Subtrahend von dem des Minuend subtrahirt.

Anm. 31 ist auch aus 23 abzuleiten, ebenso wie 30 aus 22.

Betrachtet man in 30 und 31 die linke Seite der Formel
32. als Aufgabe, so erhält man die Regel: Quotienten mit gleichem Divisor werden addirt oder subtrahirt, indem man die Summe oder Differenz der Dividenden durch den Divisor dividirt. (Vgl. die Bemerkung zu 24.)

Anm. Setzt man in 22 nur $ac = x$, $a = \frac{x}{c}$, und in 23 nur $ac = y$; $a = \frac{y}{c}$, oder $bc = z$, $b = \frac{z}{c}$, so erhält man die Formeln:

$$\left(\frac{x}{c} + b\right)c = x + bc;\; y - bc = \left(\frac{y}{c} - b\right)c;\; ac - z = \left(a - \frac{z}{c}\right)c;$$

und hieraus nach 28 und 29:

$$\frac{x}{c} + b = \frac{x + bc}{c};\;\; \frac{y - bc}{c} = \frac{y}{c} - b;\;\; \frac{ac - z}{c} = a - \frac{z}{c}.$$

Diese Formeln zeigen, wie eine Zahl durch Addition oder Subtraction mit einem Producte oder Quotienten so vereinigt werden kann, dass das Resultat wieder ein Product oder Quotient ist.

Die den Aufgaben 30 und 31 entsprechenden Aufgaben: Eine Zahl durch eine Summe oder Differenz zu dividiren, finden einst-

weilen nur bedingungsweise ihre Lösung, nämlich, wenn man 28 und 29 auf 22 und 23 anwendet, durch die Formeln:

$$\frac{ac+bc}{a+b}=c;\quad \frac{xc-bc}{x-b}=c.$$

## 29. B. Rechnung mit Resultaten 2. Stufe.

### Multiplication mit einem Quotienten.

$a(bc)=abc.$ 26. Eine Zahl wird mit einem Quotienten multiplicirt, indem man sie mit dem Dividend multiplicirt und durch den Divisor dividirt. 33.

Sei $bc=x;\ b=\frac{x}{c};$

$ax=a.\frac{x}{c}.c$

$\frac{ax}{c}=a\frac{x}{c}.$ 28. 29.

Anm. Betrachtet man die linke Seite als Aufgabe, so erhält man die Regel: Ein Product wird durch eine Zahl dividirt, indem man einen Factor dividirt.

Die dritte Reihe kann geschrieben werden (nach 27):

$$ax=(ac)\frac{x}{c},\ \text{oder: } \frac{x}{c}=\frac{ax}{ac},\ \left(\text{oder: } ac=\frac{ax}{x|c}\right);$$

d. h.: Ein Product bleibt ungeändert, wenn man den einen Factor mit einer Zahl multiplicirt und den andern durch dieselbe dividirt. — Ein Quotient bleibt ungeändert, wenn man Dividend und Divisor mit derselben Zahl multiplicirt (den Quotienten erweitert). (In jeder dieser 3 Formeln kann noch von jedem Product auf doppelte Weise der Uebergang zum Quotienten gemacht werden.)

Vermöge dieser beiden Regeln kann man Producten, die keinen gleichen Factor, und Quotienten, die keinen gleichen Divisor haben, einen solchen dadurch geben, dass man sie mit derselben Zahl multiplicirt und dividirt. So ist

$$ab+cd=(ac)\frac{b}{c}+(ac)\frac{d}{a}=ac\left(\frac{b}{c}+\frac{d}{a}\right);\quad 24.$$

$$ab-cd=(ac)\frac{b}{c}-(ac)\frac{d}{a}=ac\left(\frac{b}{c}-\frac{d}{a}\right);\quad 24.$$

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad}{bd}+\frac{cb}{db}=\frac{ad+bc}{bd};\quad 32.$$

$$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad}{bd}-\frac{cb}{db}=\frac{ad-bc}{bd}.\quad 32.$$

Hiermit ist die in 24 und 32 nur bedingungsweise bewirkte Addition und Subtraction von Producten und Quotienten allgemein ausgeführt. (Directe Ableitung der letzten beiden Formeln aus den ersten beiden!)

Aus

$$\frac{ax}{c}=a\frac{x}{c}$$

folgt durch Vertauschung der Factoren auf beiden Seiten:

$$\frac{xa}{c} = \frac{x}{c}a;$$

34. d. h.: Die Reihenfolge, in der man mit mehreren Zahlen multiplicirt und dividirt, ist beliebig.

**Division durch ein Product.**

35.

| | | |
|---|---|---|
| $a(bc) = abc$ | 26. | Eine Zahl wird durch ein Product dividirt, indem man sie durch die Factoren der Reihe nach dividirt. |
| $\frac{a(bc)}{b} = \frac{acb}{b}$ | 28. 27. | |
| $\frac{a}{b}(bc) = ac$ | 34. 29. | |
| $\frac{a\mid b}{c}(bc) = a$ | 28. 34. 29. | |
| $\frac{a\mid b}{c} = \frac{a}{bc}$ | 28. 29. | |

Anm. Betrachtet man die linke Seite als Aufgabe, so erhält man die Regel: Ein Quotient wird durch eine Zahl dividirt, indem man den Divisor mit der Zahl multiplicirt.

Aus

$$\frac{a}{bc} = \frac{a\mid b}{c}$$

folgt durch Vertauschung von $b$ und $c$:

$$\frac{a}{cb} = \frac{a\mid c}{b}.$$

Da diese Vertauschung die linke Seite ungeändert lässt, so sind auch die rechten Seiten gleich, also:

$$\frac{a\mid b}{c} = \frac{a\mid c}{b};$$

36. d. h.: Die Reihenfolge, in der man durch mehrere Zahlen dividirt, ist beliebig.

**Division durch einen Quotienten.**

37.

| | | |
|---|---|---|
| $\frac{a}{bc} = \frac{a\mid b}{c}$. | 35. | Eine Zahl wird durch einen Quotienten dividirt, indem man sie durch den Dividend dividirt und mit dem Divisor multiplicirt.*) |
| Sei $bc = x$; $b = \frac{x}{c}$; | | |
| $\frac{a}{x} = \frac{a}{x\mid c}\Big\vert c$ | | |
| $\frac{a}{x}c = \frac{a}{x\mid c}$ | 21. 29. | |

*) Die Formeln 26, 33, 35, 37 gehen auch aus 7, 11, 13, 15 hervor.

Anm. Betrachtet man die linke Seite als Aufgabe, so erhält man die Regel: Ein Quotient wird mit einer Zahl multiplicirt, indem man den Divisor durch die Zahl dividirt.

Die dritte Reihe kann (nach 37) geschrieben werden:

$$\frac{a}{x} = \frac{a}{c} \Big| \frac{x}{c}, \text{ oder: } \frac{a}{c} = \frac{a}{x} \cdot \frac{x}{c}, \text{ oder: } \frac{x}{c} = \frac{a}{c} \Big| \frac{a}{x}.$$

Die erste dieser Formeln giebt die Regel: Ein Quotient bleibt ungeändert, wenn man Dividend und Divisor durch dieselbe Zahl dividirt (den Quotienten kürzt).

**30.** *Erweiterungen.* 1) Setzt man in den Formeln 26, 33, 35, 37 $a = de$ und $a = \frac{d}{e}$, so erhält man die Ausführung der Rechnungen 2. Stufe zwischen Producten und Quotienten. Von den 8 sich ergebenden Formeln lautet die erste:

$$(de)(bc) = [(de)b]c.$$

Von den übrigen verdienen noch die beiden, welche die Multiplication und Division zwischen 2 Quotienten behandeln, wegen ihrer Anwendungen auf specielle Zahlen Erwähnung. Man erhält:

$$\frac{d}{e} \cdot \frac{x}{c} \underset{(33)}{=} \frac{d \,|\, e \cdot x}{c} \underset{(34)}{=} \frac{dx \,|\, e}{c} \underset{(35)}{=} \frac{dx}{ec}$$

$$\frac{d}{e} \Big| \frac{x}{c} \underset{(37)}{=} \frac{d \,|\, e}{x} c \underset{(35)}{=} \frac{d}{ex} c \underset{(34)}{=} \frac{dc}{ex}.$$

2) Setzt man in denselben Formeln $c = de$ und $c = \frac{d}{e}$, so erhält man die Ausführung der Rechnungen 2. Stufe mit Resultaten, deren Theile wieder ein Resultat enthalten. Die erste dieser 8 Formeln lautet:

$$a[b(de)] = (ab)(de).$$

Die links gestellte Aufgabe ist also auf die vorher gelöste zurückgeführt.

Anm. Die letzten Formeln von 33 an unterscheiden sich von den entsprechenden Formeln der Subtraction (von 11 an) nur dadurch, dass statt der Zeichen der Addition und Subtraction resp. diejenigen der Multiplication und Division stehen. Wendet man als Divisionszeichen den Doppelpunkt (:) an, so stehen auch hier alle Zahlen in horizontaler Reihe, und die Lösung der Klammern erfolgt nach denselben Gesetzen, die am Schluss der 1. Rechnungsstufe gegeben wurden.

(Aufgaben: Hofmann, 2. Erster Abschnitt II. 17—32, 61—82, III. 71—114, IV. V. VI. — Bardey, VII—X.)

---

wenn man die Zeichen der Addition und der Subtraction resp. durch die der Multiplication und Division ersetzt.

# Dritte Rechnungsstufe.

## 5. Die Potenzirung.

**31.** *Vorbemerkung.* — Da ein Product ebenso wie eine Summe aus beliebig vielen Zahlen zusammengesetzt sein kann, so kann man auch hier den speciellen Fall annehmen, dass alle diese Factoren einander gleich seien, und den Werth des Productes als Resultat einer Vereinigung zwischen einem Factor und der Anzahl der Factoren betrachten. Diese Vereinigung heisst Potenzirung.

**32.** *Erklärungen.* — 1) Unter der $a^{\text{ten}}$ Potenz $c$ einer Zahl $b$ versteht man ein Product aus $a$ Factoren, deren jeder gleich $b$ ist. (Kurz: Eine Potenz ist ein Product aus lauter gleichen Factoren.)

38. $$b^a = bbb\ldots\;(a\text{mal}).$$

Gleichung der Potenzirung: $b^a = c$ ($b$ hoch $a$ gleich $c$).

2) Der wiederholte Factor, $b$, heisst Grundzahl, die Anzahl der Factoren, $a$, Exponent.

3) Die $a^{\text{te}}$ Potenz einer Zahl $b$ bilden, heisst: $b$ mit $a$ potenziren.

Anm. $a$ heisst auch der Grad der Potenz, daher $b^a$ eine Potenz vom Grade $a$.

**33.** *Eigenschaft der Potenzirung.* — Grundzahl und Exponent sind im Allgemeinen nicht vertauschbar. — Dies lehrt jedes Zahlenbeispiel. Nur $2^4 = 4^2$ macht eine Ausnahme.*)

39. **34.** *Weitere Bemerkungen zur Potenzirung.* — 1) Die Potenz ist grösser als die Grundzahl, ist ein Vielfaches

---

*) Der Beweis für die Richtigkeit dieses Satzes (denn eine Erläuterung durch Zahlenbeispiele ist kein Beweis) erfordert Rechnungen, die an dieser Stelle noch nicht vorgekommen sind. Gleichwohl möge er hier folgen. Sei $\frac{a}{b} = m$ (wobei $m$ eine ganze oder gebrochene Zahl sein kann); also $a = mb$; dann geht die Formel $a^b = b^a$ über in $(mb)^b = b^{mb}$, oder $mb = b^m$, oder $m = b^{m-1}$, oder $b = \sqrt[m-1]{m}$; $a = m\sqrt[m-1]{m}$. Es müssen also $a$ und $b$ diese besondere Form haben, um der Formel $a^b = b^a$ zu genügen. Mithin gilt dieselbe nicht allgemein. Sollen ferner $a$ und $b$ Zahlen in dem bisherigen Sinne sein, so muss $m - 1 = 1$, d. h. $m = 2$, $b = 2$, $a = 4$ sein; d. h.: 2 und 4 sind die einzigen Zahlen, für welche $a^b = b^a$ ist.

derselben, und besteht aus lauter gleichen Factoren von der Grösse der Grundzahl.

2) Wenn $a=c$ und $b=d$, so ist

$$b^a = d^c,$$

mithin: Gleiches mit Gleichem potenzirt giebt Gleiches. 40.

Anm. Da Grundzahl und Exponent nicht vertauschbar sind, so können auch nicht mehr als zwei Zahlen durch Potenzirung verbunden werden. Denn $a^{b^c}$ hat verschiedene Werthe, je nachdem es $(a^b)^c$ oder $a^{(b^c)}$ bedeutet. (Nur $2^{2^2}$ bildet eine Ausnahme.) Folglich kann man von der Potenzirung nicht wieder auf demjenigen Wege zu einer neuen Rechnungsart gelangen, welcher von der Addition zur Multiplication und von dieser zur Potenzirung führte.

**35.** *Rechnung mit Resultaten.* — Da die Potenzirung mit Resultaten 1., 2. und 3. Stufe ausgeführt werden kann, und da es einen Unterschied macht, ob das Resultat in der Grundzahl oder im Exponenten steht, so kann man 6 Grundaufgaben stellen, nämlich:

$$c^{a+b},\ (a+b)^c;\ (ab)^c,\ c^{ab};\ (c^a)^b,\ b^{(c^a)}.$$

## A. Rechnung mit Resultaten 1. Stufe.

### Potenzirung mit einer Summe.

$c^{a+b} = c.c.c\ldots(a+b)$mal. 38.
$= c.c\ldots\ldots(a$mal$)$
$.c.c\ldots\ldots(b$mal$)$; 19.
$c^{a+b} = c^a.c^b.$ 38.

Eine Zahl wird mit einer Summe potenzirt, indem man sie mit den einzelnen Summanden potenzirt und die Potenzen multiplicirt. 41.

### Potenzirung mit einer Differenz.

$c^{a+b} = c^a.c^b.$ 41.
Sei $a+b=x$; $a=x-b$;
$c^x = c^{x-b}.c^b.$
$\frac{c^x}{c^b} = c^{x-b}.$ 28. 29.

Eine Zahl wird mit einer Differenz potenzirt, indem man sie mit den einzelnen Gliedern potenzirt und die Potenz mit dem Minuend durch die andere dividirt. 42.

Betrachtet man in 41 die rechte, in 42 die linke Seite der Formel als Aufgabe, so erhält man die Regel: Potenzen mit gleicher Grundzahl werden multiplicirt oder dividirt, indem man die Grundzahl mit der Summe oder Differenz der Exponenten potenzirt. 43.

Also nur bedingungsweise kann ein Product oder Quotient von Potenzen wieder als Potenz dargestellt werden. Wie diese Bedingung nachträglich in einer Aufgabe erfüllt werden kann, werden wir weiter unten sehen. (S. Anm. zu 58.) (Aufgaben: Hofmann 2. Zweiter Abschn. II. — Bardey XI. 21—50.)

Die zweite Grundaufgabe $(a+b)^c$ kann mit den bisherigen Mitteln allgemein noch nicht gelöst werden (die allgemeine Lösung s. Nr. 187), wohl aber für jeden speciellen Exponenten durch wiederholte Multiplication. Zu merken sind die für die Exponenten 2 und 3 sich ergebenden Formeln (NB. Statt „hoch zwei" sagt man auch „Quadrat").

44. $$\begin{cases}(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2;\ (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3; \\ (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2;\ (a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.\end{cases}$$

Anm. Die Formeln links ergeben sich auch aus 25, Formel 1) und 4), wenn man darin $d = a$, $e = b$ setzt. Für die Formeln 2) und 3) daselbst ergiebt dasselbe Verfahren:

45. $$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2,$$

eine Formel, welche sich noch verallgemeinern lässt, da man durch Ausführung der Multiplication findet, dass

45a. $$(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1})(a-b) = a^n - b^n$$

ist. Hiernach kann man also die Differenz von Potenzen mit gleichen Exponenten als Product darstellen.

Setzt man in der Formel für $(a+b)^2$ statt $b$ die Summe $b+c$, dann statt $c$ die Summe $c+d$ u. s. w., so erhält man

45b. $$\begin{aligned}(a+b+c+d+\ldots)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + \ldots &+ 2ab + 2ac + 2ad + \ldots \\ &+ 2bc + 2bd + \ldots \\ &+ 2cd + \ldots\end{aligned}$$

oder:

$$\begin{aligned}(a+b+c+d+\ldots)^2 &= a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + \ldots + 2ab + 2(a+b)c + 2(a+b+c)d + \ldots \\ &= a^2 + b(2a+b) + c[2(a+b)+c] + d[2(a+b+c)+d] + \ldots\end{aligned}$$

(Aufgaben: Hofmann 2. Zweiter Abschnitt VI. 1—6, 17—20, 31—34 VII. 1. 2. 6. 7.)

## 36. B. Rechnung mit Resultaten 2. Stufe.

### Potenzirung eines Productes.

46. $(ab)^c = (ab)(ab)\ldots$ ($c$mal) 38.
$= aaa\ldots$ ($c$mal)
$.\,bbb\ldots$ ($c$mal) 19. 18.
$(ab)^c = a^c \cdot b^c$. 38.

Ein Product wird mit einer Zahl potenzirt, indem man die Factoren einzeln potenzirt und die Potenzen multiplicirt.

**Potenzirung eines Quotienten.**

$(ab)^c = a^c \cdot b^c.$ 46. Ein Quotient wird mit einer Zahl potenzirt, indem man seine Glieder einzeln potenzirt und die Potenz des Dividend durch die andre dividirt. 47.

Sei $ab = x;\ a = \frac{x}{b}.$

$x^c = \left(\frac{x}{b}\right)^c \cdot b^c;$

$\frac{x^c}{b^c} = \left(\frac{x}{b}\right)^c$ 28. 29.

Betrachtet man in 46 die rechte, in 47 die linke Seite der Formel als Aufgabe, so erhält man die Regel: Potenzen mit gleichen Exponenten werden multiplicirt oder dividirt, indem man das Product oder den Quotienten ihrer Grundzahlen mit dem Exponenten potenzirt. 48.

Anm. Potenzen mit gleicher Grundzahl und gleichem Exponenten können also entweder nach 43 oder nach 48 multiplicirt und dividirt werden.

Die zweite Grundaufgabe $c^{ab}$ giebt als Lösung $(c^a)^b$, d. h. die Form der ersten Grundaufgabe 3. Stufe, kann daher übergangen werden.

## 37. C. Rechnung mit Resultaten 3. Stufe.

**Potenzirung einer Potenz.**

$(c^a)^b = c^a \cdot c^a \ldots\ (b\text{mal})$ 38. Eine Potenz wird mit einer Zahl potenzirt, indem man den Exponenten mit der Zahl multiplicirt. 49.

$= c^{a+a+\ldots\ (b\,\text{mal})}$ 43.

$(c^a)^b = c^{ab}.$ 17.

Betrachtet man die rechte Seite von 49 als Aufgabe, so ergiebt sich die Regel (als Lösung der vorigen Grundaufgabe): Eine Zahl wird mit einem Producte potenzirt, indem man sie mit den Factoren der Reihe nach potenzirt.

Aus

$$(c^a)^b = c^{ab}$$

folgt durch Vertauschung von $a$ und $b$

$$(c^b)^a = c^{ba}.$$

Da diese Vertauschung die rechte Seite ungeändert lässt, so sind auch die linken Seiten gleich, also

$$(c^a)^b = (c^b)^a.$$

In Worten: Die Reihenfolge, in der man mit mehreren 50.

Zahlen potenzirt, ist beliebig. — Oder: Eine Potenz wird potenzirt, indem man die Grundzahl potenzirt.

Anm. Die Formel 50 ergiebt sich auch, wenn man in der Ableitung von 49 statt 43 die Regel 48 anwendet. — In 49 wäre noch der Uebergang vom Product $ab$ zum Quotienten zu machen. Derselbe führt aber auf eine der nächsten Rechnungsart angehörige Formel, und ist daher dort nachzuholen (56). (Aufgaben: Hofmann 2. Zweiter Abschn. V. Dritter Abschn. — Bardey XI.)

Die zweite Grundaufgabe $b^{(c^a)}$ führt der Reihe nach zu den Ausdrücken:

$$b^{(c^a)} = b^{c.c\ldots\,(a\text{mal})} = \left((b^c)^c\right)^{\ldots\,a\text{mal}}$$

und da der letzte dieser Ausdrücke keine Vereinigung von $c$ und $b$ zu einem abgekürzten Ausdrucke gestattet (vergl. die Anm. zu 40), so ist diese Aufgabe durch keine andere Rechnung lösbar.

Anm. Setzt man $b^{(c^a)} = x$, bestimmt der Reihe nach $b$, $c$, $a$, und macht die Uebergänge von den Potenzen zu den entgegengesetzten Resultaten, so erhält man eine Reihe von gleichfalls ungelöst bleibenden Aufgaben, welche unten an passender Stelle werden erwähnt werden.

## 6. Die Radicirung.

**38.** *Vorbemerkung.* — Aus der Gleichung der Potenzirung $b^a = c$ gehen zwei neue Aufgaben hervor, nämlich: $b$ zu finden, wenn $a$ und $c$, und: $a$ zu finden, wenn $b$ und $c$ gegeben sind. Beide Aufgaben erfordern zu ihrer Lösung zwei verschiedene Rechnungsarten, da $a$ und $b$ nicht vertauschbar sind. Diejenige Vereinigung zweier gegebener Zahlen $a$ und $c$, welche die Aufgabe löst: Eine Zahl $b$ zu finden, welche, mit $a$ potenzirt, $c$ hervorbringt, heisst Radicirung.

**39.** *Erklärungen:* 1) Unter der $a^{\text{ten}}$ Wurzel aus einer Zahl $c$ versteht man diejenige Zahl $b$, welche man mit $a$ potenziren muss, um $c$ zu erhalten. — Wenn

$$b^a = c,$$

so ist die

Gleichung der Radicirung: $\sqrt[a]{c} = b$ ($a^{\text{te}}$ Wurzel aus $c$ gleich $b$).

2) $c$ heisst Radicand, $a$ Exponent.

Anm. Die Exponenten der Potenz und der Wurzel können nöthigenfalls durch die Namen Potenzexponent und Wurzelexponent unterschieden werden.

3) Die $a^{\text{te}}$ Wurzel aus $c$ bilden, heisst: $c$ mit $a$ radiciren.

Anm. $a$ heisst auch der Grad der Wurzel, daher $\sqrt[a]{c}$ eine Wurzel vom Grade $a$.

**40.** *Eigenschaft der Radicirung.* — Radicand und Exponent sind nicht vertauschbar.

**41.** *Weitere Bemerkungen zur Radicirung.* — 1) Da die Potenz aus lauter gleichen Factoren von der Grösse der Grundzahl besteht, so muss der Radicand ein Product von soviel gleichen Factoren sein, als der Exponent angiebt. Nur unter dieser Bedingung ist die Wurzel eine Zahl in dem oben festgestellten Sinne. — Die Radicirung ist demnach nur eine wiederholte Division, bei welcher die Grösse des Divisors bestimmt wird.

2) Wenn $a = c$, und $b = d$, so ist

$$\sqrt[b]{a} = \sqrt[d]{c},$$

mithin: Gleiches mit Gleichem radicirt giebt Gleiches.*) 51.

**42.** *Zusammenhang mit der Potenzirung.* — Aus jeder der beiden Gleichungen:

$$1)\ b^a = c;\quad 2)\ \sqrt[a]{c} = b$$

kann man den Werth des rechts stehenden Buchstabens in die andere einsetzen. Dies giebt die Formeln:

$$2)\text{ in }1)\ \left(\sqrt[a]{c}\right)^a = c;\quad 1)\text{ in }2)\ \sqrt[a]{b^a} = b.$$ 52.

In Worten: Eine Zahl bleibt ungeändert, wenn man sie mit einer anderen erst potenzirt und dann radicirt (oder umgekehrt).

Oder: Potenzirt man eine Wurzel mit ihrem Exponenten, so erhält man den Radicand. — Radicirt man eine Potenz mit ihrem Exponenten, so erhält man die Grundzahl. — Daher besteht die Radicirung in der Fortschaffung des Exponenten.

Anm. Vermöge der ersten Regel sind Potenzirung und Radicirung entgegengesetzte Rechnungsarten. — Der Wurzelexponent 2 pflegt beim Schreiben und Sprechen weggelassen zu werden.

**43.** *Rechnung mit Resultaten.* — Dieselbe ergiebt sich, wenn man in den Formeln der Potenzirung überall den Uebergang von der Potenz zur Wurzel macht.

## A. Rechnung mit Resultaten 1. Stufe.

Setzt man in jeder der Formeln 41 und 42 die beiden Potenzen gleich neuen Buchstaben, so wird dieselbe Grundzahl

*) S. jedoch Anm. zu Nr. 98.

doppelt bestimmt, während nur eine dieser Bestimmungen benutzt werden kann. Diese Formeln sind also für den Uebergang zur Radicirung nicht brauchbar. (Welche Formeln ergeben sich, wenn man in 41 und 42 nur mit einer der Potenzen den Uebergang zur Wurzel macht, und wozu können diese Formeln dienen?) Hiernach bleibt die Aufgabe, eine Summe oder eine Differenz zu radiciren, zunächst ungelöst.

## 44. B. Rechnung mit Resultaten 2. Stufe.

### Radicirung eines Productes.

53. $(ab)^c = a^c \cdot b^c$. 46.

Sei $a^c = x$; $a = \sqrt[c]{x}$

und $b^c = y$; $b = \sqrt[c]{y}$.

$$\left(\sqrt[c]{x} \cdot \sqrt[c]{y}\right)^c = xy;$$

$$\sqrt[c]{x} \cdot \sqrt[c]{y} = \sqrt[c]{xy}. \quad 51.\ 52.$$

Ein Product wird mit einer Zahl radicirt, indem man die Factoren einzeln radicirt und die Wurzeln multiplicirt.

### Radicirung eines Quotienten.

54. $\sqrt[c]{xy} = \sqrt[c]{x} \cdot \sqrt[c]{y}$. 53.

Sei $xy = z$; $x = \frac{z}{y}$.

$$\sqrt[c]{z} = \sqrt[c]{\frac{z}{y}} \cdot \sqrt[c]{y}.$$

$$\frac{\sqrt[c]{z}}{\sqrt[c]{y}} = \sqrt[c]{\frac{z}{y}}. \quad 28.\ 29.$$

Ein Quotient wird mit einer Zahl radicirt, indem man seine Glieder einzeln radicirt und die Wurzel des Dividend durch die andere dividirt.

Betrachtet man in 53 und 54 die linke Seite der Formel
55. als Aufgabe, so erhält man die Regel: Wurzeln mit gleichen Exponenten werden multiplicirt oder dividirt, indem man das Product oder den Quotienten ihrer Radicanden mit dem Exponenten radicirt.

Wie zwei beliebigen Wurzeln derselbe Exponent gegeben werden kann, wird später gezeigt. (S. Anm. zu 58.) (Aufgaben: Hofmann 2. Vierter Abschn. I. 1—8; V. 1, 4—7. Bardey XIII. 4.)

Anm. 54 ist auch aus 47 abzuleiten. — Setzt man in 46 nur $a^c = x$, $a = \sqrt[c]{x}$, und in 47 nur $x^c = y$, $x = \sqrt[c]{y}$, oder $b^c = z$, $b = \sqrt[c]{z}$, so erhält man die Formeln:

$$(b\sqrt[c]{x})^c = x \, . \, b^c; \quad \frac{y}{b^c} = \left(\frac{\sqrt[c]{y}}{b}\right)^c; \quad \frac{x^c}{z} = \left(\frac{x}{\sqrt[c]{z}}\right)^c,$$

und hieraus nach 51 und 52:

$$b \, . \sqrt[c]{x} = \sqrt[c]{x \, . \, b^c}; \quad \sqrt[c]{\frac{y}{b^c}} = \frac{\sqrt[c]{y}}{b}; \quad \sqrt[c]{\frac{x^c}{z}} = \frac{x}{\sqrt[c]{z}}.$$

Diese Formeln zeigen, wie eine Zahl durch Multiplication oder Division mit einer Potenz oder Wurzel so vereinigt werden kann, dass das Resultat wieder eine Potenz oder Wurzel ist. — Umgekehrt zeigt die erste Formel der zweiten Reihe, wie der Radicand von einem Potenzfactor, die zweite, wie er von einem Divisor befreit werden kann, da der Quotient unter der Wurzel (nach Anm. zu 33) stets so erweitert werden kann, dass sein Divisor eine Potenz vom Grade des Wurzelexponenten wird. — Die dritte Formel giebt durch Anwendung dieses Verfahrens:

$$\frac{x}{\sqrt[c]{z}} = \sqrt[c]{\frac{x^c}{z}} = \sqrt[c]{\frac{x^c \, . \, z^{c-1}}{z^c}} = \frac{x}{z}\sqrt[c]{z^{c-1}},$$

und zeigt hiernach, wie eine Wurzel aus einem Divisor weggeschafft werden kann. Sei endlich gegeben $\dfrac{x}{\sqrt[n]{y} - \sqrt[n]{z}}$, so zeigt 45a, wenn man darin $a = \sqrt[n]{y}$, $b = \sqrt[n]{z}$, also $a^n = y$, $b^n = z$ setzt, dass

$$[(\sqrt[n]{y})^{n-1} + \ldots + (\sqrt[n]{z})^{n-1}](\sqrt[n]{y} - \sqrt[n]{z}) = y - z$$

ist. Mithin muss man den gegebenen Quotienten mit der ersten Klammer erweitern, um seinem Divisor die Form $y - z$ zu geben, d. h. die Wurzeln daraus zu entfernen. (Aufgaben: Hofmann 2. Vierter Abschn. IV. 1—53; VI. — Bardey XIII. 2. 3. 5.)

## 45. C. Rechnung mit Resultaten 3. Stufe.

### Radicirung einer Potenz.

$(c^a)^b = c^{ab}$ 49.

Sei $ab = x$; $a = \dfrac{x}{b}$

$\left(c^{\frac{x}{b}}\right)^b = c^x$

$c^{\frac{x}{b}} = \sqrt[b]{c^x}$. 51. 52.

Eine Potenz wird mit einer Zahl radicirt, indem man den Exponenten durch die Zahl dividirt. 56.

Betrachtet man die linke Seite von 56 als Aufgabe, so ergiebt sich die Regel: Eine Zahl wird mit einem Quotienten potenzirt, indem man sie mit dem Dividend potenzirt, und mit dem Divisor radicirt.

Anm. Eine Potenz, deren Exponent ein Quotient ist, heisst Bruchpotenz, und man kann die letzte Regel in den Worten aussprechen: Eine Bruchpotenz ist gleich einer Wurzel vom Grade des Divisors aus einer Potenz vom Grade des Dividend. — (Aufgaben: Hofmann 2. Fünfter Abschn. III. — Bardey XVI.)

In 49 kann der Uebergang von Product zu Quotient auch dadurch geschehen, dass man $ab = x$, $b = \frac{x}{a}$ setzt. Dies giebt

56a,b. $$(c^a)^{\frac{x}{a}} = c^x, \text{ oder: } c^a = \sqrt[\frac{x}{a}]{c^x}.$$

Diese Formeln, welche nur zeigen, wie durch Einführung eines neuen Buchstabens eine Potenz in eine andere Potenz oder eine Wurzel verwandelt werden kann, nennen wir Uebergangsformeln, weil sie den Uebergang zu anderen vermitteln, durch welche Aufgaben gelöst werden. — (Aufgaben: Hofmann 2. Vierter Abschn. I. 9—16, 23—26, 41—83; IV. 54—56, 61—83; V. 1—23, 118—192. — Bardey XIII. 6—21.)

**Potenzirung einer Wurzel.**

57. $$c^a = \sqrt[\frac{x}{a}]{c^x}.$$

Sei $c^x = y$; $c = \sqrt[x]{y}$

$$\left(\sqrt[x]{y}\right)^a = \sqrt[\frac{x}{a}]{y}.$$

56b. Eine Wurzel wird mit einer Zahl potenzirt, indem man den Exponenten durch die Zahl dividirt.

Betrachtet man die rechte Seite von 57 als Aufgabe, so ergiebt sich die Regel: Eine Zahl wird mit einem Quotienten radicirt, indem man sie mit dem Dividend radicirt, und mit dem Divisor potenzirt.

Macht man in 56a den Uebergang von der Potenz zur Wurzel, indem man $c^a = y$, $c = \sqrt[a]{y}$ setzt, so findet sich

$$y^{\frac{x}{a}} = \left(\sqrt[a]{y}\right)^x.$$

(In Worten?) Nun ist nach 56

$$y^{\frac{x}{a}} = \sqrt[a]{y^x},$$

also:
$$\left(\sqrt[a]{y}\right)^x = \sqrt[a]{y^x}.$$

In Worten: Die Reihenfolge, in der man mit mehreren Zahlen potenzirt und radicirt, ist beliebig. — Oder: Eine Wurzel wird potenzirt, indem man den Radicand potenzirt. Eine Potenz wird radicirt, indem man die Grundzahl radicirt. — Es ist also: 58.
$$c^{\frac{x}{b}} = \sqrt[b]{c^x} = \left(\sqrt[b]{c}\right)^x = \sqrt[\frac{b}{x}]{c}.$$

Macht man in 49 den Uebergang von der Potenz zur Wurzel, indem man $c^a = x$, $c = \sqrt[a]{x}$ setzt, so erhält man die Uebergangsformeln:
$$x^b = \left(\sqrt[a]{x}\right)^{ab}; \text{ oder: } \sqrt[ab]{x^b} = \sqrt[a]{x}.$$ 58a, b.

Zwei andere Formeln gehen auf dieselbe Weise aus 56 hervor, nämlich, wenn man $c^x = y$, $c = \sqrt[x]{y}$ setzt:
$$\left(\sqrt[x]{y}\right)^{\frac{x}{b}} = \sqrt[b]{y}; \quad \sqrt[x]{y} = \sqrt[\frac{x}{b}]{\sqrt[b]{y}}.$$ 58c, d.

(Aufgaben: Hofmann 2. Vierter Abschn. VII.)

Anm. Die 4 Formeln 56a, 58a, b, d zeigen, wie eine Potenz und eine Wurzel auf je doppelte Weise in eine andere Potenz oder Wurzel verwandelt werden kann. Insbesondere folgt aus 58a (56a): Eine Potenz ändert sich nicht, wenn man die Grundzahl mit einer Zahl radicirt (potenzirt) und den Exponenten mit derselben Zahl multiplicirt (dividirt). Und aus 58b (58d): Eine Wurzel ändert sich nicht, wenn man den Radicand mit einer Zahl potenzirt (radicirt) und den Exponenten mit derselben Zahl multiplicirt (dividirt). — Oder: Eine Wurzel aus einer Potenz bleibt ungeändert, wenn man die beiden Exponenten mit derselben Zahl multiplicirt oder dividirt. (Folgt aus 56 in Verbindung mit Anm. zu 33.)

Vermöge dieser Regeln kann man Potenzen und Wurzeln mit verschiedenen Exponenten auf gleiche Exponenten bringen. So ist:

$$c^a \cdot d^b = \left(\sqrt[b]{c}\right)^{ab} \cdot \left(\sqrt[a]{d}\right)^{ab} = \left(\sqrt[b]{c} \cdot \sqrt[a]{d}\right)^{ab}.$$ 48.

$$\frac{c^a}{d^b} = \frac{\left(\sqrt[b]{c}\right)^{ab}}{\left(\sqrt[a]{d}\right)^{ab}} = \left(\frac{\sqrt[b]{c}}{\sqrt[a]{d}}\right)^{ab}.$$ 48.

$$\sqrt[a]{c} \cdot \sqrt[b]{d} = \sqrt[ab]{c^b} \cdot \sqrt[ab]{d^a} = \sqrt[ab]{c^b \cdot d^a}.$$ 55.

$$\frac{\sqrt[a]{c}}{\sqrt[b]{d}} = \frac{\sqrt[ab]{c^b}}{\sqrt[ab]{d^a}} = \sqrt[ab]{\frac{c^b}{d^a}}.$$ 55.

Hiermit ist die in 48 und 55 nur bedingungsweise bewirkte Multiplication und Division von Potenzen und Wurzeln allgemein ausgeführt. (Directe Ableitung der letzten beiden Formeln aus den ersten beiden!) (Aufgaben: Hofmann 2. Vierter Abschn. V. 24—80. — Bardey XIII. 6. 22—40.)

**Radicirung einer Wurzel.**

59. $\sqrt[ab]{x^b} = \sqrt[a]{x}.$

Sei $x^b = y$, $x = \sqrt[b]{y}$.

$\sqrt[ab]{y} = \sqrt[a]{\sqrt[b]{y}}.$

58b. Eine Wurzel wird mit einer Zahl radicirt, indem man den Exponenten mit der Zahl multiplicirt.

Betrachtet man in 59 die linke Seite als Aufgabe, so ergiebt sich die Regel: Eine Zahl wird mit einem Producte radicirt, indem man sie mit den Factoren der Reihe nach radicirt.

Aus

$$\sqrt[ab]{y} = \sqrt[a]{\sqrt[b]{y}}$$

folgt durch Vertauschung von $a$ und $b$

$$\sqrt[ba]{y} = \sqrt[b]{\sqrt[a]{y}}.$$

Da diese Vertauschung die linke Seite ungeändert lässt, so sind auch die rechten Seiten gleich, also:

$$\sqrt[a]{\sqrt[b]{y}} = \sqrt[b]{\sqrt[a]{y}}.$$

60. In Worten: Die Reihenfolge, in der man mit mehreren Zahlen radicirt, ist beliebig. — Oder: Eine Wurzel wird radicirt, indem man den Radicand radicirt. — (Aufgaben: Hofmann 2. Vierter Abschn. I. 17—22; IV. 57—60; V. 81—95, 107—117. — Bardey XIII. 7.)

Anm. Hiernach gestatten die Aufgaben (55) und (66) je zwei, (56) und (65) je drei verschiedene Lösungen. Ungelöst bleiben die aus $b^{(c^a)} = x$ hervorgehenden Aufgaben: $\sqrt[c^a]{x} = b$, sowie, wenn man $c^a = \sqrt[z]{y}$ setzt: $b^{\sqrt[z]{y}} = x$, $\sqrt[\sqrt[z]{y}]{x} = b$.

**46.** *Erweiterungen.* — 1) Setzt man in den Formeln 46, 47, 53, 54 $c = de$ und $c = \frac{d}{e}$, so erhält man die Potenzirung

und Radicirung zwischen Producten und Quotienten. Von den 8 sich ergebenden Formeln lautet die erste:

$$(ab)^{de} = a^{de} \cdot b^{de}.$$

2) Zahlreiche andere Formeln ergeben sich, wenn man in den Formeln 49, 56, 57, 59 die einzelnen Buchstaben durch Producte, Quotienten, Potenzen oder Wurzeln ersetzt. Man erhält Formeln der Potenzirung und Radicirung zwischen Producten und Quotienten einerseits, und Potenzen und Wurzeln andrerseits, sowie zwischen Potenzen und Wurzeln. Links steht allemal eine Verbindung zweier Resultate, rechts die successive Ausführung dreier Rechnungen an vier Zahlen. Die oben erwähnten Uebergangsformeln ergeben sich aus diesen Formeln durch Gleichsetzung zweier Buchstaben.

## 7. Die Logarithmirung.

**47.** *Vorbemerkung.* — Die zweite der aus der Gleichung der Potenzirung, $b^a = c$, hervorgehenden Aufgaben war: $a$ zu finden, wenn $b$ und $c$ gegeben sind. Diejenige Vereinigung von $b$ und $c$, deren Resultat $a$ ist, heisst Logarithmirung.

**48.** *Erklärungen.* — 1) Unter dem Logarithmus einer Zahl $c$ nach $b$ versteht man diejenige Zahl $a$, mit welcher man $b$ potenziren muss, um $c$ zu erhalten. — Wenn

$$b^a = c,$$

so ist die

Gleichung d. Logarithmirung: ${}^{b}l\,c = a$ (Logarithm. v. $c$ nach $b$ gleich $a$).

2) $c$ heisst Numerus, $b$ Grundzahl.

Anm. Die Grundzahlen der Potenz und des Logarithmus können nöthigenfalls durch die Namen Potenzgrundzahl und Logarithmengrundzahl unterschieden werden.

3) Den Logarithmus von $c$ nach $b$ bilden, heisst: $c$ nach $b$ logarithmiren.

**49.** *Eigenschaft der Logarithmirung.* — Numerus und Grundzahl sind nicht vertauschbar.

**50.** *Weitere Bemerkungen zur Logarithmirung.* — 1) Da die Potenz aus lauter gleichen Factoren von der Grösse der Grundzahl besteht, so muss der Numerus ein Product aus lauter gleichen Factoren von der Grösse der Grundzahl sein. Nur unter dieser Bedingung ist der Logarithmus eine Zahl in dem oben festgestellten Sinne. — Die

Logarithmirung ist daher eine wiederholte Division, bei welcher die Anzahl der Divisoren bestimmt wird.

2) Wenn $a = c$ und $b = d$, so ist

$${}^{b}\mathfrak{l}\,a = {}^{d}\mathfrak{l}\,c,$$

mithin: Gleiches mit Gleichem logarithmirt giebt
61. Gleiches.

**51.** *Zusammenhang mit der Potenzirung.* — Aus jeder der beiden Gleichungen:

$$1)\ b^a = c;\quad 2)\ {}^{b}\mathfrak{l}\,c = a$$

kann man den Werth des rechts stehenden Buchstabens in die andere einsetzen. Dies giebt die Formeln:

$$2)\text{ in }1)\ b^{{}^{b}\mathfrak{l}c} = c;\quad 1)\text{ in }2)\ {}^{b}\mathfrak{l}(b^a) = a.$$

62. In Worten: Eine Zahl bleibt ungeändert, wenn man sie erst nach einer andern logarithmirt, und die andre mit dem Resultate potenzirt (oder umgekehrt).

Oder: Potenzirt man mit einem Logarithmus seine Grundzahl, so erhält man den Numerus. — Logarithmirt man eine Potenz nach ihrer Grundzahl, so erhält man den Exponenten. — Daher besteht die Logarithmirung in der Fortschaffung der Grundzahl.

Anm. Vermöge der ersten Regel sind Potenzirung und Logarithmirung entgegengesetzte Rechnungsarten.

**52.** *Rechnung mit Resultaten.* — Dieselbe ergiebt sich, wenn man in den Formeln der Potenzirung und Radicirung überall den Uebergang von der Potenz zum Logarithmus macht.

## A. Rechnung mit Resultaten 1. Stufe.

Macht man in den Formeln 41 und 42, welche die Potenzirung mit einer Summe und einer Differenz ausdrücken, den Uebergang von der Potenz zum Logarithmus, so geht aus diesen Formeln nicht die Logarithmirung einer Summe und Differenz hervor, sondern die eines Productes und Quotienten, also die Rechnung mit Resultaten 2. Stufe. — Und ebensowenig, wie die Formeln 41 und 42 den Uebergang zur Wurzel, gestatten 46 und 47 den Uebergang zum Logarithmus (und zwar aus demselben Grunde). Demnach sind von den Formeln der Potenzirung hier nur diejenigen der 1. und 3. Stufe zu benutzen. (Vgl. den entsprechenden Abschnitt der Radicirung.)

## 53. B. Rechnung mit Resultaten 2. Stufe.

**Logarithmirung eines Productes.**

$$c^{a+b} = c^a \,.\, c^b. \qquad 41.$$

Sei $c^a = x$; $a = {}^{c}l\,x$

und $c^b = y$; $b = {}^{c}l\,y$.

$$c^{{}^{c}l\,x + {}^{c}l\,y} = xy$$

$${}^{c}l\,x + {}^{c}l\,y = {}^{c}l(xy). \qquad 61.\ 62.$$

Ein Product wird nach einer Zahl logarithmirt, indem man die Factoren einzeln logarithmirt und die Logarithmen addirt. 63.

**Logarithmirung eines Quotienten.**

$${}^{c}l(xy) = {}^{c}l\,x + {}^{c}l\,y. \qquad 63.$$

Sei $xy = z$; $x = \frac{z}{y}$.

$${}^{c}l\,z = {}^{c}l\frac{z}{y} + {}^{c}l\,y.$$

$${}^{c}l\,z - {}^{c}l\,y = {}^{c}l\frac{z}{y}. \qquad 9.\ 10.$$

Ein Quotient wird nach einer Zahl logarithmirt, indem man seine Glieder einzeln logarithmirt, und den Logarithmus des Divisors von dem andern subtrahirt. 64.

Betrachtet man in 63 und 64 die linke Seite der Formel als Aufgabe, so erhält man die Regel: Logarithmen mit gleicher Grundzahl werden addirt oder subtrahirt, indem man das Product oder den Quotienten ihrer Numeri nach der Grundzahl logarithmirt. 65.

Wie zwei beliebigen Logarithmen dieselbe Grundzahl gegeben werden kann, wird später gezeigt. (S. Anm. zu 67.)

Anm. 64 ist auch aus 42 abzuleiten. — Setzt man in 41 nur $c^a = x$, $a = {}^{c}l\,x$, und in 42 nur $c^x = y$, $x = {}^{c}l\,y$, oder $c^b = z$, $b = {}^{c}l\,z$, so erhält man die Formeln:

$$c^{b + {}^{c}l\,x} = x \,.\, c^b; \quad \frac{y}{c^b} = c^{{}^{c}l\,y - b}; \quad \frac{c^x}{z} = c^{x - {}^{c}l\,z},$$

und hieraus nach 61 und 62:

$$b + {}^{c}l\,x = {}^{c}l(x \,.\, c^b); \quad {}^{c}l\frac{y}{c^b} = {}^{c}l\,y - b; \quad {}^{c}l\frac{c^x}{z} = x - {}^{c}l\,z.$$

Diese Formeln zeigen, wie eine Zahl durch Multiplication und Division mit einer Potenz, oder durch Addition und Subtraction mit einem Logarithmus so vereinigt werden kann, dass das Resultat wieder eine Potenz oder ein Logarithmus ist.

## 54. C. Rechnung mit Resultaten 3. Stufe.

### Logarithmirung einer Potenz.

66. $(c^a)^b = c^{ab}$. 49.

Sei $c^a = x$; $a = {}^c l x$.

$x^b = c^{b \cdot {}^c l x}$.

${}^c l(x^b) = b \cdot {}^c l x$. 61. 62.

Eine Potenz wird mit einer Zahl logarithmirt, indem man den Exponenten mit dem Logarithmus der Grundzahl multiplicirt.

Betrachtet man die rechte Seite von 66 als Aufgabe, so erhält man die Regel: Eine Zahl wird mit einem Logarithmus multiplicirt, indem man den Numerus mit ihr potenzirt.

### Logarithmirung einer Wurzel.

67. ${}^c l(x^b) = b \cdot {}^c l x$. 66.

Sei $x^b = y$; $x = \sqrt[b]{y}$.

${}^c l y = b \cdot {}^c l \sqrt[b]{y}$.

$\frac{{}^c l y}{b} = {}^c l \sqrt[b]{y}$. 28.

Eine Wurzel wird mit einer Zahl logarithmirt, indem man den Logarithmus des Radicand durch den Exponenten dividirt.

Anm. 67 kann auch aus 56 abgeleitet werden. In der Ableitung von 66 kann die dritte Reihe (nach 49) geschrieben werden:

$$x^b = (c^b)^{{}^c l x}, \text{ oder: } c^b = \sqrt[{}^c l x]{x^b}, \text{ oder: } {}^c l x = {}^{c^b} l(x^b).$$

Die letzte dieser Formeln giebt die Regel: Ein Logarithmus bleibt ungeändert, wenn man Numerus und Grundzahl mit derselben Zahl potenzirt. (Vgl. die Anm. zu 58.) Vermöge dieser Regel kann man Logarithmen mit verschiedenen Grundzahlen auf gleiche Grundzahlen bringen und die oben (65) bedingungsweise bewirkte Addition und Subtraction von Logarithmen allgemein ausführen. — In den drei obigen Formeln kann man von jeder der beiden Potenzen den Uebergang zur Wurzel oder zum Logarithmus machen, und dadurch 24 neue Formeln ableiten. (Vgl. Anm. zu 33.)

In der Ableitung von 67 kann die dritte Reihe (nach 56 und 58) geschrieben werden:

$$\left(\sqrt[b]{c}\right)^{{}^c l y} = \sqrt[b]{y}, \text{ oder: } \sqrt[b]{c} = \sqrt[{}^c l y]{\sqrt[b]{y}}, \text{ oder: } {}^c l y = {}^{\sqrt[b]{c}} l \sqrt[b]{y}.$$

Die letzte dieser Formeln giebt die Regel: Ein Logarithmus bleibt ungeändert, wenn man Numerus und Grundzahl mit derselben Zahl radicirt. (Vgl. Anm. zu 37.)

Zu den Formelpaaren 56 a, b; 58 a, b; 58 c, d tritt jedesmal eine dritte Formel, wenn man aus der ersten den Exponenten bestimmt. Dann enthalten die 3 ersten Formeln je 2, die drei folgenden je 1, die drei letzten keine Potenz. Von jeder der vorhandenen Potenzen kann man dann wieder den Uebergang zu Wurzel oder Logarithmus machen und dadurch neue Formeln erhalten.

Macht man in 66 den Uebergang von der Potenz zum Logarithmus, indem man $x^b = y$, $b = {}^{x}\mathit{l}_y$ setzt, so findet sich:

$${}^{c}\mathit{l}_y = {}^{x}\mathit{l}_y \,.\, {}^{c}\mathit{l}_x, \text{ oder: } \frac{{}^{c}\mathit{l}_y}{{}^{x}\mathit{l}_y} = {}^{c}\mathit{l}_x, \text{ oder: } \frac{{}^{c}\mathit{l}_y}{{}^{c}\mathit{l}_x} = {}^{x}\mathit{l}_y.$$

Ungelöst bleiben die aus $b^{(c^a)} = x$ hervorgehenden Aufgaben $\sqrt[a]{{}^{b}\mathit{l}_x} = c$, ${}^{c}\mathit{l}({}^{b}\mathit{l}_x) = a$, sowie, wenn man $c^a = \sqrt[z]{y}$ setzt: $\left({}^{b}\mathit{l}_x\right)^z = y$, ${}^{({}^{b}\mathit{l}_x)}\mathit{l}_y = z$,

und endlich, wenn man $c^a = {}^{z}\mathit{l}_y$ setzt: $b^{{}^{z}\mathit{l}_y} = x$, $\sqrt[{}^{z}\mathit{l}_y]{x} = b$.

Auf Erweiterungen der aufgestellten Formeln, die darin bestehen würden, dass man die einzeln stehenden Buchstaben [z. B. $b$ in $(c^a)^b$] durch Resultate ersetzte, mag hier nur aufmerksam gemacht werden.

Aufgaben. Ein gutes Uebungsmaterial bietet die Aufstellung und Umformung der in dieser Anmerkung angedeuteten Formeln. (Ferner Hofmann. 3. Elfter Abschn. I. — Bardey XVIII. B.)

**55.** *Rückblick.* — Wir haben im Vorstehenden 7 Arten der Vereinigung zweier Zahlen kennen gelernt, die wir einerseits in drei Stufen, (wie schon geschehen) andrerseits in directe und indirecte Rechnungen eintheilen können, indem die letzteren aus den ersteren durch Stellung neuer Aufgaben hervorgehen und in einem Gegensatze zu denselben stehen. Ausserdem sahen wir, wie sich auch mehrere Zahlen zu einem Resultate vereinigen lassen, wobei jedoch nur in der Addition und Multiplication eine Vertauschbarkeit der zu vereinigenden Zahlen bestand. — Indess sind die zu den indirecten Rechnungen führenden Aufgaben nur unvollständig gelöst worden, indem die durch solche Rechnungen zu vereinigenden Zahlen gewisse Bedingungen erfüllen mussten; und auch sonst sind einige Aufgaben, welche die Rechnung mit Resultaten betrafen, ungelöst geblieben. Die ersten dieser Lücken auszufüllen, wird Aufgabe des nächsten Abschnittes sein.

## B. Die relativen Zahlen.

**56.** *Uebersicht.* — Durch die directen Rechnungen (Addition, Multiplication, Potenzirung) konnten bisher zwei beliebige Zahlen vereinigt werden, durch die indirecten (Subtraction,

Division, Radicirung, Logarithmirung) jedoch nur solche, welche bestimmten Bedingungen genügten. So musste in der Subtraction der Minuend grösser als der Subtrahend sein, in der Division der Divisor ein Factor des Dividend, in der Radicirung und Logarithmirung Radicand, resp. Numerus ein Product aus gleichen Factoren. Diese Bedingungen aber laufen der allgemeinen Bedeutung eines Buchstabens zuwider, welcher ja jede beliebige Zahl soll vorstellen können. — Um daher auch für die indirecten Rechnungen die allgemeine Bedeutung der Buchstaben aufrecht zu erhalten, wird es nöthig sein, zu untersuchen, was für Resultate diese Rechnungen ergeben, wenn jene Bedingungen aufgehoben werden. Diese Resultate werden freilich nicht mehr Zahlen in dem früher festgestellten Sinne sein, die eine Vielheit von Einheiten ausdrücken. Es wird daher der Begriff „Zahl" in jedem dieser Fälle eine Erweiterung erfahren. Diese neuen Zahlen nennen wir im Gegensatze zu den früheren (absoluten) „relative". Die Rechnungen mit ihnen erfolgen nach besonderen Gesetzen.*)

## *a. Erweiterung des Zahlbegriffes durch Subtraction.*

Wenn $c - a = b$ ist, und nicht $c > a$, so kann nur sein $c = a$, oder $c < a$.

### 1. $c = a$. Die Null.

**57.** *Vorbemerkungen.* — 1) Wenn $a - a = b$, so ist $a + b = a$; d. h.: Eine Differenz, in welcher Minuend und Subtrahend gleich sind, lässt die Zahl, zu der man sie addirt, ungeändert.

2) Da $a + c = c + a$, so ist, wenn man beiderseits $a$ und $c$ subtrahirt,

$$a - a = c - c,$$

d. h.: Eine solche Differenz bleibt ungeändert, wenn der gemeinsame Werth von Minuend und Subtrahend sich ändert. — Man kann also dem Werthe dieser Differenz ein für allemal einen bestimmten Namen geben, und ihn durch ein bestimmtes Zeichen ausdrücken.

**58.** *Erklärung.* — Eine Differenz, in welcher Minuend und Subtrahend gleich sind, wird Null genannt, und durch 0 bezeichnet.

$$a - a = 0.$$

---

*) Die allgemeinen Eigenschaften der 7 Rechnungsarten bleiben auch für diese neuen Zahlen in Geltung, wie sich zeigt, wenn man diese Zahlen in die Formeln, welche jene Eigenschaften ausdrücken, einsetzt.

*Bedeutung der Null.* — Null soll eine Zahl sein, die, zu einer anderen addirt, dieselbe ungeändert lässt. Da aber eine Zahl nur dann ungeändert bleiben kann, wenn man Nichts hinzuaddirt, so ist „Null“ der mathematische Ausdruck für den Begriff „Nichts“.

**59.** *Rechnungen mit der Null.* — Dieselben ergeben sich, wenn man in allen Formeln, welche von der Rechnung mit einer Differenz handeln, Minuend und Subtrahend gleich setzt. So folgt:

Aus 11: $a + (e - e) = (a + e) - e$
od.: $a + 0 = a$. 10.
Aus 15: $a - (e - e) = (a - e) + e$
od.: $a - 0 = a$. 10.

Null, zu einer Zahl addirt, oder von einer Zahl subtrahirt, ändert deren Werth nicht. 68.

Anm. Die Null kann daher als Anfangsglied dienen, an welches jede Summe sich anknüpfen lässt.

Aus 23: $(b - b)e = be - be$
od.: $0 . e = 0$.

Aus 31: $\frac{y - y}{e} = \frac{y}{e} - \frac{y}{e}$

od.: $\frac{0}{e} = 0$.

Null, mit einer Zahl multiplicirt, oder durch eine Zahl dividirt giebt Null. 69.

Anm. Potenzirung mit Null (aus 42) s. unter 78, Division durch Null unter 149. Da $a . 0 = b . 0 = 0$ ist, so darf man die Regel 28 nie in der Weise anwenden, dass man durch eine Zahl dividirt, die Null ist oder sein kann. Aus $a . c = b . c$ folgt $ac - bc = 0$, oder $c(a - b) = 0$. Ist nun $c$ gleich Null, so ist diese Formel richtig, auch ohne dass $a = b$ ist. Dagegen würde man durch Anwendung von 28 nur $a = b$ finden.

Aus 44: $(b - b)^2 = b^2 - 2b^2 + b^2$
od.: $0^2 = 0$, desgl.
$0^n = 0$; $\sqrt[n]{0} = 0$.

Null, mit einer Zahl potenzirt oder radicirt giebt Null. 70.

Aus 69 folgt durch Anwendung des Begriffs der Division $\frac{0}{0} = e$; d. h.: $\frac{0}{0}$ kann jede Zahl bedeuten. Dieser Ausdruck hat also die Bedeutung eines Buchstabens, und kann daher in einer Bestimmungsgleichung (vgl. Nr. 2) einen einzigen bestimmten Werth haben. Die Ermittelung dieses Werthes ist eine Aufgabe der höheren Mathematik. 71.

Aus 70 folgt durch Anwendung des Begriffs der Logarithmirung ${}^{0}l\,0 = n$, d. h.: ${}^{0}l\,0$ kann jede Zahl bedeuten. 71

Anm. Dass $0 . c = 0$, d. h. nullmal $c = 0$ ist, geht auch aus dem Begriff der Null hervor. Denn wenn man $c$ nullmal, d. h. gar nicht, als Summand zu dem Anfangsgliede 0 setzt, so erhält man eben Null. (S. Anm. z. 68.)

## 2. $c < a$. Die negativen Zahlen.

**60.** *Vorbemerkungen.* — 1) Wenn in der Gleichung $c - a = b$ die Zahl $c < a$ sein soll, so kann man $a = c + d$ setzen, und erhält: $c - (c + d) = b$, oder (13) $c - c - d = b$, oder $0 - d = b$; d. h.: Jede Differenz, in welcher der Minuend kleiner ist als der Subtrahend, kann in eine andre verwandelt werden, deren Minuend Null ist.

2) Aus $0 - d = b$ folgt $b + d = 0$; d. h.: Eine solche Differenz kann stets mit einer bestimmten Zahl zur Summe Null vereinigt werden.

**61.** *Erklärungen.* — 1) Eine Differenz, deren Minuend Null ist, wird negative Zahl genannt, und mit Weglassung der Null geschrieben.

$$0 - a = (-a).$$

Anm. Jeder absoluten Zahl entspricht hiernach eine negative, sodass durch Einführung der negativen Zahlen das Gebiet der Zahlen verdoppelt wird.

2) Im Gegensatze zu den negativen Zahlen heissen die absoluten Zahlen positive Zahlen, und werden in dieser Eigenschaft als Summen geschrieben, deren erster Summand Null ist (68) und weggelassen wird.

$$a = 0 + a = (+a).$$

Anm. Eine positive Zahl ist also eine zu Null addirte, eine negative Zahl eine von Null subtrahirte absolute Zahl. Wegen dieser Beziehung zur Null heissen positive und negative Zahlen „relative Zahlen". — Die Grenze zwischen positiven und negativen Zahlen bildet die Null. Da $0 + 0 = 0$, und $0 - 0 = 0$, so ist $+0 = 0$ und $-0 = 0$; d. h.: Null kann sowohl für positiv wie für negativ angesehen werden. — Die Reihe der natürlichen Zahlen kann nicht nur von irgend einer Zahl an durch wiederholte Addition der Einheit beliebig fortgesetzt werden, sondern auch durch wiederholte Subtraction derselben, wodurch man schliesslich zur Null und den negativen Zahlen kommt. Z. B. lautet diese Reihe, von 3 anfangend: 3, 2, 1, 0, —1, —2, ...

3) Als Bestandtheile der positiven und negativen Zahlen heissen die Zeichen + und — Vorzeichen. — Zahlen mit gleichen Vorzeichen heissen gleichstimmig, zwei Zahlen mit verschiedenen Vorzeichen: entgegengesetzt.

*Bedeutung der negativen Zahlen.* — Eine negative Zahl soll, zu der entsprechenden positiven addirt, die Summe Null

geben. Daher werden zwei durch Zahlen darstellbare Handlungen oder deren Resultate, die sich gegenseitig aufheben, d. h. das Resultat Null geben, diejenigen Begriffe sein, die ihren mathematischen Ausdruck in der negativen Zahl $-a$ und der positiven $+a$ finden.

Anm. Z. B.: Einnahme und Ausgabe, Vermögen und Schulden, Bewegung nach vorwärts und nach rückwärts (Schritte, Thermometerscala).

**62.** *Rechnungen mit den negativen Zahlen.* — Dieselben ergeben sich, wenn man in allen Formeln, welche von der Rechnung mit einer Differenz handeln, den Minuend gleich Null setzt. So folgt:

Aus 11: $a+(0-c)=(a+0)-c$
od.: $a+(-c)=a-c$. 68.
Aus 15: $a-(0-c)=(a-0)+c$
od.: $a-(-c)=a+c$. 68.

Eine negative Zahl wird addirt oder subtrahirt, indem man die entsprechende positive (absolute) subtrahirt oder addirt. 72.

Anm. Hiernach kann jede Differenz als Summe einer positiven und einer negativen Zahl dargestellt werden. Ferner sieht man, dass eine positive oder negative Zahl addirt wird, indem man sie mit ihrem Vorzeichen, dagegen subtrahirt wird, indem man sie mit entgegengesetztem Vorzeichen hinzuschreibt. Man kann also einen Ausdruck wie $a-b+c$ entweder als Resultat der Vereinigung der absoluten Zahlen $a$, $b$, $c$ ansehen, wobei $+$ und $-$ Rechnungszeichen sind, oder als Summe der positiven und negativen Zahlen $+a$, $-b$, $+c$, wobei die Rechnungszeichen fehlen.

Setzt man in den Formeln 7, 11, 13, 15 $a=0$, so folgt: 73.

$$(+b)+c=+(b+c)$$
$$(+x)-c=+(x-c)$$
$$(-b)-c=-(b+c)$$
$$(-x)+c=-(x-c)$$
oder:
$$+b+c=+(b+c)$$
$$+x-c=+(x-c)$$
$$-b-c=-(b+c)$$
$$-x+c=-(x-c).$$

Zwei gleichstimmige Zahlen vereinigt man (zu einer relativen Zahl), indem man der Summe der absoluten Zahlen ihr gemeinsames Vorzeichen giebt, zwei entgegengesetzte, indem man der Differenz der absoluten Zahlen das Vorzeichen der grösseren giebt.

Anm. Diese relativen Zahlen besitzen also die Eigenschaft der speciellen, dass man mehrere von ihnen zu einer einzigen Zahl von derselben Art vereinigen kann. — Soll man eine grössere Anzahl positiver und negativer Zahlen vereinigen, so vereinigt man erst alle positiven, dann alle negativen nach dem ersten, und schliesslich die beiden Resultate nach dem zweiten Theile der Regel 73. Aus der letzten Formel folgt noch, dass eine Differenz durch Vertauschung von Minuend und Subtrahend entgegengesetztes Vorzeichen erhält.

74. Aus 23: $0 . c - bc = (0 - b)c$
oder: $-bc = (-b)c.$

Aus 31: $\frac{0}{c} - \frac{y}{c} = \frac{0 - y}{c}$

oder: $-\frac{y}{c} = \frac{-y}{c}.$

Eine negative Zahl wird multiplicirt oder dividirt, indem man die absoluten Zahlen multiplicirt oder dividirt, und dem Resultat das negative Zeichen giebt.

Setzt man in den Formeln 25 $a$, $d$, $x$ gleich Null, so folgt:

75. 1) $(+b)(+e) = +be;\quad +b = \frac{+be}{+e};$

2) $(+b)(-e) = -be;\quad +b = \frac{-be}{-e};$

3) $(-b)(+e) = -be;\quad -b = \frac{-be}{+e};$

4) $(-b)(-e) = +be;\quad -b = \frac{+be}{-e}.$

Product und Quotient von zwei gleichstimmigen Zahlen sind positiv, von zwei entgegengesetzten negativ.

Hieraus folgt: Bildet man der Reihe nach die Potenzen einer negativen Zahl, so sind dieselben abwechselnd positiv und negativ. Nennt man die durch 2 theilbaren Exponenten **gerade**, die übrigen **ungerade**, und die Potenzen ebenfalls gerade oder ungerade, je nach der Beschaffenheit ihrer Exponenten, so kann man sagen: **Alle geraden Potenzen einer negativen Zahl sind positiv, alle ungeraden negativ.**

76.

Anm. Da man alle geraden Zahlen durch $2n$, alle ungeraden durch $2n+1$ bezeichnen kann, so lässt sich die letzte Regel durch die Formeln ausdrücken:

$$(-b)^{2n} = +b^{2n};\quad (-b)^{2n+1} = -b^{2n+1}. \text{*)}$$

Potenzirung mit einer negativen Zahl (aus 42) s. unter 84.

## b. *Erweiterung des Zahlbegriffes durch Division.*

Wenn $\frac{c}{a} = b$ ist, und nicht $a$ ein Factor von $c$, so kann $a = c$, oder $c$ ein Factor von $a$ sein.

Anm. Ein Quotient, für welchen keiner dieser drei Fälle gilt, lässt sich, wie unten sich zeigen wird, immer auf den dritten Fall zurückführen.

---

*) Wendet man auf diese Formeln den Begriff der Radicirung an, so zeigt sich, dass Radicirung einer negativen mit einer geraden Zahl nicht vorkommen kann. Die Lösung dieser Aufgabe wird also eine neue Erweiterung des Zahlengebietes erfordern. (Vgl. Nr. 101 ff.)

## 3. $c = a$. Die Eins.

**63.** *Vorbemerkungen.* — 1) Wenn $\frac{a}{a} = b$, so ist $ab = a$; d. h.: Ein Quotient, in welchem Dividend und Divisor gleich sind, lässt die Zahl, die man mit ihm multiplicirt, ungeändert.

2) Da $ac = ca$, so ist, wenn man beiderseits durch $a$ und $c$ dividirt,

$$\frac{a}{a} = \frac{c}{c},$$

d. h.: Ein solcher Quotient bleibt ungeändert, wenn der gemeinsame Werth von Dividend und Divisor sich ändert. — Man kann also dem Werthe dieses Quotienten ein für allemal einen bestimmten Namen geben, und ihn durch ein bestimmtes Zeichen ausdrücken.

**64.** *Erklärung.* — Ein Quotient, in welchem Dividend und Divisor gleich sind, wird Eins genannt, und durch 1 bezeichnet.

$$\frac{a}{a} = 1.$$

*Bedeutung der Eins.* — Eins soll eine Zahl sein, welche jede andere, die mit ihr multiplicirt wird, ungeändert lässt. Da aber eine Zahl nur dann ungeändert bleibt, wenn man sie einmal als Summand setzt, so ist die durch obige Erklärung bestimmte „Eins" dasselbe wie die Zahleneinheit, die schon oben (Nr. 5) dasselbe Zeichen erhielt.

Anm. Es könnte zweifelhaft scheinen, ob die Einführung der Null und der Eins wirklich eine Erweiterung des Zahlengebietes bedingt, da doch beide Zahlen sich in die Reihe der natürlichen Zahlen einfügen. Halten wir aber fest, dass nach der oben gegebenen Definition eine Zahl der Inbegriff mehrerer (also mindestens zweier) Einheiten ist, und bedenken wir, dass beide Zahlen ihre besonderen, von denen der absoluten Zahlen verschiedenen, Rechnungsgesetze haben, so tritt die Nothwendigkeit hervor, auch in der Einführung dieser Zahlen eine Erweiterung des Zahlengebietes zu erblicken.

**65.** *Rechnungen mit der Eins.* — Setzt man in den Formeln, welche die Rechnungen mit einem Quotienten enthalten, Dividend und Divisor gleich, so folgt:

Aus 33: $\frac{ac}{c} = a \cdot \frac{c}{c}$

oder: $a = a \cdot 1$. 29.

Aus 37: $\frac{a}{c} \cdot c = \frac{a}{c : c}$

oder: $a = \frac{a}{1}$. 29.

Eine Zahl, mit Eins multiplicirt, oder durch Eins dividirt, bleibt ungeändert. 77.

Anm. Die Eins kann daher als Anfangsglied dienen, an welches jedes Product sich anknüpfen lässt.

78. Aus 42: $\frac{c^b}{c^b} = c^{b-b}$

oder: $1 = c^0$.

Eine Zahl, mit Null potenzirt, giebt Eins.

79. Aus 47: $\frac{b^c}{b^c} = \left(\frac{b}{b}\right)^c$

oder: $1 = 1^c$.

Aus 54: $\frac{\sqrt[c]{y}}{\sqrt[c]{y}} = \sqrt[c]{\frac{y}{y}}$

oder: $1 = \sqrt[c]{1}$.

Eins, mit einer Zahl potenzirt oder radicirt, giebt Eins.

80. Aus 56: $c^{\frac{b}{b}} = \sqrt[b]{c^b}$

oder: $c^1 = c$. 52.

Aus 57: $(\sqrt[a]{y})^a = \sqrt[\frac{a}{a}]{y}$

oder: $y = \sqrt[1]{y}$. 52.

Eine Zahl, mit Eins potenzirt oder radicirt, bleibt ungeändert.

81. Aus 64: ${}^c l y - {}^c l y = {}^c l \frac{y}{y}$

oder: $0 = {}^c l 1$.

Eins, mit einer Zahl logarithmirt, giebt Null.

Aus 78 folgt durch Anwendung des Begriffs der Radi-
82. cirung $\sqrt[0]{1} = c$; d. h.: $\sqrt[0]{1}$ kann jede Zahl bedeuten. (Vgl. 71.) Durch Logarithmirung folgt 81.

Aus 79 folgt durch Anwendung des Begriffs der Logarith-
82a. mirung ${}^1 l 1 = c$; d. h.: ${}^1 l 1$ kann jede Zahl bedeuten.

Aus 80 folgt durch Anwendung des Begriffs der Logarith-
83. mirung ${}^c l c = 1$, d. h.: Der Logarithmus der Grundzahl ist Eins.

Anm. Es bildet also $82_a$ ebenso eine Ausnahme zu 83, wie $\frac{0}{0} = c$ eine Ausnahme zu der Regel $\frac{c}{c} = 1$. — Man sieht ferner, dass 83 eine zweite Definition der Eins enthält. — Dass $c^0 = 1$ ist, geht auch aus dem Begriff der Null hervor. Denn wenn man $c$ nullmal, d. h. gar nicht, als Factor zu dem Anfangsgliede Eins setzt, so erhält man eben Eins. (Siehe Anm. zu 77.)

## 4. $c$ ein Factor von $a$. Die umgekehrten Zahlen.

**66.** *Vorbemerkungen.* — 1) Wenn in der Gleichung $\frac{c}{a} = b$ $c$ ein Factor von $a$ sein soll, so kann man $a = cd$ setzen, und erhält: $\frac{c}{cd} = b$, oder (35) $\frac{c|c}{d} = b$, oder $\frac{1}{d} = b$; d. h.: Jeder Quotient, in welchem der Dividend ein Factor des Divisors ist, kann in einen andern verwandelt werden, dessen Dividend Eins ist.

2) Aus $\frac{1}{d} = b$ folgt: $bd = 1$; d. h.: Ein solcher Quotient kann stets mit einer bestimmten Zahl zum Producte Eins vereinigt werden.

**67.** *Erklärungen.* — 1) Ein Quotient, dessen Dividend Eins ist, wird umgekehrte Zahl genannt und in unveränderter Form geschrieben.

$$\frac{1}{a}.$$

Anm. Jeder absoluten Zahl entspricht hiernach eine umgekehrte, sodass durch Einführung der umgekehrten Zahlen das Gebiet der Zahlen nochmals verdoppelt wird.

2) Im Gegensatze zu den umgekehrten Zahlen heissen die absoluten Zahlen ganze Zahlen und können in dieser Eigenschaft als Producte geschrieben werden, deren erster Factor Eins ist (77).

$$a = 1 . a.$$

Anm. Durch den Hinzutritt des Factors 1 wird angedeutet, dass $a$ eine Anzahl von Einheiten bedeutet, d. h. eine absolute Zahl ist. Dieser Factor pflegt aber weggelassen zu werden. — Wegen ihrer Beziehung zur Eins sind ganze und umgekehrte Zahlen „relative Zahlen". — Die Grenze zwischen den ganzen und umgekehrten Zahlen bildet die Eins. Da $1 . 1 = 1$, und $\frac{1}{1} = 1$, so kann Eins sowohl für eine ganze wie für eine umgekehrte Zahl angesehen werden. — Sowohl die ganzen wie die umgekehrten Zahlen können positiv oder negativ sein, sodass also einer absoluten Zahl $a$ bis jetzt vier relative entsprechen, nämlich $+a, -a, +\frac{1}{a}, -\frac{1}{a}$.

*Bedeutung der umgekehrten Zahlen.* — Eine umgekehrte Zahl soll, mit der entsprechenden ganzen multiplicirt, das Product Eins geben. Daher werden die gleichen Theile eines als Einheit betrachteten Gegenstandes einzeln diejenigen Begriffe sein, deren mathematischer Ausdruck eine umgekehrte

Zahl ist. Denn jeder dieser Theile, so oft als Summand gesetzt, als die Anzahl der Theile beträgt, bringt die gegebene Einheit wieder hervor. Es ist also die umgekehrte Zahl ein Theil der Einheit, und die entsprechende ganze Zahl die Anzahl der Theile, welche diese Einheit bilden.

**68.** *Rechnungen mit den umgekehrten Zahlen.* — Da die umgekehrten Zahlen in ihrer Form sich von den gewöhnlichen Quotienten nicht unterscheiden, so gilt dasselbe auch von den Rechnungen mit ihnen. Die Formeln der Rechnung mit Quotienten (in denen man den Dividend gleich Eins zu setzen hat) erleiden nur diejenigen Veränderungen, welche die Rechnung mit der Eins verursacht. Es folgen daher hier nur diejenigen Formeln, die zu besonderen Bemerkungen Anlass geben. Es folgt:

83a. Aus 33: $\frac{a}{c} = a \cdot \frac{1}{c}$; d. h.: Jeder Quotient kann als Product einer ganzen und einer umgekehrten Zahl geschrieben werden.

Anm. Hiernach sind auch diejenigen Quotienten, welche keinem der im Anfang dieses Abschnittes (b) aufgezählten Fälle angehören, (die Brüche) auf diese Fälle zurückgeführt. Ein Bruch ist also das Product einer ganzen und einer umgekehrten Zahl. — Setzt man in 83a $c = a$, so folgt: $1 = a \cdot \frac{1}{a}$. Lässt man in dieser Formel rechts den Factor $a$ grösser werden, so muss der andre Factor $\frac{1}{a}$ kleiner werden, damit das Product seinen Werth 1 behält. Eine umgekehrte Zahl ist also um so kleiner, je grösser ihr Divisor ist. — Dies folgt auch aus der oben erörterten Bedeutung der umgekehrten Zahlen.

83b. Aus 56: $c^{\frac{1}{b}} = \sqrt[b]{c}$; d. h.: Jede Wurzel kann als Potenz mit umgekehrtem Exponenten geschrieben werden.

84. Aus 42: $\frac{c^0}{c^b} = c^{0-b}$

oder: $\frac{1}{c^b} = c^{-b}$ 78.

oder: $\left(\frac{1}{c}\right)^b = c^{-b}$ 79. 48.

Eine Potenz mit negativem Exponenten ist gleich der umgekehrten Potenz mit positivem Exponenten, oder der ganzen Potenz mit positivem Exponenten, aber umgekehrter Grundzahl.

Anm. Man kann also das Vorzeichen des Exponenten ändern, wenn man gleichzeitig entweder die Potenz oder nur ihre Grundzahl umkehrt. — Die Bildung und Deutung der übrigen Formeln (aus 37, 47, 54, 56, 57, 64) sei zur Uebung empfohlen. — (Aufgaben: Hofmann 2 Fünfter Abschnitt I. II. — Bardey XII.)

### c. *Erweiterung des Zahlbegriffes durch Radicirung und Logarithmirung.*

**69.** Wenn $\sqrt[a]{c}=b$, also ${}^{b}l\,c=a$, und nicht $c$ im ersten Falle ein Product von $a$ gleichen Factoren, im zweiten Falle ein Product von lauter gleichen Factoren $b$ ist, so ist $b$, resp. $a$ nicht mehr eine Zahl in dem ursprünglich festgestellten Sinne. — Heben wir nun wieder den Fall hervor, dass die beiden zu vereinigenden Zahlen gleich sind, so folgt erstens, da $b^a$ nicht gleich $a^b$, dass auch $\sqrt[b]{b^a}$ ungleich $a$, und $\sqrt[b]{b}$ ungleich $\sqrt[a]{a}$ ist. Daher ist es nicht zulässig, $\sqrt[a]{a}$ durch ein Zeichen von bestimmter Bedeutung zu ersetzen. Zweitens ist ${}^{a}l\,a=1$ (83), also gleich einer schon bekannten Zahl. Dieser Fall liefert also keine Erweiterung des Zahlbegriffes.

## 5. Die irrationalen Zahlen.

**70.** *Vorbemerkung.* — Während die negativen Zahlen als Differenzen mit dem Minuend 0, und die umgekehrten als Quotienten mit dem Dividend 1 erschienen, lassen sich die Wurzeln und Logarithmen, welche der oben gestellten Bedingung nicht genügen, nicht in ähnlicher Weise auf eine einzige Zahl beziehen,*) erfordern also zu ihrer Darstellung stets zwei absolute Zahlen.

**71.** *Erklärungen.* — 1) Wurzeln und Logarithmen, die nicht Zahlen in dem bisher festgestellten Sinne sind, werden irrationale Zahlen genannt und in unveränderter Form geschrieben.

---

*) Denn für Wurzeln hat die Grenzzahl $\sqrt[a]{a}$, wie oben gezeigt, überhaupt keinen festen Werth. Für Logarithmen ist zwar ${}^{c}l\,c=1$, und, wenn man in der Formel ${}^{c}l\,y={}^{x}l\,y\,.\,{}^{c}l\,x$ $y=c$ setzt: $1={}^{x}l\,c\,.\,{}^{c}l\,x$, also, wenn ${}^{c}l\,x=s$ ist, ${}^{x}l\,c=\frac{1}{s}$. Aber keine der Formeln für die umgekehrten Zahlen zeigt, wie ein beliebiger Logarithmus als Potenz zwischen einer einfachen und einer umgekehrten Zahl dargestellt werden kann. Demnach kann auch keiner der hier betrachteten Logarithmen durch eine auf Eins bezogene Zahl dargestellt werden.

2) Im Gegensatze zu den irrationalen Zahlen heissen die absoluten Zahlen **rationale Zahlen.**

Anm. Sowohl die rationalen wie die irrationalen Zahlen können positiv oder negativ sein. Es entsprechen aber einer absoluten Zahl $a$ unzählige irrationale, da die Bestimmung der irrationalen Zahl noch eine zweite, beliebig zu wählende Zahl $b$ erfordert, die wieder mit $a$ in vierfacher Weise durch Radicirung oder Logarithmirung verbunden werden kann, während schliesslich noch jede dieser Zahlen positiv oder negativ sein kann. Einem Paar rationaler Zahlen entsprechen also im Ganzen 8 irrationale.

Setzt man $b^{(c^a)} = x$, und $c^a = \sqrt[z]{y}$ (vgl. Anm. zu 67 am Ende), so folgt

$$\sqrt[z]{y} = {}^b l x,$$

woraus hervorgeht, dass die aus Wurzeln und die aus Logarithmen hervorgehenden irrationalen Zahlen von gleicher Beschaffenheit sind, also nicht noch durch besondere Namen unterschieden zu werden brauchen. Denn wenn $x$ und $b$ beliebige absolute Zahlen sind, so ist $c^a$ eine irrationale Zahl, und einerseits gleich einer Wurzel, andrerseits gleich eines Logarithmus.

Die Bedeutung der irrationalen Zahlen wird erst später (in den Anwendungen der Arithmetik auf die Raumlehre) hervortreten.

Die Rechnungen mit irrationalen Zahlen unterscheiden sich nicht von denjenigen mit gewöhnlichen Wurzeln und Logarithmen.

---

# Zweite Abtheilung.

# Die zusammengesetzten Zahlen.

**72.** *Uebersicht.* Die Vereinigung eines Resultates mit einer Zahl lässt sich auf eine beliebige Menge von Zahlen ausdehnen, indem jedes erhaltene Resultat auf's Neue durch irgend eine Rechnungsart mit einer neuen Zahl sich vereinigen lässt. Dabei finden nur diejenigen Beschränkungen statt, welche die Unvollständigkeit der bisher angegebenen Regeln auferlegt. — Es wird sich nun herausstellen, dass eine beliebige Folge von Rechnungen, an beliebigen Zahlen vorgenommen (mit Ausnahme eines Falles) stets auf ein Resultat führt, welches sich einer allgemeinen Form unterordnen lässt, d. h.: dass es für die Vereinigung verschiedener Rechnungsarten (die wir die zusammengesetzte Rechnungsart nennen können) ebenso eine allgemeine Form giebt, wie z. B. $a + b = c$ die für die Addition

aufgestellte war. — Hierauf wird zu untersuchen sein, wie mit solchen zusammengesetzten Zahlen gerechnet wird, und ob der Vereinigung von Zahlen zu einer solchen allgemeinen Form eine entgegengesetzte Rechnungsart entspricht, endlich, ob dieselbe zu einer ferneren Erweiterung des Zahlbegriffes führen wird.

Der allgemeine Ausdruck einer zusammengesetzten Zahl wird die Form einer Summe erhalten, deren Glieder im Allgemeinen willkürlich gebildet werden können. In einem besonderen Falle jedoch wird sich herausstellen, dass diese Glieder, eines aus dem anderen, nach einem bestimmten Gesetze gebildet werden können. Diese specielle Art zusammengesetzter Zahlen wird eine besondere Betrachtung erfordern.

## A. Die Polynome.

**73.** ***Reduction eines zusammengesetzten Ausdrucks auf eine allgemeine Form.*** — 1) Mit Hilfe der negativen und umgekehrten Zahlen lassen sich die Resultate der indirecten Rechnungen (mit Ausnahme der Logarithmen) in solche der directen verwandeln. Denn

a) jede Differenz lässt sich als Summe einer positiven und einer negativen Zahl schreiben (72),

b) jeder Quotient als Product einer ganzen und einer umgekehrten Zahl (83a),

c) jede Wurzel als Potenz mit umgekehrtem Exponenten (83b).

Anm. Logarithmen allein sind auf diesem Wege nicht zu entfernen.

2) Die Anordnung der drei directen Rechnungen erfolgt auf Grund folgender Bemerkungen:

a) Ein Product von Summen lässt sich stets als eine Summe von Producten darstellen (25).

b) Eine Potenz von Producten lässt sich stets als ein Product von Potenzen darstellen. $(ab)^{pq} = a^{pq} . b^{pq}$ (46).

Hiernach lässt sich jeder zusammengesetzte Ausdruck, der keine Logarithmen enthält, darstellen als eine Summe von Producten von Potenzen.

**74.** ***Erklärungen.*** — 1) Jeder nur mittelst der 6 ersten Rechnungsarten zusammengesetzte Ausdruck heisst algebraisch, jeder andere transcendent.

2) Eine Summe von Producten von Potenzen heisst Polynom. Die allgemeine Form des Polynoms (Gleichung der zusammengesetzten Rechnungsart) lautet daher:

$$a_1^{\alpha_1} b_1^{\beta_1} \ldots + a_2^{\alpha_2} b_2^{\beta_2} \ldots + \ldots = X.$$

3) Die Summanden heissen Glieder des Polynoms.*)

75. *Vereinfachungen der allgemeinen Form des Polynoms.* —

1) Man kann in jedem Gliede eine einzige Potenz als solche bezeichnen, das Product der übrigen aber durch einen Buchstaben ausdrücken. — Letzterer heisst dann der Coefficient des Gliedes.

$$ax^\alpha + by^\beta + \ldots . = X.$$

2) Man kann in allen Gliedern Potenzen mit derselben Grundzahl ($x$) hervorheben, und diejenigen Glieder, welche eine solche Potenz nicht enthalten, in einen Buchstaben zusammenfassen. Man kann ferner diesem Buchstaben (nach 78 und 77) den Factor $x^0$ hinzufügen, und die Glieder so ordnen, dass die Exponenten die aufsteigende oder absteigende Reihe der natürlichen Zahlen bilden. Das Polynom heisst in diesem Falle: nach steigenden oder fallenden Potenzen von $x$ geordnet. Demnach lautet die einfachste Form des Polynoms (Normalform):

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n = X.$$

Anm. Zum ersten Gliede kann man sich also den Factor $x^0$, und im zweiten zu $x$ den Exponenten 1 hinzudenken. — Das Glied $X$ rechts kann man (nach 10) nach links bringen und mit demjenigen Gliede vereinigen, welches dieselbe Potenz von $x$ enthält wie $X$. — Da die Zahlen $a$ auch den Werth Null haben können, so sind in der Normalform auch solche Polynome enthalten, in deren Gliedern nicht alle Potenzen von $x$ von der 0ten bis zur $n$ten enthalten sind. — Ein Polynom kann auch gleichzeitig nach Potenzen mehrerer Buchstaben geordnet sein, namentlich nach steigenden des einen und fallenden eines andern. — Endlich ist leicht zu sehen, dass in der Normalform auch die einfachen Resultate der 6 ersten Rechnungsarten als specielle Fälle enthalten sind.

76. *Rechnungen mit Polynomen.* **) — In der Rechnung werden die Polynome wie Summen, ihre Glieder wie Producte behandelt. Jedes Glied besteht aus drei Theilen, dem Vorzeichen, dem Coefficienten, der Buchstabengrösse (Potenz oder Product von Potenzen). Glieder mit gleicher

---

*) Ein Polynom, welches nur zwei Glieder enthält, wird auch Binom genannt.

**) Beispiele s. am Schluss des Buches in der „Uebersicht der Formeln und Regeln“.

Buchstabengrösse (gleichnamige Glieder) können nach Beendigung der Rechnung (nach 24 und 73) zu einem Gliede vereinigt werden.

Anm. Der bequemeren Vereinigung wegen pflegt man schon während der Rechnung die gleichnamigen Glieder unter einander zu schreiben. In den folgenden Rechnungen ist überall die übliche Anordnung der Rechnung zur Anschauung gebracht.

### Addition von Polynomen.

$$\begin{array}{l} a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots \\ b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots \\ \hline (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + \ldots \end{array}$$

Ein Polynom wird addirt, indem man seine Glieder mit ihren Vorzeichen hinzuschreibt. (7, Anm. z. 72.) 85.

### Subtraction von Polynomen.

$$\begin{array}{l} a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots \\ - b_0 \mp b_1 x \mp b_2 x^2 \mp \ldots \\ \hline (a_0 - b_0) + (a_1 - b_1)x + (a_2 - b_2)x^2 + \ldots \end{array}$$

Ein Polynom wird subtrahirt, indem man seine Glieder mit entgegengesetzten Vorzeichen hinzuschreibt. (13, Anm. z. 72.) 86.

(Aufgaben: Hofmann 2. Zweiter Abschn. I. 37—44.)

### Multiplication von Polynomen.

$$\begin{array}{l} a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots \\ b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots \\ \hline a_0 b_0 + a_1 b_0 x + a_2 b_0 x^2 + \ldots \\ \qquad + a_0 b_1 x + a_1 b_1 x^2 + \ldots \\ \qquad\qquad + a_0 b_2 x^2 + \ldots \\ \hline a_0 b_0 + (a_1 b_0 + a_0 b_1)x + (a_2 b_0 + a_1 b_1 + a_0 b_2)x^2 + \ldots \end{array}$$

Ein Polynom wird mit einem anderen multiplicirt, indem man jedes Glied des einen mit jedem Gliede des anderen multiplicirt und die Producte addirt. (25). 87.

(Aufgaben: Hofmann 2. Zweiter Abschn. III.)

### Division von Polynomen.

Da die Aufgabe, durch eine Summe zu dividiren, oben unerledigt geblieben ist (vgl. Anm. zu 32), so lässt sich die Aufgabe, ein Polynom durch ein anderes zu dividiren, nur dadurch lösen, dass man das zweite Polynom wiederholt vom ersten subtrahirt, und die Anzahl der Subtrahenden bestimmt. Denn nach einer früheren Bemerkung (Nr. 26) kann die Division als eine wiederholte Subtraction betrachtet werden. — Der kürzeren Rechnung wegen subtrahirt man aber jedesmal ein Vielfaches des Subtrahend und wählt den Factor so, dass

das jedesmalige erste Glied des Minuend verschwindet. Dieser Factor muss also der Quotient aus dem ersten Gliede des Minuend und dem ersten Gliede des Subtrahend sein. — Nun sind 2 Fälle möglich: 1) Der Divisor ist ein Factor des Dividend. Dann bleibt nach einer Anzahl von Subtractionen der Rest Null, und die Summe der oben erwähnten Factoren ist der genaue Quotient. 2) Der Divisor ist kein Factor des Dividend. Dann bleibt nach einer Reihe von Subtractionen vom Dividend ein nicht dividirbarer Rest übrig, an dem man die Division nur andeuten kann. (So in der ersten Formel der Anm. zu 32: $\frac{bc + x}{c} = b + \frac{x}{c}$). — Da aber andererseits die Division eine wiederholte Subtraction ist, so kann man diese Subtraction nach der oben gegebenen Vorschrift fortsetzen und immer neue Glieder des Quotienten bilden. Dieses Verfahren hat kein Ende; denn bliebe nach irgend einer Subtraction der Rest Null, so wäre der bis dahin ermittelte Quotient das genaue Resultat der Division, also der Divisor ein Factor des Dividend, gegen die Annahme. Von dieser besonderen Form des Quotienten wird weiter unten die Rede sein. Vgl. Anm. zu 148.)

Anm. Summe, Differenz und Product zweier Polynome ist stets wieder ein Polynom, der Quotient dagegen nur dann, wenn der Divisor ein Factor des Dividend ist. Andernfalls muss der Begriff des Polynoms ebenso erweitert werden, wie früher der der einfachen Zahl. Dies wird weiter unten geschehen.

Divisor. Quotient.

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n. \mid b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_nx^n.$$

Dividend.

$$\begin{array}{l}
a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)x^2 + \ldots\ldots + a_nb_nx^{2n} \\
-a_0b_0 \mp a_1b_0\,x \mp a_2b_0\,x^2 \mp \ldots \\
\hline
+a_0b_1\,x + (a_0b_2 + a_1b_1)x^2 + \ldots \\
\mp a_0b_1\,x \mp a_1b_1\,x^2 \mp \ldots \\
\hline
+a_0b_2\,x^2 + \ldots \\
\mp a_0b_2\,x^2 \mp \ldots \\
\hline
\ldots\ldots \\
\ldots\ldots \\
\ldots\ldots \\
\hline
\ldots + a_nb_nx^{2n} \\
\ldots \mp a_nb_nx^{2n} \\
\hline
0.
\end{array}$$

Um ein Polynom durch ein anderes zu dividiren, *dividirt* man das erste Glied des Dividend durch das erste Glied des Divisor, *multiplicirt* den Quotient mit dem ganzen Divisor, *subtrahirt* das Product vom Dividend, und fängt mit dem Rest als neuem Dividend die Rechnung wieder von vorn an. Der Quotient der beiden Polynome ist dann die Summe der einzelnen Quotienten. 88.

Anm. Durch Ausführung der Division $\frac{a^n - b^n}{a - b}$ gelangt man zu 45a.

(Aufgaben: Hofmann 2. Zweiter Abschn. IV.)

**Potenzirung eines Polynoms mit 2.**

Die Aufgabe, eine Summe mit einer Zahl zu potenziren, wurde oben nur für die Exponenten 2 und 3 gelöst (44). Da eine in Worten ausgedrückte Regel für jeden Exponenten anders ausgedrückt werden müsste, so möge es genügen, dieselbe für den einfachsten Fall (2) auszusprechen. Betrachtet man in der ersten der Formeln 45b die Buchstaben $a$, $b$, .. als Glieder eines Polynoms, so erhält man die Regel:

Das Quadrat eines Polynoms ist gleich der Summe der Quadrate aller Glieder, vermehrt um die doppelten Producte je zweier. 89.

**Radicirung eines Polynoms mit 2.**

Nach einer früheren Bemerkung (Nr. 41) kann die Radicirung als eine wiederholte Division betrachtet werden. Hiernach lässt sich die Radicirung eines Polynoms in ähnlicher Weise wie die Division durch ein fortgesetztes Verfahren ausführen, welches ein Ende hat oder nicht, je nachdem das Polynom aus der durch den Exponenten bestimmten gleichen Anzahl von Factoren besteht oder nicht. Dieses Verfahren ist, wie das entsprechende bei der Potenzirung, für jeden Exponenten ein anderes. Es genügt, dasselbe für den einfachsten Fall (2) festzustellen, da es für die übrigen Fälle zu verwickelt und (wie später (Nr. 167) gezeigt wird) für die Anwendungen entbehrlich ist. Aus der dritten Formel 45b,

$(a+b+c+d+\ldots)^2 = a^2+b(2a+b)+c[2(a+b)+c]+d[2(a+b+c)+d]+\ldots$

ergiebt sich die Bestimmung der Glieder $a$, $b$, $c$, ..., wenn das Polynom der rechten Seite gegeben ist, (Bestimmung der „Quadratwurzel“) wie folgt:

Soll ein Polynom mit 2 radicirt werden, so ist das *erste* Glied des Resultates die Quadratwurzel aus 90.

dem ersten Gliede des Polynoms. Dies Glied wird subtrahirt. Um das *zweite* Glied zu finden, dividirt man das erste Glied des Restes durch das doppelte erste Glied des Resultates. Dann multiplicirt man den Quotienten mit sich selbst und dem doppelten bisherigen Resultat und subtrahirt dies Product von dem gegebenen Polynom. Alle *übrigen* Glieder werden wie das zweite gefunden.

Anm. Denken wir uns zu $a, b, c, d \ldots$ der Reihe nach die Factoren $x^1, x^2, x^4, x^8, \ldots$ hinzugefügt, so sind, wie leicht zu sehen, beide Polynome nach steigenden Potenzen von $x$ geordnet. Man muss also, um das Resultat geordnet zu erhalten, auch das gegebene Polynom ordnen.

(Aufgaben: Hofmann 2. Vierter Abschn. II. — Bardey XIV. B.)

## B. Die Proportionen.

**77.** *Vorbemerkung.* — Durch Gleichsetzung zweier Polynome entsteht eine Gleichung. Dieselbe wird in einfachster Gestalt erscheinen, wenn statt der Polynome nur Summen, Differenzen, Producte u. s. w., aus je zwei Buchstaben gebildet, gegeben sind. Bei derartigen Gleichungen wird es sich im Allgemeinen nicht um die Bestimmung eines Buchstabens durch die übrigen, sondern um die Umformungen handeln, denen sie mittelst der Regeln 6, 9, 21, 28, 40, 51 unterworfen werden können, ohne dass ihre beiden Seiten die Gleichheit der Gestalt verlieren.

**78.** *Erklärungen:* 1) Eine Gleichung, in welcher jede Seite nur zwei Zahlen, und zwar durch dieselbe Rechnung verbunden, enthält, heisst Proportion, und zwar von 1., 2. oder 3. Stufe, je nachdem die Rechnung 1. oder 2. oder 3. Stufe ist.

2) Die vier Zahlen heissen Glieder der Proportion, und zwar die erste und letzte (in der Reihenfolge des Schreibens) äussere, die beiden mittleren innere, die beiden ersten auf jeder Seite vordere, die beiden letzten hintere Glieder. Jedes Glied heisst die vierte Proportionale der drei anderen.

### 1. Die Proportion erster Stufe (arithmetische P.).

**79.** *Die allgemeine Form* dieser Proportion ist

$$1a)\quad a + b = c + d.$$

Subtrahirt man auf jeder Seite die Summe der beiden inneren Glieder, so folgt:

$$1b)\quad a - c = d - b;$$

d. h.: Eine Proportion aus zwei Summen kann in eine 91.
andere aus zwei Differenzen bestehende verwandelt werden, und umgekehrt.

**80.** *Eigenschaften der Proportion erster Stufe.* —

1) Vertauscht man in 1a) oder 1b) die rechte Seite mit der linken, so folgt:

2a) $c + d = a + b$; 2b) $d - b = a - c$;

d. h.: Man kann die beiden inneren Glieder mit den 92.
beiden äusseren vertauschen.

2) Vertauscht man in 1a) beiderseits die Summanden, und multiplicirt 1b) mit $-1$, so folgt:

3a) $b + a = d + c$; 3b) $c - a = b - d$;

d. h.: Man kann die beiden vorderen mit den beiden 93.
hinteren Gliedern vertauschen.

3) Durch Vergleichung von 2a) mit 3a) und von 2b) mit 3b) folgt:

Man kann die Proportion, statt von links nach 94.
rechts, auch von rechts nach links lesen.

**81.** *Besondere Eigenschaft der Differenz-Proportion.* —

4) Subtrahirt man in 1a) auf jeder Seite die Summe der beiden hinteren Glieder, so folgt:

1c) $a - d = c - b$;

d. h. wenn man 1c) mit 1b) vergleicht: In jeder Differenz- 95.
Proportion kann man die beiden inneren oder [nach Regel 1)] die beiden äusseren Glieder mit einander vertauschen.

Anm. In welcher Regel lässt sich der Uebergang von 1b in 1a aussprechen?

**82.** *Stetige Proportion.* — Eine Differenz-Proportion heisst stetig, wenn ihre inneren (oder äusseren) Glieder einander gleich sind. Allgemeine Form der stetigen arithmetischen Proportion:

$$a - x = x - b.$$

Das mittlere Glied $x$ heisst das arithmetische Mittel (mittlere arithmetische Proportionale) zwischen $a$ und $b$. Man findet:

$$x = \frac{a + b}{2};$$

d. h.: Das mittlere Glied der stetigen arithmetischen 96.
Proportion ist gleich der halben Summe der äusseren

Glieder. Oder: Das arithmetische Mittel zweier Zahlen ist gleich ihrer halben Summe.

Anm. Ist $x = \frac{a+b}{2}$ und $y = \frac{a-b}{2}$, so erhält man:

$$x + y = a; \quad x - y = b;$$

97. d. h.: Addirt man die halbe Differenz zweier Zahlen zu ihrer halben Summe, so erhält man die grössere der beiden Zahlen. Subtrahirt man die halbe Differenz zweier Zahlen von ihrer halben Summe, so erhält man die kleinere der beiden Zahlen.

**83.** *Erweiterung.* — Die stetige Proportion $a - x = x - b$ kann geschrieben werden:

$$(x - a) + (x - b) = 0.$$

Nun kann man verallgemeinernd die Gleichung aufstellen:

$$(x - a_1) + (x - a_2) + \ldots + (x - a_n) = 0,$$

woraus folgt:

$$x = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}.$$

Dann heisst $x$ das arithmetische Mittel der Zahlen $a_1, a_2, \ldots a_n$.

98. Und man hat die Regel: Das arithmetische Mittel von $n$ Zahlen ist gleich dem $n^{\text{ten}}$ Theile ihrer Summe.

## 2. Die Proportion zweiter Stufe (geometrische P.).

**84.** *Die allgemeine Form* dieser Proportion ist

$$\text{1a)} \quad ab = cd.$$

Dividirt man beide Seiten durch das Product der beiden inneren Glieder, so folgt:

$$\text{1b)} \quad \frac{a}{c} = \frac{d}{b};$$

99. d. h.: Eine Proportion aus zwei Producten kann in eine andere aus zwei Quotienten bestehende verwandelt werden, und umgekehrt.

**85.** *Eigenschaften der Proportion zweiter Stufe.* —

1) Vertauscht man in 1a) oder 1b) die rechte Seite mit der linken, so folgt:

$$\text{2a)} \quad cd = ab; \qquad \text{2b)} \quad \frac{d}{b} = \frac{a}{c};$$

100. d. h.: Man kann die beiden inneren Glieder mit den beiden äusseren vertauschen.

2) Vertauscht man in 1a) beiderseits die Factoren, und potenzirt 1b) mit —1 (vgl. 84), so folgt:

$$\text{3a)} \quad ba = dc; \qquad \text{3b)} \quad \frac{c}{a} = \frac{b}{d};$$

d. h.: Man kann die beiden vorderen mit den beiden hinteren Gliedern vertauschen. 101.

3) Durch Vergleichung von 2a) mit 3a) und von 2b) mit 3b) folgt: Man kann die Proportion, statt von links nach rechts, auch von rechts nach links lesen. 102.

**86.** *Besondere Eigenschaften der Quotienten-Proportion.* —
4) Dividirt man beide Seiten von 1a) durch das Product der beiden hinteren Glieder, so folgt:

$$1c)\quad \frac{a}{d} = \frac{c}{b};$$

d. h., wenn man 1c) mit 1b) vergleicht: In jeder Quotienten-Proportion kann man die beiden inneren oder [nach Regel 1)] die beiden äusseren Glieder mit einander vertauschen. 103.

Anm. In welcher Regel lässt sich der Uebergang von 1b) in 1a) aussprechen?

5) Addirt oder subtrahirt man 1 auf beiden Seiten von 1b), so folgt:

$$1d)\quad \frac{a \pm c}{c} = \frac{d \pm b}{b}. \qquad 104.$$

6) Dividirt man die beiden in 5) enthaltenen Proportionen (die sich nur durch die Zeichen + und — unterscheiden) durch einander, so folgt:

$$1e)\quad \frac{a + c}{a - c} = \frac{d + b}{d - b}. \qquad 105.$$

**87.** *Stetige Proportion.* — Eine Quotienten-Proportion heisst stetig, wenn ihre inneren (oder äusseren) Glieder einander gleich sind. Allgemeine Form der stetigen geometrischen Proportion:

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{b}.$$

Das mittlere Glied $x$ heisst das geometrische Mittel (mittlere geometrische Proportionale) zwischen $a$ und $b$. Man findet

$$x = \sqrt{ab};$$

d. h.: Das mittlere Glied der stetigen geometrischen Proportion ist gleich der Wurzel aus dem Producte der äusseren Glieder. Oder: Das geometrische Mittel zweier Zahlen ist gleich der Wurzel aus ihrem Producte. 106.

Anm. Ist $x = \sqrt{ab}$ und $y = \sqrt{\frac{a}{b}}$, so erhält man:

$$xy = a;\ \frac{x}{y} = b;$$

d. h.?

**88.** *Erweiterung.* — Die stetige Proportion $\frac{a}{x} = \frac{x}{b}$ kann geschrieben werden:

$$\frac{x}{a} \cdot \frac{x}{b} = 1.$$

Nun kann man verallgemeinernd die Gleichung aufstellen:

$$\frac{x}{a_1} \cdot \frac{x}{a_2} \cdots \frac{x}{a_n} = 1,$$

woraus folgt:

$$x = \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}.$$

Dann heisst $x$ das geometrische Mittel der Zahlen $a_1, a_2, \ldots a_n$.
107. Und man hat die Regel: Das geometrische Mittel von $n$ Zahlen ist gleich der $n^{\text{ten}}$ Wurzel aus ihrem Producte.

Anm. Die Lehre von den Proportionen lässt noch andere Erweiterungen zu. — So kann man eine Reihe arithmetischer Proportionen durch Addition oder Subtraction, eine Reihe geometrischer durch Multiplication oder Division vereinigen, woraus offenbar wieder eine (zusammengesetzte) Proportion von der Art der gegebenen entsteht. Man kann ferner statt zweier Summen, Differenzen, Producte, Quotienten beliebig viele einander gleich setzen, und erhält dadurch eine fortleitende Proportion. Von den Eigenschaften dieser Proportionen ist nur folgende [der Quotienten-Proportion angehörige, eine Erweiterung von 1d)] wichtig: Ist

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = \ldots = \frac{a_n}{b_n}$$

gegeben, so folgt, wenn man 1c) und 1d) vergleicht, für die erste Proportion $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$

$$\frac{a_1 \pm a_2}{a_2} = \frac{b_1 \pm b_2}{b_2},$$

oder:

$$\frac{a_1 \pm a_2}{b_1 \pm b_2} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3},$$

oder:

$$\frac{a_1 \pm a_2}{a_3} = \frac{b_1 \pm b_2}{b_3};$$

ferner:

$$\frac{a_1 \pm a_2 \pm a_3}{a_3} = \frac{b_1 \pm b_2 \pm b_3}{b_3},$$

u. s. w. — Schliesslich:

$$\frac{a_1 \pm a_2 \pm a_3 \pm \ldots \pm a_n}{b_1 \pm b_2 \pm b_3 \pm \ldots \pm b_n} = \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \ldots = \frac{a_n}{b_n}. \quad 108.$$

Durch Gleichsetzung zweier Potenzen würde man eine Proportion dritter Stufe erhalten. Welche Umformungen lässt dieselbe zu, und welche Eigenschaften besitzt sie?

(Zum Schluss sei wiederholt bemerkt, dass jedesmal, wenn es sich bei einer Proportion nicht um eine Umformung, sondern um Bestimmung eines ihrer Glieder handelt, die Proportion als Gleichung zu betrachten und nach den im nächsten Abschnitt gegebenen Vorschriften zu behandeln ist. Für die Arithmetik ist überhaupt die Lehre von den Proportionen von ganz untergeordnetem Interesse und findet hier nur wegen ihrer Anwendungen auf die Geometrie eine Stelle.)

## C. Die Gleichungen.

**89.** *Vorbemerkung.* — Ebenso wie $a + b = x$ die Gleichung der Addition war, so kann eine Gleichung, deren linke Seite ein Polynom, deren rechte eine beliebige Zahl (auch Null) ist, als Gleichung der zusammengesetzten Rechnungsart betrachtet werden. In dieser allgemeinen Gleichungsform sind dann diejenigen der 6 ersten Rechnungsarten als besondere Fälle enthalten. — Aber ebenso, wie in der Gleichung $a + b = x$ jeder Buchstabe der linken Seite als eine zu bestimmende Grösse betrachtet werden kann, so auch in der allgemeinen Gleichung jeder Buchstabe des Polynoms. Das Verfahren, durch welches ein solcher Buchstabe bestimmt wird (und welches hiernach der Aufstellung der indirecten Rechnungsarten entspricht) heisst die Auflösung der Gleichung.

**90.** *Erklärungen.* — 1) Unter der Wurzel einer Gleichung in $x$ versteht man diejenige Zahl, welche, in dem Polynom der linken Seite für $x$ gesetzt, die linke Seite der rechten gleich macht.

2) $x$ heisst die Unbekannte der Gleichung.

3) Die Wurzel einer Gleichung in $x$ bestimmen, heisst: die Gleichung nach $x$ auflösen.

**91.** *Eintheilung der Gleichungen.* — Eine Gleichung, in welcher die Unbekannte nur in der Grundzahl von Potenzen (nicht aber als Exponent) vorkommt, heisst algebraisch (weil die Bestimmung ihrer Wurzel nur die Anwendung der 6 ersten Rechnungsarten erfordert), jede andere transcendent. Diejenigen transcendenten Gleichungen, in welchen die Unbekannte

nur im Exponenten von Potenzen vorkommt, heissen **Exponentialgleichungen.**

Anm. Also nur die Art und Weise, wie die Unbekannte vorkommt, bestimmt die Natur der Gleichung. Die bekannten Grössen können beliebig algebraische oder transcendente Ausdrücke sein.

## I. Algebraische Gleichungen.

**92.** ***Reduction einer algebraischen Gleichung auf die Normalform.*** *) — Ebenso wie ein algebraischer Ausdruck auf das Polynom und seine Normalform sich reduciren liess, so auch eine algebraische Gleichung auf dieselbe Normalform. Die vorige Art der Reduction ist aber hier nicht anwendbar, weil Resultate, welche $x$ enthalten, nicht durch andere Buchstaben ersetzt werden können. Vielmehr erfolgt die Reduction hauptsächlich mittelst des, die Regeln 6, 9, 21, 28, 40 umfassenden
109. Satzes: Gleiche Rechnungen mit gleichen Zahlen geben gleiche Resultate. Man kann folgende Stufen der Reduction unterscheiden:

a) Vereinfachen. — Klammern, Wurzelzeichen, unter welchen $x$ steht, und Divisionsstriche werden entfernt, und zwar

1) Klammern durch Ausführung der durch sie angedeuteten Rechnung (Addition, Subtraction, Multiplication, Potenzirung).
2) Wurzelzeichen, indem man durch Anwendung von 6 und 10 das die Wurzel enthaltende Glied des Polynoms auf eine Seite der Gleichung allein bringt, (die Gleichung nach dieser Wurzel auflöst) und dann beide Seiten mit dem Wurzelexponenten potenzirt.
3) Divisionsstriche, indem man beide Seiten der Gleichung mit dem Divisor des zu beseitigenden Striches multiplicirt.

Anm. Die Reihenfolge, in der diese Vereinfachungen vorzunehmen sind, richtet sich nach der Natur der die Gleichung bildenden Ausdrücke. Im Allgemeinen empfiehlt es sich, die äusseren Zeichen, d. h. diejenigen, welche andere einschliessen, zuerst zu beseitigen.

b) Ordnen. — Durch Anwendung der Regeln 6, 9, 10 kann man beliebig Glieder der Gleichung von der einen Seite nach der andern bringen. Vergleicht man die beiden Gleichungen der Addition und Subtraction,

$$a + b = c, \quad a = c - b,$$

*) Beispiele s. am Schluss des Buches in der „Uebersicht der Formeln und Regeln".

von denen jede aus der andern durch Anwendung dieser Regeln abgeleitet werden kann, so lassen sich die 3 Regeln in eine, für die Anwendung auf Gleichungen bequemere Regel zusammenfassen: Jedes Glied einer Gleichung kann 110.
mit entgegengesetztem Vorzeichen auf die andere Seite gebracht werden. — Eine Gleichung heisst geordnet, wenn mittelst dieser Regel alle Glieder, welche $x$ enthalten, nach links, alle anderen nach rechts gebracht sind. — Eine Gleichung heisst auf Null gebracht, wenn alle Glieder nach links gebracht sind, sodass die rechte Seite Null ist. — In beiden Fällen pflegt man das Polynom der linken Seite nach fallenden Potenzen von $x$ zu ordnen.

c) Zusammenfassen. — Glieder, welche gleich hohe Potenzen von $x$ enthalten, werden durch Anwendung von 24 zu einem Gliede zusammengefasst, indem man die Potenz von $x$ als gemeinsamen Factor heraussetzt.

d) Dividiren. — Alle Glieder der Gleichung werden durch den Coefficienten desjenigen Gliedes dividirt, welches die höchste Potenz von $x$ enthält.

Anm. Ist dieses Glied negativ, so dividirt man durch den negativ genommenen Coefficienten, oder multiplicirt erst mit (— 1), oder kehrt die Vorzeichen aller Glieder um, wodurch jenes Glied jedesmal positiv wird.

Die durch diese Reductionen hergestellte Normalform der Gleichung lautet nun:

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1x = a_0.$$

Der höchste in der Normalform vorkommende Exponent von $x$ heisst der Grad der Gleichung. Demnach ist eine Gleichung vom $n^{ten}$ Grade eine solche, in deren Normalform keine höhere Potenz von $x$ als die $n^{te}$ vorkommt. Hierauf beruht die

**93.** *Eintheilung der algebraischen Gleichungen* in Gleichungen vom 1., 2., 3., ... Grade.

Anm. Der Grad einer Gleichung ist stets eine ganze positive Zahl. Denn enthielte ein Glied die Potenz $x^{-p}$, so würde man $\frac{1}{x^p}$ dafür schreiben, und den Divisor nach a) 3) beseitigen. Enthielte aber ein Glied die Potenz $x^{\frac{1}{p}}$, so würde man $\sqrt[p]{x}$ dafür schreiben, und die Wurzel nach a) 2) beseitigen. — Irrationale Wurzeln als Exponenten müssen (nach Anm. zu 60) ausgeschlossen werden, desgl. irrationale Logarithmen (nach Anm. zu 67).

**94.** *Auflösung der algebraischen Gleichungen. (Vorbemerkungen.)* — Eine Gleichung ist gelöst, wenn auf der linken

Seite nur $x$, auf der rechten Seite ein Ausdruck steht, welcher $x$ nicht enthält. — Von den Coefficienten $a_0, a_1, \dots a_{n-1}$ kann einer oder mehrere gleich Null sein. Hierbei sind folgende Fälle besonders wichtig:

a) $a_0 = 0$. Dann kann man die ganze Gleichung durch $x$ dividiren, also ihren Grad um 1 erniedrigen. Ist ausserdem die Reihe der folgenden Grössen $a_1 a_2 \dots a_p$ gleich Null, so kann man die Gleichung sogar durch $x^{p+1}$ dividiren, sodass ihr Grad nur noch $n-(p+1)$ beträgt.

b) $a_0$ nicht $= 0$, aber alle andern Grössen, $a_1 a_2 \dots a_{n-1}$ gleich Null. Dann heisst die Normalform

$$x^n = a_0.$$

Eine Gleichung, welche ausser dem Gliede $x^n$ nur noch ein von $x$ freies Glied enthält, heisst eine reine Gleichung vom $n^{\text{ten}}$ Grade, jede andere eine gemischte. Die Normalform der reinen Gleichung vom $n^{\text{ten}}$ Grade kann noch weiter vereinfacht werden. Setzt man nämlich $a_0 = a^n$, dividirt die Gleichung durch $a^n$ und setzt $\frac{x}{a} = \alpha$, so geht sie über in

$$\alpha^n = 1.$$

Anm. Nur die Gleichungen des 1., 2., 3. und 4. Grades sind in der allgemeinen Form algebraisch, d. h. mit Hilfe der 6 ersten Rechnungsarten, auflösbar, von höheren Gleichungen dagegen nur besondere Arten. — Eine Gleichung ist nicht lösbar, wenn ihre beiden Seiten sich widersprechen; sie hat unendlich viele Lösungen (ist eine Formel), wenn beide Seiten auf dieselbe Form gebracht werden können. Beispiele:

$$\frac{4x+3}{8} + \frac{x+1}{3} = \frac{18+20x}{24}; \quad \frac{4x+3}{8} + \frac{x+1}{3} = \frac{17+20x}{24}.$$

Wir lösen nun der Reihe nach die Gleichungen der ersten 4 Grade, und lassen dabei jedesmal die reine Gleichung der gemischten vorangehen.

## 1. Die Gleichung vom ersten Grade (lineare Gleichung).

**95.** *Auflösung.* — Da die Normalform dieser Gleichung $x = a_0$ ist, so fallen reine und gemischte Gleichung hier zusammen, und die Gleichung ist durch Reduction auf die Normalform bereits gelöst.

(Aufgaben: Hofmann 2. Sechster und siebenter Abschnitt. — Bardey XXI. XXIII.)

**96.** *Erweiterung. — Gleichungen mit mehreren Unbekannten.* — Ist eine Gleichung mit 2 oder mehreren Unbekannten gegeben, so kann man allen Unbekannten bis auf eine beliebige

Werthe geben, und jedesmal ist dann die letzte Unbekannte bestimmt. Die Gleichung hat also unzählig viele Lösungen.

Anm. Die hier gemachten Bemerkungen gelten für Gleichungen beliebig hoher Grade.

Sind zwei Gleichungen mit denselben beiden Unbekannten gegeben, so lässt sich zeigen, dass es für jede der Unbekannten einen Werth giebt, welcher beiden Gleichungen genügt. Denn bestimmt man die eine Unbekannte ($y$) aus der einen Gleichung, und setzt ihren Werth, welcher $x$ enthält, in die andre ein, so enthält diese Gleichung nur noch die Unbekannte $x$. Mithin ist $x$ durch diese Gleichung bestimmt, und folglich auch $y$ durch die andre, wenn man den gefundenen Werth von $x$ darin einsetzt. — Es existirt also in diesem Falle für das System der beiden Gleichungen nur eine Lösung. Dasselbe findet, wie leicht zu sehen, statt, wenn drei Gleichungen mit drei Unbekannten, u. s. w., im Allgemeinen, wenn $n$ Gleichungen mit $n$ Unbekannten gegeben sind.

Sind endlich zwei oder mehrere Gleichungen mit nur einer Unbekannten $x$ gegeben, so genügt schon eine Gleichung zur Bestimmung dieser Unbekannten, und die übrigen Gleichungen sind entweder überflüssig, wenn nämlich der gefundene Werth von $x$ auch aus ihnen hervorgeht, oder mit der ersten Gleichung unvereinbar, wenn sie andere Werthe ergeben. Im Allgemeinen also existirt in diesem Falle für das System der Gleichungen keine Lösung.

Auf einen der drei hier beschriebenen Fälle lässt sich jedes System von Gleichungen zurückführen. Denn bestimmt man eine Unbekannte aus einer Gleichung und setzt ihren Werth in die übrigen ein, so erhält man ein neues System, welches eine Gleichung und eine Unbekannte weniger enthält. Sind also

a) mehr Unbekannte als Gleichungen,

so bleibt nach wiederholter Anwendung dieses Verfahrens eine Gleichung mit mehreren Unbekannten übrig, und das System hat unzählig viele Lösungen, d. h. jede Unbekannte hat unzählig viele Werthe. — Sind

b) ebensoviele Unbekannte als Gleichungen,

so bleibt schliesslich eine Gleichung mit einer Unbekannten übrig, und das System hat eine Lösung, d. h. jede Unbekannte hat einen Werth. — Sind endlich

c) weniger Unbekannte als Gleichungen,

so bleiben schliesslich mehrere Gleichungen mit einer Unbe-

kannten übrig, und das System hat keine Lösung, d. h. es giebt für die Unbekannten keine Werthgruppe, welche allen Gleichungen genügte.

Anm. Im ersten Falle gehört zu jeder beliebig gewählten Werthgruppe der übrigen Unbekannten ein bestimmter Werth von $x$, der sich ändert, sobald eine der Unbekannten einen anderen Werth erhält. Der Werth von $x$ ist also von denen der anderen Unbekannten abhängig, und man drückt dies aus, indem man sagt, $x$ sei eine Funktion der übrigen Unbekannten. Natürlich ist auch jede der anderen Unbekannten eine Funktion der übrigen. — Die Zahl der Lösungen kann eingeschränkt werden, wenn die fehlenden Gleichungen durch Bedingungen ersetzt sind. Der einfachste Fall ist derjenige, wo eine Gleichung mit zwei Unbekannten und eine Bedingung (z. B. dass die Werthe der Unbekannten rationale oder ganze oder ganze positive Zahlen sein sollen) gegeben ist. Von solchen Gleichungen, welche diophantische heissen, wird weiter unten (Nr. 150) die Rede sein.

Der zweite Fall, welcher allein eine bestimmte Lösung giebt, wird uns hier ausschliesslich beschäftigen.

Im dritten Falle kann man den Werth der letzten Unbekannten noch aus einer Gleichung bestimmen, und in die übrigen einsetzen. Sind die bekannten Zahlen der Gleichungen dann in Buchstaben gegeben, so drücken diese letzten, keine Unbekannte mehr enthaltenden Gleichungen ebensoviele Bedingungen aus, welche diese Buchstaben erfüllen müssen, damit eine gemeinsame Lösung der Gleichungen existire. Diese Gleichungen heissen daher auch Bedingungsgleichungen.

Die Normalform einer Gleichung mit mehreren Unbekannten ist

$$ax + by + cz + \ldots = m,$$

worin $x$, $y$, .. unbekannte, $a$, $b$, ... $m$ bekannte Grössen (ganze Zahlen) sind. — Die Wegschaffung einer Unbekannten aus einer Reihe von Gleichungen heisst Elimination der Unbekannten.

**97.** *Eliminationsmethoden.**) — Die Elimination einer Unbekannten aus mehreren Gleichungen kann durch verschiedene Methoden bewirkt werden.

1. Die Substitutionsmethode. — Man löst eine Gleichung nach der wegzuschaffenden Unbekannten auf, und setzt deren Werth in die anderen Gleichungen ein.

Anm. Diese Methode ist auch auf Gleichungen von höherem als erstem Grade anwendbar, soweit dieselben eine Lösung gestatten.

2. Die Comparationsmethode. — Man löst alle Gleichungen nach der wegzuschaffenden Unbekannten auf und setzt den einen Werth dieser Unbekannten der Reihe nach allen übrigen gleich.

---

*) Beispiele s. am Schluss des Buches in der „Uebersicht der Formeln und Regeln".

3. Die Additionsmethode. — Man bringt alle Gleichungen auf die Normalform, multiplicirt die erste und die zweite Gleichung mit solchen Zahlen, dass die Coefficienten einer Unbekannten gleich, aber mit verschiedenen Vorzeichen versehen sind, und addirt dann beide Gleichungen. Auf dieselbe Weise eliminirt man dieselbe Unbekannte aus der 1. und 3., aus der 1. und 4. Gleichung, u. s. w.

Anm. Diese Methode ist nur auf Gleichungen 1. Grades (oder solche, die sich darauf zurückführen lassen) anwendbar, in diesem Falle aber die bequemste.

Durch wiederholte Anwendung dieser Methoden auf $m$ Gleichungen mit $m$ Unbekannten gelangt man schliesslich zu einer Gleichung mit einer Unbekannten. Es gestaltet sich die Auflösung nach der dritten Methode, wie folgt:

a) Bei zwei Gleichungen:

$$1)\quad a_1 x + b_1 y = c_1$$
$$2)\quad a_2 x + b_2 y = c_2.$$

Um $y$ zu eliminiren, multiplicire man 1) mit $b_2$, 2) mit $(-b_1)$.

$$1)\quad a_1 b_2 x + b_1 b_2 y = c_1 b_2.$$
$$2)\quad -a_2 b_1 x - b_1 b_2 y = -c_2 b_1.$$

Folglich durch Addition:

$$(a_1 b_2 - a_2 b_1) x = c_1 b_2 - c_2 b_1$$

oder:

$$3)\quad x = \frac{c_1 b_2 - c_2 b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}.$$

Um $y$ zu finden, hätte man $x$ eliminiren, d. h. 1) mit $a_2$, 2) mit $(-a_1)$ multipliciren müssen. Da die Gleichungen 1) und 2) ungeändert bleiben, wenn man $x$ mit $y$, $a_1$ mit $b_1$, $a_2$ mit $b_2$ vertauscht, so ist dasselbe mit jeder aus 1) und 2) abgeleiteten Gleichung der Fall, namentlich mit der Gleichung 3). Man erhält also aus 3) durch diese Vertauschungen:

$$y = \frac{c_1 a_2 - c_2 a_1}{b_1 a_2 - b_2 a_1}.$$

Anm. Ist $a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0$, so wird bei der Auflösung der Factor von $x$, ebenso wie der von $y$, gleich Null, also verschwinden $x$ und $y$ selbst (nach 69). Da alsdann $a_1 b_2 = a_2 b_1$ oder $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$ ist, so kann man den gemeinsamen Werth dieser Quotienten $e$ nennen, und erhält: $a_1 = a_2 e$; $b_1 = b_2 e$, oder, wenn man diese Werthe in 1) einsetzt: $(a_2 x + b_2 y) e = c_1$ oder $a_2 x + b_2 y = \frac{c_1}{e}$. Ist nnn $c_2$ nicht $= \frac{c_1}{e}$, so widersprechen sich die beiden Gleichungen, da sie derselben Grösse $a_2 x + b_2 y$ verschiedene

Werthe beilegen. Ist aber $c_2 = \frac{c_1}{e}$, oder $\frac{c_1}{c_2} = e$, so geht die erste Gleichung aus der zweiten durch Multiplication aller Glieder mit $e$ hervor; die erste Gleichung trägt also zur Bestimmung von $x$ und $y$ nichts Neues bei, die beiden Gleichungen sind von einander abhängig und haben für die Auflösung nur den Werth einer Gleichung. Hieraus geht für die Lösbarkeit zweier Gleichungen die Bedingung hervor, dass dieselben einander nicht widersprechen und von einander nicht abhängig sein dürfen.

b) Bei drei Gleichungen:

$$1)\ a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1$$
$$2)\ a_2 x + b_2 y + c_2 z = d_2$$
$$3)\ a_3 x + b_3 y + c_3 z = d_3.$$

Die Elimination von $z$ giebt:

aus 1) und 2): 4) $(a_1 c_2 - a_2 c_1) x + (b_1 c_2 - b_2 c_1) y = d_1 c_2 - d_2 c_1$,
aus 2) und 3): 5) $(a_2 c_3 - a_3 c_2) x + (b_2 c_3 - b_3 c_2) y = d_2 c_3 - d_3 c_2$.

Da diese Gleichungen die Form der unter a) gegebenen haben, so braucht man in der dortigen Lösung für $x$ nur statt $a_1$, $b_1$, ... die Coefficienten der neuen Gleichungen zu setzen, und erhält:

$$x = \frac{(d_1 c_2 - d_2 c_1)(b_2 c_3 - b_3 c_2) - (d_2 c_3 - d_3 c_2)(b_1 c_2 - b_2 c_1)}{(a_1 c_2 - a_2 c_1)(b_2 c_3 - b_3 c_2) - (a_2 c_3 - a_3 c_2)(b_1 c_2 - b_2 c_1)},$$

und durch dasselbe Verfahren, wie in a), ähnliche Ausdrücke für $y$ und $z$. Löst man in dem Ausdruck für $x$ die Klammern des Dividend, lässt zwei sich aufhebende Glieder weg, beachtet, dass der Divisor aus dem Dividend hervorgeht, indem man überall $a$ statt $d$ setzt, und dass die Glieder des Dividend und des Divisor denselben gemeinsamen Factor $c_2$ enthalten, so erhält man

$$6)\ x = \frac{(b_2 c_3 - b_3 c_2) d_1 + (b_3 c_1 - b_1 c_3) d_2 + (b_1 c_2 - b_2 c_1) d_3}{(b_2 c_3 - b_3 c_2) a_1 + (b_3 c_1 - b_1 c_3) a_2 + (b_1 c_2 - b_2 c_1) a_3}.$$

Aehnlich wie bei zwei Gleichungen findet man hieraus $y$, indem man für $a$, $b$, $c$ der Reihe nach $b$, $c$, $a$ setzt ($a$, $b$, $c$ cirkulär vertauscht); und durch dasselbe Verfahren $z$ aus $y$. Man bemerkt, dass bei allen diesen Vertauschungen der Divisor ungeändert bleibt.

4. Die Determinanten-Methode. — In den oben angegebenen Werthen der Unbekannten für 2 und 3 Gleichungen gestatten Dividend und Divisor eine abgekürzte Schreibweise, die den Vortheil hat, dass sie ohne weitere Rechnung aus den gegebenen Gleichungen gefunden und durch ein rein mecha-

nisches Verfahren in die oben gegebene Lösungsform verwandelt werden kann.

Man setzt nämlich für den Fall zweier Gleichungen:

$$a_1 b_2 - a_2 b_1 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix},$$

nennt den rechts stehenden Ausdruck, welcher aus den linken Seiten der Gleichungen $a_1 x + b_1 y = c_1$, $a_2 x + b_2 y = c_2$ durch blosse Fortlassung der Unbekannten und Vorzeichen gebildet ist, die Determinante dieser Gleichungen, und bestimmt den Werth dieser Determinante (die aus 2 Horizontal- oder 2 Verticalreihen besteht, und deren Buchstaben Glieder heissen) durch folgendes Verfahren: Man multiplicirt das Anfangsglied der 1. Horizontalreihe, $a_1$, mit der Zahl $b_2$, welche übrig bleibt, wenn man die durch $a_1$ gehende Horizontal- und Verticalreihe ausstreicht. Dann multiplicirt man das Anfangsglied der 2. Horizontalreihe, $a_2$, mit der Zahl $b_1$, welche übrig bleibt, wenn man die durch $a_2$ gehende Horizontal- und Verticalreihe ausstreicht. Die beiden Producte werden dann addirt, nachdem das zweite das Zeichen — erhalten hat. Demnach kann man die Werthe der beiden Unbekannten bei zwei Gleichungen (unter Anwendung des Divisionszeichens :) schreiben

$$x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}; \quad y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Ebenso setzt man für den Fall dreier Gleichungen:

$$a_1(b_2 c_3 - b_3 c_2) + a_2(b_3 c_1 - b_1 c_3) + a_3(b_1 c_2 - b_2 c_1) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Die rechts stehende dreireihige Determinante lässt sich dann durch das vorhin beschriebene Verfahren durch drei zweireihige ausdrücken, welche abwechselnd die Zeichen + und — erhalten. Es ist nämlich nach obiger Regel:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \cdot \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \cdot \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \cdot \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix},$$

und die rechte Seite lässt sich dann leicht in den ursprünglichen Ausdruck verwandeln, wobei die Determinantenstriche in Klammern übergehen.

Anm. Die rechts stehenden zweireihigen Determinanten heissen die zu den Gliedern $a_1$, $a_2$, $a_3$ gehörigen Unterdeterminanten. Zu jedem Gliede einer Determinante kann man eine Unterdeterminante bil-

den, indem man die das Glied enthaltende Horizontal- und Verticalreihe ausstreicht. Das Vorzeichen einer solchen Unterdeterminante ist positiv oder negativ, jenachdem man, von dem zugehörigen Gliede aus nach links und dann nach oben fortschreitend, eine gerade oder ungerade Anzahl von Gliedern bis zum Anfangsgliede $a_1$ zu zählen hat. Man kann die gegebene Determinante in die Unterdeterminanten jeder drei in derselben Horizontal- oder Verticalreihe stehenden Glieder zerlegen. Diese Zerlegungen entsprechen den verschiedenen Arten, wie man aus den 6 Gliedern des durch die Determinante dargestellten Polynoms gemeinsame Factoren heraussetzen kann.

Hiernach ist

$$x = \begin{vmatrix} d_1 b_1 c_1 \\ d_2 b_2 c_2 \\ d_3 b_3 c_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_1 b_1 c_1 \\ a_2 b_2 c_2 \\ a_3 b_3 c_3 \end{vmatrix}; \; y = \begin{vmatrix} a_1 d_1 c_1 \\ a_2 d_2 c_2 \\ a_3 d_3 c_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_1 b_1 c_1 \\ a_2 b_2 c_2 \\ a_3 b_3 c_3 \end{vmatrix}; \; z = \begin{vmatrix} a_1 b_1 d_1 \\ a_2 b_2 d_2 \\ a_3 b_3 d_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_1 b_1 c_1 \\ a_2 b_2 c_2 \\ a_3 b_3 c_3 \end{vmatrix}.$$

Diese Betrachtungen lassen sich offenbar auf ein System von $n$ linearen Gleichungen mit $n$ Unbekannten, die in der Normalform gegeben sind, ausdehnen.*) Man entnimmt der Form der für die Unbekannten gefundenen Lösungen die Regel:

111. Jede Unbekannte eines Systems von $n$ linearen Gleichungen mit $n$ Unbekannten ist gleich einem Quotienten, dessen Divisor die Determinante des Systems ist, und dessen Dividend aus dem Divisor hervorgeht, wenn man darin die Coefficienten jener einen Unbekannten der Reihe nach durch die rechten Seiten der Gleichungen ersetzt.

Bezeichnet man also die Determinante des Systems mit $\Delta$, und die durch Einsetzung der rechten Seiten für die $a, b, \ldots$ aus derselben gebildeten Determinanten mit $\Delta_a$, $\Delta_b$, ..., so ist allgemein

$$x = \frac{\Delta_a}{\Delta}; \; y = \frac{\Delta_b}{\Delta}; \; \ldots \text{ oder } \Delta \cdot x = \Delta_a; \; \Delta \cdot y = \Delta_b; \; \ldots$$

Anm. Ist $\Delta = 0$, so erhält man hiernach für $x, y$ .. überhaupt keine bestimmten Werthe. Sind auch $\Delta_a$, $\Delta_b$ ... gleich Null, so erhält man für alle Unbekannten den Werth $\frac{0}{0}$; d. h.: es sind nicht alle Gleichungen von einander unabhängig, und jede Unbekannte kann jeden beliebigen Werth annehmen. Andernfalls widersprechen sich einzelne Gleichungen, und die Aufgabe, Werthe für die Unbekannten zu finden, die

*) Es ist indess nicht zu übersehen, dass in diesem Verfahren ein strenger Beweis für die Richtigkeit der folgenden Regel nicht liegt. Man müsste vielmehr noch zeigen, dass dieselbe, unter der Voraussetzung, dass sie für $n$ Gleichungen gilt, auch noch für $n + 1$ Gleichungen richtig ist. Da sie nun für 2 und 3 Gleichungen gilt, so gilt sie dann allgemein.

den Gleichungen genügen, ist überhaupt unlösbar. — Sind in dem System der gegebenen Gleichungen alle rechten Seiten gleich Null, so enthalten alle Glieder der Gleichungen je eine Unbekannte in der ersten Potenz. — Man nennt eine Gleichung homogen im $n^{\text{ten}}$ Grade, wenn jedes ihrer Glieder ein Product von $n$ Unbekannten $x, y, \ldots u \ldots$ enthält (worin auch mehrere oder alle Factoren gleich sein können). Dividirt man die ganze Gleichung durch $u^n$, und setzt $\frac{x}{u} = x_1$, $\frac{y}{u} = y_1, \ldots$, so erhält man eine gewöhnliche Gleichung, die eine Unbekannte weniger enthält. Umgekehrt kann man eine gewöhnliche Gleichung homogen machen, wenn man $x_1 = \frac{x}{u}$, $y_1 = \frac{y}{u} \ldots$ setzt, und dann die ganze Gleichung mit $u^n$ multiplicirt. — Hiernach ist ein System von $n$ Gleichungen 1. Grades, mit $n$ Unbekannten, deren rechte Seiten ($d$) alle Null sind, homogen im 1. Grade, und lässt sich in ein System von $n$ Gleichungen mit $n-1$ Unbekannten verwandeln. Folglich muss, damit die Werthe der $n-1$ Unbekannten allen $n$ Gleichungen genügen, eine Bedingungsgleichung zwischen den Coefficienten erfüllt sein, und da die Determinanten $\Delta_a$, $\Delta_b, \ldots$, welche in jedem Gliede einen Factor $d$ enthalten, Null sind, so sieht man, dass die Determinante $\Delta$ auch gleich Null sein muss, wenn die Gleichungen sich nicht widersprechen sollen. Es ist also $\Delta = 0$ die erwähnte Bedingungsgleichung, und man kann sagen: Damit ein System 112.
von $n$ homogenen, auf Null gebrachten Gleichungen 1. Grades mit $n$ Unbekannten eine Lösung habe, muss die Determinante des Systems verschwinden. — Diese Determinante ist auch als das Resultat der Elimination aller Unbekannten aus den $n$ Gleichungen zu betrachten, und heisst in dieser Eigenschaft die Resultante des Systems.

(Aufgaben: Hofmann 2. Neunter Abschn. 3. Dreizehnter Abschn. — Bardey XXIV. XXV.)

## 2. Die Gleichung vom zweiten Grade (quadratische Gl.).

### a) Die reine Gleichung $\alpha^2 = 1$.

**98.** *Auflösung.* — Indem man auf beiden Seiten mit 2 radicirt, erhält man nach 79:

$$\alpha = \sqrt[2]{1} = 1.$$

Bringt man aber die Gleichung auf die Form

$$\alpha^2 - 1 = 0,$$

so kann man nach 45 dafür schreiben:

$$(\alpha + 1)(\alpha - 1) = 0.$$

Diese Gleichung wird nach 69 befriedigt, wenn man $\alpha + 1$ oder $\alpha - 1$ gleich Null setzt. Sie kann aber auch nur durch eine dieser Annahmen befriedigt werden, da das Product zweier Zahlen, von denen keine gleich Null ist, nur eine von Null verschiedene Zahl sein kann. Die Gleichung $\alpha^2 = 1$ zerfällt also in die beiden Gleichungen

$$\alpha - 1 = 0, \; \alpha + 1 = 0,$$

deren Lösungen wir durch $\alpha_1$ und $\alpha_2$ unterscheiden, sodass also

$$\alpha_1 = +1,\ \alpha_2 = -1$$

zwei Zahlen sind, welche beide der Gleichung $\alpha^2 = 1$ genügen.

Der Ausdruck $\sqrt[2]{1}$ ist hiernach zweideutig, da er sowohl $+1$ wie $-1$ vorstellen kann. Dasselbe ist mit $\sqrt[2]{a}$ der Fall, da $\sqrt[2]{a} = \sqrt[2]{1 \,.\, a} = \sqrt[2]{1} \,.\, \sqrt[2]{a}$ ist. Da aber die beiden Werthe nur durch das Vorzeichen sich unterscheiden, so kann man ihre Existenz durch die Bezeichnung $\pm\sqrt[2]{a}$ andeuten, wodurch darauf hingewiesen wird, dass man sowohl das obere wie das untere Zeichen wählen kann.

Die oben gegebenen Werthe $\alpha_1$ und $\alpha_2$ heissen die Quadratwurzeln der Einheit, und es bestehen zwischen ihnen offenbar die Formeln:

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 0;\ \alpha_1 \alpha_2 = -1.$$

Anm. Dass $\sqrt[2]{a}$ doppeldeutig ist, hängt damit zusammen, dass nach 76

$$(+b)^2 = (-b)^2 = +b^2$$

ist. Die Regel 51 darf daher auf gleiche Zahlen nur unter der Voraussetzung angewandt werden, dass, wenn mit 2 radicirt wird, auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens dieselbe Quadratwurzel der Einheit als Factor hinzugefügt wird. (Andernfalls könnte man aus $b^2 = b^2$ schliessen, dass $+b = -b$ sei.) Und auf Ausdrücke von der Form $(+b)^2 = (-b)^2$ nur unter der Voraussetzung, dass auf beiden Seiten verschiedene Quadratwurzeln der Einheit hinzugefügt werden. Tritt eine solche doppeldeutige Grösse wie $\sqrt[2]{a}$ bei der Umformung einer Gleichung auf, so haben die beiden für die Unbekannte sich daraus ergebenden Werthe gleiche Berechtigung. Tritt sie aber bei der Umformung einer Formel auf, deren Seiten nothwendig gleich sind, so kann nur einer ihrer beiden Werthe gelten, der andere führt nothwendig auf einen Widerspruch. Auf der Nichtbeachtung dieser, oder der in der Anm. zu 69 gegebenen Vorschrift beruhen alle scheinbaren Beweise für die Gleichheit von zwei wirklich ungleichen Zahlen.

(Aufgaben: Hofmann 3. Zwölfter Abschn. I. Vierzehnter Abschn. I.)

### b) Die gemischte Gleichung $x^2 + ax = b$.

**99.** *Auflösung.**) — Wäre die linke Seite dieser Gleichung die vollständige zweite Potenz einer Summe, so könnte man diese Summe als neue Unbekannte ($y$) betrachten, und statt

*) Beispiel s. am Schluss des Buches in der „Uebersicht der Formeln und Regeln".

der gegebenen Gleichung hätte man eine rein quadratische Gleichung in $y$ und eine lineare, in welcher $x$ durch $y$ bestimmt würde.

Vergleichen wir nun die linke Seite $x^2 + ax$ mit der Formel (44) $d^2 + 2db + b^2 = (d + b)^2$, so können wir setzen $d^2 = x^2$, also $d = x$; ferner $2db = ax$, also, da $d = x$ ist, $2b = a$, d. h.: $b = \frac{a}{2}$. Also ist, wenn man für $d$ und $b$ diese Werthe setzt:

$$x^2 + ax + \frac{a^2}{4} = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2.$$

Hieraus sieht man, dass der linken Seite der gegebenen Gleichung nur das Glied $+\frac{a^2}{4}$ fehlt, damit dieselbe eine vollständige zweite Potenz wird. Addirt man dieses Glied auf beiden Seiten, so bleibt die Gleichung ungeändert und lautet nun:

$$x^2 + ax + \frac{a^2}{4} = b + \frac{a^2}{4}$$

oder:

$$\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 = b + \frac{a^2}{4}$$

oder:

$$x + \frac{a}{2} = \pm\sqrt{b + \frac{a^2}{4}}$$

oder:

$$x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{b + \frac{a^2}{4}};$$

d. h.:

$$x_1 = -\frac{a}{2} + \sqrt{b + \frac{a^2}{4}};\quad x_2 = -\frac{a}{2} - \sqrt{b + \frac{a^2}{4}}.$$

Anm. Durch eine leichte Umformung kann die Lösung auch auf die Form

$$x = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 + 4b}}{2}$$

gebracht werden. — Es ist rathsam, jede zur Lösung vorgelegte gemischtquadratische Gleichung den zur Lösung führenden Umformungen zu unterziehen, nicht aber die Werthe von $a$ und $b$ in die fertige Formel einzusetzen. — Die in der einleitenden Bemerkung vorgesehene Substitution von $y$ für $x + \frac{a}{2}$ kann bei der Einfachheit der Gleichung unterbleiben. Es ist aber wichtig, zu bemerken, dass die Lösung der Gleichung auf der Möglichkeit dieser Substitution beruht. — Man beachte noch besonders

ders die Fälle, wo $a$ eine gerade Zahl, oder negativ, oder ein Quotient ist. Ist $a$ ungerade, so kann man, um in der Lösung Quotienten zu vermeiden, die Gleichung mit 4 multipliciren und dann $2x = y$ setzen.

Andere, von der oben beschriebenen nicht wesentlich verschiedene, aber weniger einfache Methoden zur Lösung der Gleichung sind folgende:

1) Man setze $x = y + \lambda$, setze in der durch diese Einsetzung erhaltenen Gleichung in $y$ den Coefficienten von $y$ gleich Null, und bestimme $\lambda$ aus dieser Gleichung. Man sieht, dass dieses Verfahren auch bei Gleichungen höheren Grades dazu dienen kann, jedes beliebige Glied der Gleichung (mit Ausnahme des ersten und letzten) zu entfernen. — Eine auf diese Art vereinfachte Gleichung heisst reducirt.

2) In der auf Null gebrachten Gleichung

$$x^2 + ax + c = 0$$

setze man $c = \lambda - \mu$, und bestimme $\lambda$ so, dass $x^2 + ax + \lambda$ eine vollständige zweite Potenz wird. Durch dieses Verfahren wird ein Glied der Gleichung in zwei neue aufgelöst.

Anm. Auf die gemischt-quadratische Gleichung lassen sich alle Gleichungen von der Form

$$x^{2n} + ax^n = b$$

zurückführen, indem man $x^n = y$ setzt. Dabei kann $n$ eine beliebige Zahl sein.

Ebenso die symmetrische Gleichung 4. Grades

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0,$$

die man schreibt:

$$(x^4 + 1) + a(x^3 + x) + bx^2 = 0,$$

dann durch $x^2$ dividirt:

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + a\left(x + \frac{1}{x}\right) + b = 0,$$

worauf man die erste Klammer durch Addition von 2 zum Quadrat von $\left(x + \frac{1}{x}\right)$ macht:

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + a\left(x + \frac{1}{x}\right) + b - 2 = 0.$$

Indem man nun $x + \frac{1}{x} = y$ setzt, erhält man eine quadratische Gleichung.

Ebenso wird die symmetrische Gleichung 5. Grades behandelt, deren eine Wurzel offenbar $-1$ ist, die man also durch $(x + 1)$ dividiren kann.

Manche andere höhere Gleichungen können durch Umformungen oder Substitutionen, über die sich im Einzelnen keine Vorschriften geben lassen, in quadratische und reine Gleichungen zerlegt werden.

(Aufgaben: Hofmann 3. Zwölfter Abschn. II. Vierzehnter Abschn. II. — Bardey XXVI. XXVII.)

**100.** ***Zusammenhang zwischen den Wurzeln und den Coefficienten der Gleichung.*** — Wir bemerkten bei der rein quadratischen Gleichung, dass Summe und Product ihrer beiden Wurzeln besonders einfache Werthe hatten. Vereinigen wir auf dieselbe Weise die Wurzeln der auf Null gebrachten gemischt-quadratischen Gleichung

$$x^2 + ax + c = 0,$$

die wir aus den oben gefundenen Werthen von $x_1$ und $x_2$ erhalten, wenn wir darin $b$ durch $-c$ ersetzen, nämlich:

$$x_1 = -\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - c}; \quad x_2 = -\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - c},$$

so folgt:

$$1) \quad x_1 + x_2 = -a,$$

und durch Bildung des Productes (45)

$$2) \quad x_1 x_2 = \frac{a^2}{4} - \left(\frac{a^2}{4} - c\right) = c;$$

d. h.: In jeder geordneten, auf Null gebrachten, vollständigen quadratischen Gleichung ist die Summe der beiden Wurzeln gleich dem entgegengesetzt genommenen Coefficienten des zweiten Gliedes, und ihr Product gleich dem dritten Gliede. 113.

Anm. Betrachtet man in 1) und 2) $x_1$ und $x_2$ als einzelne Unbekannte, und eliminirt eine derselben durch Substitution, so erhält man die gemischt-quadratische Gleichung wieder.

Setzt man die aus 1) und 2) folgenden Werthe von $a$ und $c$ in die gegebene Gleichung ein, so folgt:

$$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2 = 0,$$

oder, indem man die Klammer löst und aus den Gliedern paarweise gemeinsame Factoren heraussetzt:

$$(x - x_1)(x - x_2) = 0;$$

d. h.: Jede quadratische Gleichung kann als Product von zwei linearen Gleichungen dargestellt werden. 114.
Hieraus ist auch zu ersehen, wie man eine Gleichung 2. Grades bilden kann, deren Wurzeln zwei gegebene Zahlen sind.

Anm. Eine Gleichung ist rein quadratisch, wenn die Summe ihrer Wurzeln, d. h. $a$ Null ist. Ist $b$ gleich Null, so muss eine der Wurzeln Null sein. In diesem Falle kann man die gegebene Gleichung in der Form $x(x + a) = 0$ schreiben, aus welcher unmittelbar hervorgeht, dass die eine Wurzel 0, die andre $-a$ ist.

**101.** ***Erweiterung des Zahlbegriffes durch die Gleichungen 2. Grades.*** — Die Lösung einer Gleichung wurde oben als

eine der Bildung eines Polynoms entgegengesetzte Rechnungsart betrachtet. Es fragt sich nun, ob diese Lösung mit Hilfe der bisher bekannten Zahlen stets ausführbar ist, welches auch die in der Gleichung gegebenen Zahlen seien. Betrachten wir aber den in der Lösung der Gleichung $x^2 + ax + e = 0$ enthaltenen Ausdruck $\sqrt[2]{\frac{a^2}{4} - e}$, so sehen wir, dass dieser Ausdruck nur dann eine Zahl im bisherigen Sinne vorstellt, wenn der Radicand eine positive Zahl oder Null ist. Denn da alle Potenzen einer positiven Zahl, und ebenso (nach 76) alle geraden Potenzen einer negativen Zahl positiv sind, so kann keine Zahl $y$ der Gleichung $y^{2n} = -e$, also in unserem Falle der Gleichung $y^2 = -e$ genügen; d. h. die Grösse $y = \sqrt[2]{-e}$ macht, wenn sie als Zahl betrachtet werden soll, eine neue Erweiterung des Zahlbegriffes nothwendig. — Aber nur die quadratischen Gleichungen erfordern eine solche. Denn Gleichungen von ungeradem Grade führen auf eben solche Wurzeln, welche sowohl bei positiven als bei negativen Radicanden Zahlen der früheren Art sind (nach 76). Und Gleichungen von geradem Grade führen auf eine $\sqrt[2n]{-e}$, die geschrieben werden kann $\sqrt[n]{\sqrt[2]{-e}}$, also auf eine Quadratwurzel der bezeichneten Art. — Da man endlich schreiben kann;

$$\sqrt[2]{-e} = \sqrt[2]{(-1)e} = \sqrt[2]{e} \,.\, \sqrt[2]{-1},$$

so bleibt nur dieser letzte Factor: $\sqrt[2]{-1}$ als neu einzuführende Zahl übrig.

### Die imaginäre Einheit.

**102.** *Erklärung.* — Die Quadratwurzel aus $-1$ wird imaginäre Einheit genannt und durch $i$ bezeichnet.

$$i = \sqrt[2]{-1}; \quad i^2 = -1.^{*)}$$

---

*) Diese Definition ist um so strenger festzuhalten, da sie bei oberflächlicher Betrachtung der Regel 55 zu widersprechen scheint. Durch Anwendung derselben würde man nämlich erhalten

$$i^2 = \sqrt[2]{-1} \,.\, \sqrt[2]{-1} = \sqrt[2]{(-1)^2} = \sqrt[2]{1} = \pm 1.$$

Da nun $i^2 = \sqrt[2]{1}$ eine Formel und keine Gleichung ist, so kann nur einer der beiden Werthe von $\sqrt[2]{1}$ gelten (wie bereits in der Anm. auf S. 74

**103.** *Eigenschaften der imaginären Einheit.* — 1) Da die $\sqrt[2]{-1}$, wie jede Quadratwurzel, mit positivem oder negativem Vorzeichen genommen werden kann, so ist

$$+i = +\sqrt[2]{-1}; \quad -i = -\sqrt[2]{-1};$$

d. h.: die imaginäre Einheit ist entweder positiv oder negativ. 115.

2) Durch Multiplication erhält man

$$(+i)(-i) = -i^2 = +1;$$

d. h.: Das Product aus dem positiven und dem negativen $i$ ist Eins. 116.

3) Hieraus folgt:

$$\frac{1}{+i} = -i; \quad \frac{1}{-i} = +i;$$

d. h.: Der umgekehrte Werth der imaginären Einheit ist ihrem entgegengesetzten Werthe gleich. 117.

4) Durch fortgesetzte Multiplication der Formel $i^0 = 1$ mit $i$ erhält man:

$$i^0 = i^4 = i^8 = \ldots = i^{4n} = +1.$$
$$i^1 = i^5 = i^9 = \ldots = i^{4n+1} = +i.$$
$$i^2 = i^6 = i^{10} = \ldots = i^{4n+2} = -1.$$
$$i^3 = i^7 = i^{11} = \ldots = i^{4n+3} = -i;$$

d. h.: Die ganzen Potenzen von $i$ haben, von der nullten an, die periodisch sich wiederholenden Werthe $+1$, $+i$, $-1$, $-i$. 118.

Anm. Ueber die Bedeutung der imaginären Einheit lässt sich nach der letzten Eigenschaft einstweilen nur sagen, dass die Multiplication einer Grösse mit $i$ der Ausdruck für eine Veränderung ist, welche, viermal auf die Grösse angewendet, dieselbe in den ursprünglichen Zustand, dagegen, nur zweimal angewendet, in einen entgegengesetzten Zustand überführt. Die Natur dieser Veränderung tritt erst in den Anwendungen der Arithmetik auf die Raumlehre hervor.

### Die imaginären und complexen Zahlen.

**104.** *Erklärungen.* — 1) Jede Zahl, die den Factor $i$ bei sich hat, heisst imaginär. — Allgemeine Form: $ai$.

2) Im Gegensatze zu den imaginären Zahlen heissen alle übrigen Zahlen reell.

---

ausgeführt). Dies ist hier nach der Definition der imaginären Einheit der Werth $-1$. Im Uebrigen wird mit $i$ wie mit anderen Wurzeln gerechnet.

3) Eine Summe aus einer reellen und einer imaginären Zahl heisst complexe Zahl. — Allgemeine Form: $a + bi$.

4) Zwei complexe Zahlen, die sich nur durch das Vorzeichen von $i$ unterscheiden, heissen conjugirt. — Allgemeine Form: $a + bi$ und $a - bi$.

Anm. Die beiden Wurzeln der gemischt-quadratischen Gleichung sind imaginär, wenn $\frac{a^2}{4} < c$, oder, falls wir $-a = 2a_1$ setzen, wenn $a_1{}^2 < c$. Sei demnach $c = a_1{}^2 + b_1{}^2$, so lautet die Gleichung: $x^2 - 2a_1x + (a_1{}^2 + b_1{}^2) = 0$. Daraus folgt: $x_1 = a_1 + b_1 i$; $x_2 = a_1 - b_1 i$. Die beiden imaginären Wurzeln einer gemischt-quadratischen Gleichung sind also conjugirte Zahlen.

119. **105.** *Beziehungen zwischen zwei conjugirten Zahlen.* — Sei

$$a + bi = x, \quad a - bi = y,$$

so ist

1) $x + y = 2a$; $a = \frac{x + y}{2}$.

2) $x - y = 2bi$; $b = \frac{x - y}{2i}$.

3) $xy = a^2 + b^2$;

4) $x^2 = a^2 - b^2 + 2abi$; $a^2 - b^2 = \frac{x^2 + y^2}{2}$;

5) $y^2 = a^2 - b^2 - 2abi$; $ab = \frac{x^2 - y^2}{4i}$.

120. **106.** *Rechnungen mit zwei complexen Zahlen.* —

1) $(a + bi) + (a_1 + b_1 i) = (a + a_1) + (b + b_1)i$.

2) $(a + bi) - (a_1 + b_1 i) = (a - a_1) + (b - b_1)i$.

2) $(a + bi)(a_1 + b_1 i) = (aa_1 - bb_1) + (ab_1 + ba_1)i$.*)

4) $\frac{a + bi}{a_1 + b_1 i} = \frac{(a + bi)(a_1 - b_1 i)}{a_1{}^2 + b_1{}^2} = \left(\frac{aa_1 + bb_1}{a_1{}^2 + b_1{}^2}\right) + \left(\frac{ba_1 - ab_1}{a_1{}^2 + b_1{}^2}\right)i$;

d. h.: Summe, Differenz, Product und Quotient von zwei complexen Zahlen sind wieder complexe Zahlen.

Anm. Potenzirung und Radicirung einer complexen Zahl mit einer reellen führen ebenfalls auf eine complexe Zahl, dieselben Rechnungen jedoch, zwischen 2 complexen Zahlen ausgeführt, auf Resultate, welche die Potenzen $a^i$ und $i^i$ enthalten, deren Behandlung einem späteren Abschnitte vorbehalten bleibt.

(Aufgaben: Hofmann 2. Vierter Abschn. IX. — Bardey XVII.)

*) Das Product ist reell, wenn $ab_1 + ba_1 = 0$, d. h. $\frac{a}{b} = -\frac{a_1}{b_1}$. Specieller Fall: Für $a = a_1$, $b = -b_1$ ist $(a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$. — Zerlegung einer reellen Zahl in zwei imaginäre Factoren.

**107.** *Erweiterung. — Gleichungen mit mehreren Unbekannten.* — Ist eine der gegebenen Gleichungen vom 1. Grade, so kann man eine Unbekannte daraus bestimmen, und ihren Werth in die übrigen Gleichungen einsetzen, deren Grad hierdurch nicht erhöht wird. — Sind zwei quadratische Gleichungen gegeben (d. h. Gleichungen, welche die Normalform $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey=f$ haben) so führt dieses Verfahren auf eine Gleichung 4. Grades. In vielen Fällen aber lässt sich die Bestimmung der Unbekannten durch Lösung quadratischer Gleichungen bewirken, und zwar ohne dass man nöthig hat, die Gleichungen auf die Normalform zu bringen. Selbst Gleichungen höherer Grade sind auf diesem Wege lösbar. Die wichtigsten Fälle sind folgende:

1) Gleichungen, welche die Unbekannten nur in den Verbindungen $xy$ und $x^2+y^2$ oder überhaupt in nur 2 Verbindungen enthalten. — Man setzt $x^2+y^2=u$, $xy=v$, bestimmt $u$ und $v$, und bildet $(x\pm y)^2=u\pm 2v$, wodurch man $x+y$ und $x-y$ erhält.

Anm. Löst man die Gleichungen $x^2+y^2=2a$; $xy=b$ nach der unter 1) gegebenen Methode auf, so erhält man:

$$x=\sqrt{\frac{a+b}{2}}+\sqrt{\frac{a-b}{2}};\quad y=\sqrt{\frac{a+b}{2}}-\sqrt{\frac{a-b}{2}}.$$

Substituirt man dagegen den aus der zweiten Gleichung genommenen Werth $y=\frac{b}{x}$ in die erste, so folgt:

$$x=\sqrt{a+\sqrt{a^2-b^2}};\quad y=\sqrt{a-\sqrt{a^2-b^2}}.$$

Durch Vergleichung dieser Resultate folgt:

$$\sqrt{a\pm\sqrt{a^2-b^2}}=\sqrt{\frac{a+b}{2}}\pm\sqrt{\frac{a-b}{2}}. \qquad 120a.$$

Demnach kann man Doppelwurzeln, die von der Form $\sqrt{a\pm\sqrt{a^2-b^2}}$ sind, als Summen oder Differenzen einfacher Wurzeln darstellen. — (Aufgaben: Hofmann 2. Vierter Abschn. VIII. 15—60.)

2) Durch Addition oder Subtraction der gegebenen Gleichungen, durch Addition oder Subtraction von Gliedern, welche an einem vollständigen Quadrate fehlen, sucht man zwei der Verbindungen $(x\pm y)^2$, $x^2+y^2$, $xy$, einzuführen und die Gleichungen dadurch auf die Form 1) zu bringen. Ebenso, indem man die Gleichungen durch einander, oder durch Verbindungen der Unbekannten dividirt. Für diese Zwecke sind die Formeln wichtig: (45a), ferner

$$x^2 - y^2 = (x + y)(x - y);\ x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy.$$
$$(x \pm y)^3 = (x^3 \pm y^3) + 3xy(x \pm y);\ (x \pm y)^4 = (x^4 + y^4) \pm 4xy(x^2 + y^2) + 6x^2y^2.$$

Speciell empfiehlt sich für 2 Gleichungen von der Form $x^n + y^n = a$, $x + y = 2b$ die Substitution $x = b + z$, $y = b - z$, wodurch man eine Gleichung in $z$ erhält, die, wenn $n < 6$ ist, auf eine quadratische, wenn $n < 8$, auf eine Gleichung vom 3., wenn $n < 10$, auf eine solche vom 4. Grade reducirbar ist.

3) Homogene Gleichungen. — Wenn die auf derselben Seite der beiden Gleichungen stehenden Glieder von gleichem Grade in den Unbekannten sind (also die linken Seiten von gleichem Grade sind, und ebenso die rechten), so setzt man $y = xz$, und dividirt die Gleichungen durch einander, wodurch man eine Gleichung in $z$ erhält.

(Aufgaben: Hofmann 3. Zwölfter Abschn. III. Dreizehnter Abschn. III. — Bardey XXVIII. XXIX. XXX.)

## 3. Die Gleichung vom dritten Grade (cubische Gl.).

### a) Die reine Gleichung $\alpha^3 = 1$.

**108.** *Auflösung.* — Radicirt man auf beiden Seiten mit 3, so erhält man nach 79:

$$\alpha = \sqrt[3]{1} = 1.$$

Bringt man aber die Gleichung auf die Form

$$\alpha^3 - 1 = 0,$$

so kann man (nach 45a, oder auch, indem man durch $\alpha - 1$ dividirt) dafür schreiben:

$$(\alpha^2 + \alpha + 1)(\alpha - 1) = 0.$$

Demnach zerfällt die Gleichung $\alpha^3 = 1$ in die beiden Gleichungen:

$$\alpha - 1 = 0;\ \alpha^2 + \alpha + 1 = 0.$$

Bezeichnen wir die Wurzel der ersten durch $\alpha_1$, die Wurzeln der zweiten durch $\alpha_2$ und $\alpha_3$, so erhalten wir, nachdem die zweite Gleichung aufgelöst ist, die Werthe:

$$\alpha_1 = +1,\ \alpha_2 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2};\ \alpha_3 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2},$$

von denen jeder, statt $\alpha$ gesetzt, der Gleichung $\alpha^3 = 1$ genügt.

Der Ausdruck $\sqrt[3]{1}$ ist hiernach dreideutig, und ebenso hat $\sqrt[3]{a}$ stets drei verschiedene Werthe, von denen der eine

reell ist, während die beiden andern imaginär sind. Man kann diese drei Werthe nur durch Vorsetzung der unterscheidenden Factoren $\alpha_1$ (welcher wegbleiben kann), $\alpha_2$ und $\alpha_3$ kenntlich machen. Dieselben sind also:

$$\sqrt[3]{a},\ \alpha_2\sqrt[3]{a},\ \alpha_3\sqrt[3]{a},$$

worin $\alpha_2$ und $\alpha_3$ die oben angegebene Bedeutung haben.

Die Zahlen $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$ heissen die Cubikwurzeln der Einheit, und es bestehen zwischen ihnen die leicht abzuleitenden Formeln:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0; \qquad \alpha_2^2 = \alpha_3$$
$$\alpha_1\alpha_2 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_3\alpha_1 = 0; \qquad \alpha_3^2 = \alpha_2$$
$$\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = +1; \qquad \alpha_2\alpha_3 = +1.$$

b) Die gemischte Gleichung $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$.

**109.** *Herstellung der reducirten Form.* — Wir benutzen die (schon im vorigen Abschnitt, Nr. 99, 1) erwähnte) Substitution $x = y + \lambda$, um das zweite Glied der Gleichung zu entfernen. Diese Substitution giebt:

$$(y + \lambda)^3 + a(y + \lambda)^2 + b(y + \lambda) + c = 0,$$

oder:

$$\left.\begin{array}{r} y^3 + 3\lambda y^2 + 3\lambda^2 y + \lambda^3 \\ + \quad ay^2 + 2a\lambda y + a\lambda^2 \\ + \quad by + b\lambda \\ + c \end{array}\right| = 0.$$

Damit die Glieder, welche $y^2$ enthalten, verschwinden, muss offenbar

$$3\lambda + a = 0,\ \lambda = -\frac{a}{3}$$

sein. Man hat also, um die reducirte Form herzustellen, nur

$$x = y - \frac{a}{3}$$

zu setzen.

Anm. Enthält $a$ nicht den Factor 3, so kann man, um Quotienten zu vermeiden, die ganze Gleichung mit 27 multipliciren, und dann $3x = z$ setzen.

Die reducirte Form lautet dann, wenn man die Coefficienten der Potenzen von $y$ wieder durch einzelne Buchstaben bezeichnet:

$$y^3 + py = q.$$

Zur Vereinfachung der Rechnung nehmen wir an, $p$ sei durch 3 und $q$ durch 2 theilbar. Andernfalls kann man den Coefficienten $p$ oder $q$ diese Eigenschaften dadurch geben, dass man die Gleichung mit $3^3$ oder $2^3$ oder $6^3$ multiplicirt, und $3x$ oder $2x$ oder $6x$ gleich $z$ setzt. In jedem Falle also kann die Gleichung auf die Form gebracht werden:

$$y^3 + 3py = 2q.$$

**110.** *Auflösung.**) — Man setzt, ähnlich wie vorher,

$$1) \quad y = u + v$$

und erhält:

$$u^3 + v^3 + 3uv(u + v) + 3p(u + v) = 2q,$$

oder, indem man $3(u+v)$ als gemeinsamen Factor heraussetzt:

$$u^3 + v^3 + 3(u + v)(uv + p) = 2q.$$

Bestimmt man nun $v$ durch die Bedingung

$$2) \quad uv + p = 0, \text{ oder } v = -\frac{p}{u},$$

so geht die Gleichung über in

$$u^3 + v^3 = 2q.$$

Aus 2) folgt ferner

$$u^3v^3 = -p^3.$$

Setzt man endlich

$$3) \quad u^3 = u_1,\ v^3 = v_1,$$

so lauten die beiden letzten Gleichungen:

$$u_1 + v_1 = 2q;\ \ u_1v_1 = -p^3.$$

Wenn man nun die erste dieser Gleichungen mit 2 potenzirt, die zweite mit 4 multiplicirt und von der ersten subtrahirt, so bleibt:

$$u_1^2 - 2u_1v_1 + v_1^2 = 4q^2 + 4p^3$$

oder:

$$(u_1 - v_1)^2 = 4(q^2 + p^3);$$

$$u_1 - v_1 = 2\sqrt{q^2 + p^3}.$$

---

*) Unter den verschiedenen zur Lösung führenden Methoden ist hier die kürzeste und übersichtlichste (von Hudde), ihrer practischen Brauchbarkeit wegen, gewählt, obwohl sie den zur Lösung der quadratischen Gleichung angeführten Methoden nicht analog ist, und ihre Brauchbarkeit als glücklicher Zufall erscheint. Der den Lösungen der Gleichungen 2., 3. und 4. Grades gemeinsam zu Grunde liegende Gedanke wird, weil seine directe Verwendung zur Lösung viel zu umständlich ist, erst später Erwähnung finden. — Beispiel s. am Schluss des Buches in der „Uebersicht der Formeln und Regeln“.

Diese Gleichung giebt in Verbindung mit $u_1 + v_1 = 2q$ die Werthe:

$$u_1 = q + \sqrt{q^2 + p^3}; \quad v_1 = q - \sqrt{q^2 + p^3}.$$

Dann folgt aus 3)

$$u = \sqrt[3]{q + \sqrt{q^2 + p^3}}; \quad v = \sqrt[3]{q - \sqrt{q^2 + p^3}},$$

und aus 1)

$$y = \sqrt[3]{q + \sqrt{q^2 + p^3}} + \sqrt[3]{q - \sqrt{q^2 + p^3}}.$$

Anm. Diese Formel, welche zunächst eine Wurzel der Gleichung finden lehrt, heisst die cardanische.*)

Um alle Wurzeln der Gleichung zu finden, ist zu beachten, dass $u = \sqrt[3]{u_1}$ und $v = \sqrt[3]{v_1}$ je drei Werthe haben, sodass, wenn man diese Werthe beliebig zusammenstellen dürfte,

$$y = \sqrt[3]{u_1} + \sqrt[3]{v_1}$$

im Ganzen neun Werthe haben würde. Aber aus 2) $v = -\frac{p}{u}$ folgt, dass zu jedem Werthe von $u$ nur ein einziger bestimmter Werth von $v$ gehört. Nun sind die drei Werthe von $u$:

$$\alpha_1 u, \ \alpha_2 u, \ \alpha_3 u,$$

mithin die entsprechenden von $v$:

$$\frac{-p}{\alpha_1 u}, \ \frac{-p}{\alpha_2 u}, \ \frac{-p}{\alpha_3 u},$$

oder, da $\alpha_1 = 1$, $\frac{1}{\alpha_2} = \alpha_3$, $\frac{1}{\alpha_3} = \alpha_2$ ist:

$$-\frac{\alpha_1 p}{u}, \ -\frac{\alpha_3 p}{u}, \ -\frac{\alpha_2 p}{u},$$

d. h., wenn man $-\frac{p}{u}$ durch $v$ ersetzt:

$$\alpha_1 v, \ \alpha_3 v, \ \alpha_2 v.$$

Demnach hat $y$ die drei Wurzeln:

$$y_1 = u + v; \quad y_2 = \alpha_2 u + \alpha_3 v; \quad y_3 = \alpha_3 u + \alpha_2 v.$$

**111.** *Untersuchung der Wurzeln.* — Die Reellität der drei Wurzeln hängt ab von dem in den Werthen von $u$ und $v$ vor-

*) Cardanus, italienischer Mathematiker (1501—75), veröffentlichte die von seinem Freunde Tartaglia gefundene, ihm als Geheimniss anvertraute Formel.

kommenden Radicanden $q^2 + p^3$. Hier sind drei Fälle zu unterscheiden.

1) $q^2 + p^3 > 0$. Dann sind $u$ und $v$ reell, und von einander verschieden, folglich $y_1$ reell, aber $y_2$ und $y_3$ imaginär wegen der darin enthaltenen Factoren $\alpha_2$ und $\alpha_3$, deren imaginäre Theile sich nicht wegheben.

2) $q^2 + p^3 = 0$. Dann sind $u$ und $v$ reell und einander gleich, folglich $y_1$ reell, $y_2$ und $y_3$ reell und einander gleich, weil beide gleich $u(\alpha_2 + \alpha_3)$, und $\alpha_2 + \alpha_3 = -1$, also reell ist.

3) $q^2 + p^3 < 0$. Dann sind $u$ und $v$ imaginär, nämlich, wenn wir $q^2 + p^3 = -r^2$ setzen:

$$u = \sqrt[3]{q + ri}; \quad v = \sqrt[3]{q - ri}.$$

Da nun durch Radicirung einer complexen Zahl mit einer reellen wieder eine complexe entsteht, und die beiden Werthe von $u$ und $v$ sich nur durch das Vorzeichen von $i$ unterscheiden, so kann man setzen:

$$u = q_1 + r_1 i; \quad v = q_1 - r_1 i.^{*)}$$

Mithin ist in diesem Falle

$$y_1 = 2q_1; \; y_2 = q_1(\alpha_2 + \alpha_3) + r_1 i(\alpha_2 - \alpha_3); \; y_3 = q_1(\alpha_3 + \alpha_2) + r_1 i(\alpha_3 - \alpha_2)$$

oder, da $\alpha_2 - \alpha_3 = i\sqrt{3}$ ist:

$$y_2 = -q_1 - r_1\sqrt{3}; \quad y_3 = -q_1 + r_1\sqrt{3}.$$

Es sind also alle drei Wurzeln reell, obwohl sie alle in imaginärer Form erscheinen.

Anm. Da kein Verfahren bekannt ist, die Werthe von $q_1$ und $r_1$ aus $q$ und $r$ algebraisch zu bestimmen, oder, anders gesagt, die imaginären Formen der drei Wurzeln durch algebraische Rechnung in die reellen zu verwandeln, so heisst dieser dritte Fall der irreductible. — Wie die Bestimmung der Wurzeln in reeller Form mittelst transcendenter Ausdrücke ausgeführt werden kann, wird später gezeigt werden. — Auch rationale Wurzeln erscheinen oft in irrationaler Form. Man berechnet alsdann die Irrational-Zahlen als Decimalbrüche (nach Nr. 167).

(Aufgaben: Bardey XXXVIII.)

**112.** *Zusammenhang zwischen den Wurzeln und den Coefficienten der Gleichung.* — Sind $x_1$, $x_2$, $x_3$ die Wurzeln der vollständigen cubischen Gleichung, so ist

$$x - x_1 = 0, \; x - x_2 = 0, \; x - x_3 = 0,$$

---

*) Man bestimme aus diesen und den vorigen Formeln $u^3$ und $v^3$, setze die beiden Werthe jeder dieser Grössen gleich, und stelle durch Gleichsetzung der reellen und der imaginären Theile die Beziehungen zwischen $q$, $r$, $q_1$, $r_1$ fest.

oder, durch Multiplication dieser Gleichungen:

$$(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = 0.$$

Da diese Gleichung ebenso wie die gegebene cubische Gleichung durch jeden der drei Werthe $x_1$, $x_2$, $x_3$, wenn man ihn für $x$ setzt, befriedigt wird, so müssen beide Gleichungen Glied für Glied mit einander übereinstimmen. Löst man also in der letzten Gleichung die Klammern, sodass sie übergeht in:

$$x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1)x - x_1x_2x_3 = 0,$$

und vergleicht damit die allgemeine cubische Gleichung

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0,$$

so folgt:

1) $x_1 + x_2 + x_3 = -a$;
2) $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = b$;
3) $x_1x_2x_3 = -c$;

d. h.: In jeder geordneten und auf Null gebrachten 121.
vollständigen cubischen Gleichung ist die Summe der drei Wurzeln gleich dem entgegengesetzt genommenen Coefficienten des zweiten, die Summe der Producte je zweier gleich dem des dritten Gliedes, und das Product der drei Wurzeln gleich dem entgegengesetzt genommenen vierten Gliede.

Anm. Dieses Resultat lässt sich bestätigen, indem man für $x_1$, $x_2$, $x_3$ die oben gefundenen Werthe setzt. Für die reducirte Gleichung ist $a = 0$, $b = 3p$, $c = -2q$. — Der grösseren Einfachheit wegen ist zur Ableitung dieses Satzes hier der entgegengesetzte Weg gewählt, wie an entsprechender Stelle bei den quadratischen Gleichungen. Aehnliche Bemerkungen wie dort lassen sich auch hier über die Bildung einer Gleichung aus gegebenen Wurzeln machen, sowie über die Bedingungen der reinen cubischen Gleichung. — Ist eine Wurzel $x_1$ bekannt, so findet man die anderen am einfachsten, indem man die linke Seite der auf Null gebrachten cubischen Gleichung durch $x - x_1$ dividirt, und den Quotienten wieder gleich Null setzt. — Auf eine cubische Gleichung lässt sich unter andern zurückführen jede Gleichung von der Form $x^{3n} + ax^{2n} + bx^n + c = 0$, ferner die symmetrischen Gleichungen 6. und 7. Grades, wobei nur zu beachten, dass $x^3 + \frac{1}{x^3} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3\left(x + \frac{1}{x}\right)$ ist. Vgl. die Anm. zu Nr. 99 am Ende.

## 4. Die Gleichung vom vierten Grade (biquadratische Gl.).

### a) Die reine Gleichung $\alpha^4 = 1$.

**113.** *Auflösung.* — Radicirt man auf beiden Seiten mit 4, so erhält man nach 79:

$$\alpha = \sqrt[4]{1} = 1.$$

Bringt man aber die Gleichung auf die Form

$$\alpha^4 - 1 = 0,$$

so kann man dafür schreiben:

$$(\alpha^2 - 1)(\alpha^2 + 1) = 0.$$

Demnach zerfällt die Gleichung $\alpha^4 = 1$ in die beiden Gleichungen

$$\alpha^2 - 1 = 0; \quad \alpha^2 + 1 = 0.$$

Bezeichnet man die Wurzeln der ersten Gleichung mit $\alpha_1$ und $\alpha_2$, die der zweiten mit $\alpha_3$ und $\alpha_4$, so findet sich:

$$\alpha_1 = +1, \quad \alpha_2 = -1, \quad \alpha_3 = +i, \quad \alpha_4 = -i.$$

Demnach hat der Ausdruck $\sqrt[4]{1}$, und ebenso der allgemeinere: $\sqrt[4]{a}$ vier verschiedene Werthe, von denen zwei reell, die andern beiden imaginär sind. Man kann demnach die vier Werthe von $\sqrt[4]{a}$ durch die Bezeichnungen unterscheiden:

$$+\sqrt[4]{a}, \quad -\sqrt[4]{a}, \quad +i\sqrt[4]{a}, \quad -i\sqrt[4]{a}.$$

Die Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ heissen die vierten Wurzeln (Biquadratwurzeln) der Einheit, und es bestehen zwischen ihnen die Formeln:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 0;$$
$$\alpha_1\alpha_2 + \alpha_3\alpha_4 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_4 + \alpha_1\alpha_4 + \alpha_2\alpha_3 = 0;$$
$$\alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3\alpha_4 + \alpha_3\alpha_4\alpha_1 + \alpha_4\alpha_1\alpha_2 = 0;$$
$$\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4 = -1.$$

b) Die gemischte Gleichung $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$.

**114.** *Herstellung der reducirten Form.* — Setzt man ebenso wie bei der cubischen Gleichung $x = y + \lambda$, so ist $4\lambda + a$ der Coefficient von $y^3$; dieses Glied verschwindet also, wenn

$$4\lambda + a = 0, \quad \lambda = -\frac{a}{4}$$

ist. Man hat also, um die reducirte Form herzustellen, nur

$$x = y - \frac{a}{4}$$

zu setzen.

Anm. Enthält $a$ nicht den Factor 4, so kann man, um Quotienten zu vermeiden, die ganze Gleichung mit $4^4$ multipliciren, und dann $4x = z$ setzen.

Die reducirte Form lautet dann, wenn man die Coefficienten der Potenzen von $y$ wieder durch einfache Buchstaben bezeichnet:

$$y^4 + py^2 + qy = r.$$

**115.** *Auflösung.**) — Man setzt

1) $p = u - v$

und bestimmt $u$ und $v$ so, dass die Gleichung die Form der gemischt-quadratischen annimmt. Durch die Substitution 1) geht die gegebene Gleichung über in

$$y^4 + uy^2 = vy^2 - qy + r$$

oder

$$\left(y^2 + \frac{u}{2}\right)^2 = vy^2 - qy + \left(r + \frac{u^2}{4}\right).$$

Jetzt also sind $u$ und $v$ so zu bestimmen, dass die rechte Seite dieser Gleichung die vollständige zweite Potenz einer Differenz $\mu y - \nu$ wird, also die Form annimmt

$$\mu^2 y^2 - 2\mu\nu y + \nu^2.$$

Demnach muss sein:

$$\mu^2 = v,\ 2\mu\nu = q,\ \nu^2 = r + \frac{u^2}{4},$$

oder, wenn man das vierfache Product von $\mu^2$ und $\nu^2$ dem Quadrat von $2\mu\nu$ gleich setzt:

$$4v\left(r + \frac{u^2}{4}\right) = q^2,$$

oder, wenn man aus 1) $v = u - p$ einsetzt:

$$4(u-p)\left(r + \frac{u^2}{4}\right) = q^2,$$

oder endlich durch Lösung der Klammern:

2) $u^3 - pu^2 + 4ru = q^2 + 4pr.$

Nachdem nun $u$ aus der Gleichung 2) und $v$ aus 1) gefunden ist, kann die Hauptgleichung geschrieben werden:

$$y^2 + \frac{u}{2} = \pm(\mu y - \nu) = \pm\left[\sqrt{u-p}\,.\,y - \sqrt{r + \frac{u^2}{4}}\right]$$

oder:

$$y^2 \quad \sqrt{u-p}\,.\,y = \mp\sqrt{r + \frac{u^2}{4}} - \frac{u}{2}.$$

---

*) Auch hier, wie bei den cubischen Gleichungen, ist die kürzeste Methode (von Ferrari, Schüler des Cardanus, 1522—65) gewählt, die gewöhnlich auf die allgemeine Gleichung 4. Grades angewendet wird, aber bei Benutzung der reducirten Form sich noch weiter vereinfacht. — Beispiel s. am Schluss des Buches in der „Uebersicht der Formeln und Regeln".

Diese Gleichung theilt sich in die beiden folgenden:

$$3)\quad \begin{cases} y^2 + \sqrt{u-p}\,.\,y = +\sqrt{r+\frac{u^2}{4}} - \frac{u}{2}; \\ y^2 - \sqrt{u-p}\,.\,y = -\sqrt{r+\frac{u^2}{4}} - \frac{u}{2}, \end{cases}$$

welche zusammen vier Werthe für $y$ geben. — Hiernach hat die Gleichung vierten Grades vier Wurzeln.

Anm. Da die Gleichung 2) drei Wurzeln ($u_1$, $u_2$, $u_3$) hat, die alle in 3) eingesetzt werden können, so erhält man aus 3) im Ganzen 6 quadratische Gleichungen, und es könnte scheinen, als hätte die vorgelegte Gleichung 12 Wurzeln. Bezeichnet man aber die aus $u_1$ sich ergebenden 4 Wurzeln von 3) mit $y_1$, $y_2$, $y_3$, $y_4$, so ist nach 113:

$$y_1 y_2 = \frac{u_1}{2} - \sqrt{r+\frac{u_1^2}{4}}; \quad y_3 y_4 = \frac{u_1}{2} + \sqrt{r+\frac{u_1^2}{4}};$$

mithin

$$u_1 = y_1 y_2 + y_3 y_4.$$

Diese Gleichung drückt den Zusammenhang aus zwischen den Werthen von $y$ und denen von $u$. Andre Werthe von $u$, die von $u_1$ verschieden sind, werden sich ergeben, wenn man die Werthe der $y$ in dem Ausdruck $y_1 y_2 + y_3 y_4$ anders ordnet. Dies ist aber nur noch auf zweifache Weise möglich (nämlich $y_2 y_3 + y_1 y_4$ und $y_3 y_1 + y_2 y_4$). Folglich ist

$$u_2 = y_2 y_3 + y_1 y_4; \quad u_3 = y_3 y_1 + y_2 y_4.$$

Setzt man also $u_2$ oder $u_3$ statt $u_1$ in die Gleichungen 3) ein, so erhält man dieselben 4 Werthe von $y$ wie vorher, nur in anderer Zusammenstellung.

(Aufgaben: Bardey XXXIX.)

**116.** *Untersuchung der Wurzeln.* — Da die cubische Gleichung 2) jedenfalls wenigstens eine reelle Wurzel hat, so kann man diese in 3) einsetzen, und sieht dann, dass die Gleichung vierten Grades entweder vier reelle, oder zwei reelle und zwei imaginäre, oder vier imaginäre Wurzeln hat, je nachdem von den Gleichungen 3) jede, oder eine, oder keine ein Paar reeller Wurzeln hat.

**117.** *Zusammenhang zwischen den Wurzeln und den Coefficienten der Gleichung.* — Sind $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$ die Wurzeln der vollständigen biquadratischen Gleichung, so ist

$$x - x_1 = 0,\ x - x_2 = 0,\ x - x_3 = 0,\ x - x_4 = 0,$$

oder:

$$(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4) = 0.$$

Diese Gleichung muss nach Lösung der Klammern mit der gegebenen Glied für Glied übereinstimmen, da beide durch dieselben Werthe von $x$ befriedigt werden. Man erhält also,

ähnlich wie bei der cubischen Gleichung, durch Gleichsetzung der Coefficienten:

1) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -a,$ 122.

2) $x_1x_2 + x_3x_4 + x_2x_3 + x_1x_4 + x_3x_1 + x_2x_4 = b,$*)

3) $x_1x_2x_3 + x_2x_3x_4 + x_3x_4x_1 + x_4x_1x_2 = -c,$

4) $x_1x_2x_3x_4 = d.$

Hiernach besteht zwischen den Wurzeln und den Coefficienten der biquadratischen Gleichung ein ähnlicher Zusammenhang, wie er bei den früheren Gleichungen hervortrat.

**118.** *Gemeinsame Methode zur Lösung der Gleichungen 2., 3. und 4. Grades.* — Man bildet eine zweite Gleichung von demselben Grade, und stellt zwischen den beiderseitigen Wurzeln Beziehungen auf, welche willkürliche Grössen enthalten. Diese Grössen bestimmt man alsdann so, dass die Hilfsgleichung durch Wegfall von Gliedern eine einfachere Form annimmt.

1) *Die quadratische Gleichung*

$$x^2 + ax = b.$$

Wir stellen die Hilfsgleichung auf

$$y^2 - (y_1 + y_2)y = -y_1y_2,$$

und die Bedingungsgleichung

$$y_1 + y_2 = 0,$$

und setzen

$$1)\quad y_1 = \frac{x_1 - \alpha}{x_1 - \beta};\quad y_2 = \frac{x_2 - \alpha}{x_2 - \beta}.$$

Dann lautet die Bedingungsgleichung für $\alpha$ und $\beta$:

$$\frac{x_1 - \alpha}{x_1 - \beta} + \frac{x_2 - \alpha}{x_2 - \beta} = 0$$

oder:

$$(x_1 - \alpha)(x_2 - \beta) + (x_1 - \beta)(x_2 - \alpha) = 0$$

oder:

$$2x_1x_2 - \alpha(x_1 + x_2) - \beta(x_1 + x_2) + 2\alpha\beta = 0,$$

oder, da $x_1 + x_2 = -a$, $x_1x_2 = -b$ ist:

$$2)\quad -2b + (\alpha + \beta)a + 2\alpha\beta = 0.$$

Hierin kann man einer der beiden Grössen $\alpha$ und $\beta$ einen beliebigen Werth geben, und die andere aus der Gleichung bestimmen. Die Hilfsgleichung aber geht über in

$$y^2 = -y_1y_2,$$

*) Wie hätte man diese Formel durch Betrachtung der Werthe von $u_1$, $u_2$, $u_3$ finden können?

oder wenn wir die Werthe 1) einsetzen:

$$y^2 = -\frac{(x_1-\alpha)(x_2-\alpha)}{(x_1-\beta)(x_2-\beta)} = -\frac{x_1x_2-\alpha(x_1+x_2)+\alpha^2}{x_1x_2-\beta(x_1+x_2)+\beta^2},$$

oder:

$$3)\quad y^2 = -\frac{-b+\alpha a+\alpha^2}{-b+\beta a+\beta^2} = -\frac{b-\alpha a-\alpha^2}{b-\beta a-\beta^2}.$$

Hieraus findet man (da $\alpha$ und $\beta$ aus 2) schon bekannt sind) $y_1$ und $y_2$, und, indem man die linearen Gleichungen 1) nach $x_1$ und $x_2$ auflöst, auch diese Grössen.

2) *Die cubische Gleichung*

$$x^3 + ax^2 + bx = c.$$

Wir stellen die Hilfsgleichung auf:

$$y^3 - (y_1+y_2+y_3)y^2 + (y_1y_2+y_2y_3+y_3y_1)y = y_1y_2y_3$$

und die Bedingungsgleichungen:

$$y_1+y_2+y_3=0;\quad y_1y_2+y_2y_3+y_3y_1=0,$$

welche letztere, durch $y_1y_2y_3$ dividirt, die Form erhält:

$$\frac{1}{y_1}+\frac{1}{y_2}+\frac{1}{y_3}=0.$$

Ferner setzen wir:

$$1)\quad y_1=\frac{x_1-\alpha}{x_1-\beta};\quad y_2=\frac{x_2-\alpha}{x_2-\beta};\quad y_3=\frac{x_3-\alpha}{x_3-\beta}.$$

Dann lauten die beiden Bedingungsgleichungen:

$$\frac{x_1-\alpha}{x_1-\beta}+\frac{x_2-\alpha}{x_2-\beta}+\frac{x_3-\alpha}{x_3-\beta}=0;\quad \frac{x_1-\beta}{x_1-\alpha}+\frac{x_2-\beta}{x_2-\alpha}+\frac{x_3-\beta}{x_3-\alpha}=0.$$

Die erste erhält nach Entfernung der Nenner die Gestalt:

$$3x_1x_2x_3 - (2\beta+\alpha)(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1) + (\beta^2+2\alpha\beta)(x_1+x_2+x_3) - 3\alpha\beta^2 = 0,$$

oder, da $x_1+x_2+x_3=-a$, $x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=b$, $x_1x_2x_3=c$ ist, und die zweite Bedingungsgleichung aus der ersten durch Vertauschung von $\alpha$ und $\beta$ hervorgeht:

$$2)\ \begin{cases} 3c-(2\beta+\alpha)b-(\beta^2+2\alpha\beta)a-3\alpha\beta^2=0; \\ 3c-(2\alpha+\beta)b-(\alpha^2+2\alpha\beta)a-3\beta\alpha^2=0. \end{cases}$$

Diese beiden Gleichungen bestimmen $\alpha$ und $\beta$ vollständig.

Anm. Um die Werthe von $\alpha$ und $\beta$ zu erhalten, subtrahirt man die zweite Gleichung von der ersten, und erhält:

$$-(\beta-\alpha)b-(\beta^2-\alpha^2)a-3\alpha\beta(\beta-\alpha)=0,$$

oder, wenn man durch $-(\beta-\alpha)$ dividirt:

$$b+(\beta+\alpha)a+3\alpha\beta=0.$$

Addirt man ferner die Gleichungen 2), so folgt:

$$6c - 3(\alpha + \beta)b - [(\alpha + \beta)^2 + 2\alpha\beta]a - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) = 0.$$

Betrachtet man in diesen letzten Gleichungen $\alpha + \beta$ und $\alpha\beta$ als Unbekannte, so ist die erste linear, die zweite quadratisch, also sind $\alpha + \beta$ und $\alpha\beta$, und folglich auch $\alpha$ und $\beta$ selbst ohne Schwierigkeit bestimmbar.

Die Hilfsgleichung geht über in

$$y^3 = y_1 y_2 y_3,$$

oder, wenn wir die Werthe 1) einsetzen:

$$3)\ y^3 = \frac{(x_1-\alpha)(x_2-\alpha)(x_3-\alpha)}{(x_1-\beta)(x_2-\beta)(x_3-\beta)} = \frac{c-\alpha b-\alpha^2 a-\alpha^3}{c-\beta b-\beta^2 a-\beta^3}.$$

Hieraus findet man $y_1$, $y_2$, $y_3$, und, indem man die linearen Gleichungen 1) nach $x_1$, $x_2$, $x_3$ auflöst, auch diese Grössen.

3) *Die biquadratische Gleichung*

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx = d.$$

Wir stellen die Hilfsgleichung auf:

$$y^4 - (y_1 + y_2 + ..)y^3 + (y_1y_2 + y_3y_4 + ..)y^2 - (y_1y_2y_3 + y_2y_3y_4 + ..)y = -y_1y_2y_3y_4,$$

und die Bedingungsgleichungen:

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 0;\ y_1y_2y_3 + y_2y_3y_4 + y_3y_4y_1 + y_4y_1y_2 = 0,$$

welche letztere, durch $y_1y_2y_3y_4$ dividirt, die Form erhält:

$$\frac{1}{y_1} + \frac{1}{y_2} + \frac{1}{y_3} + \frac{1}{y_4} = 0.$$

Ferner setzen wir:

$$1)\ y_1 = \frac{x_1-\alpha}{x_1-\beta};\ y_2 = \frac{x_2-\alpha}{x_2-\beta};\ y_3 = \frac{x_3-\alpha}{x_3-\beta};\ y_4 = \frac{x_4-\alpha}{x_4-\beta}.$$

Dann lauten die beiden Bedingungsgleichungen:

$$\frac{x_1-\alpha}{x_1-\beta} + \frac{x_2-\alpha}{x_2-\beta} + \frac{x_3-\alpha}{x_3-\beta} + \frac{x_4-\alpha}{x_4-\beta} = 0;$$

$$\frac{x_1-\beta}{x_1-\alpha} + \frac{x_2-\beta}{x_2-\alpha} + \frac{x_3-\beta}{x_3-\alpha} + \frac{x_4-\beta}{x_4-\alpha} = 0.$$

Beseitigt man in der ersten die Nenner,*) beachtet, dass $x_1 + x_2 + \ldots = -a$, $x_1x_2 + x_3x_4 + \ldots = b$, $x_1x_2x_3 + x_2x_3x_4 + \ldots$

*) Aus dem ersten Gliede: $(x_1-\alpha)(x_2-\beta)(x_3-\beta)(x_4-\beta) = x_1x_2x_3x_4 - \beta(x_1x_2x_3 + x_1x_3x_4 + x_1x_2x_4) + \beta^2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4) - x_1\beta^3 - \alpha x_2x_3x_4 + \alpha\beta(x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_2) - \alpha\beta^2(x_2 + x_3 + x_4) + \alpha\beta^3$ findet man das zweite, indem man statt der Indices 1, 2, 3, 4 resp. 2, 3, 4, 1 setzt, und ebenso aus dem zweiten das dritte u. s. f.

$= -c$, $x_1 x_2 x_3 x_4 = -d$ ist, und bildet aus der ersten Gleichung die zweite durch Vertauschung von $\alpha$ und $\beta$, so folgt:

$$2)\ \begin{cases} -4d + (3\beta + \alpha)c + 2\beta(\alpha+\beta)b + \beta^2(3\alpha+\beta)a + 4\alpha\beta^3 = 0; \\ -4d + (3\alpha + \beta)c + 2\alpha(\alpha+\beta)b + \alpha^2(3\beta+\alpha)a + 4\beta\alpha^3 = 0. \end{cases}$$

Diese beiden Gleichungen bestimmen $\alpha$ und $\beta$ vollständig.

Anm. Um die Werthe von $\alpha$ und $\beta$ zu erhalten, subtrahirt man die zweite Gleichung von der ersten und erhält:

$$2c(\beta-\alpha) + 2(\alpha+\beta)b(\beta-\alpha) + [\beta^3 - \alpha^3 + 3\alpha\beta(\beta-\alpha)]a + 4\alpha\beta(\beta^2-\alpha^2) = 0,$$

oder, wenn man durch $\beta - \alpha$ dividirt:

$$2c + 2(\alpha+\beta)b + (\beta^2 + 4\alpha\beta + \alpha^2)a + 4\alpha\beta(\alpha+\beta) = 0,$$

oder:

$$\text{a)}\ 2c + 2(\alpha+\beta)b + [(\alpha+\beta)^2 + 2\alpha\beta]a + 4\alpha\beta(\alpha+\beta) = 0.$$

Addirt man ferner die Gleichungen 2), so folgt:

$$-8d + 4(\alpha+\beta)c + 2(\alpha+\beta)^2 b + (\alpha+\beta)^3 a + 4\alpha\beta(\alpha^2+\beta^2) = 0,$$

oder:

$$\text{b)}\ -8d + 4(\alpha+\beta)c + 2(\alpha+\beta)^2 b + (\alpha+\beta)^3 a + 4\alpha\beta[(\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta] = 0.$$

Setzt man ferner $\alpha + \beta = u$, $\alpha\beta = v$, multiplicirt a) mit $u$ und subtrahirt diese Gleichung von b), so bleibt nach Division durch 2:

$$\text{c)}\ -4d + cu - auv - 4v^2 = 0,$$

oder:

$$u = \frac{4(v^2+d)}{c - av}.$$

Dieser Werth wird in

$$\text{a)}\ 2c + 2u(b + 2v) + (u^2 + 2v)a = 0$$

eingesetzt, und man erhält eine Gleichung vom 3. Grade in $v$. Aus dieser lässt sich $v$, sodann $u$, und schliesslich $\alpha$ und $\beta$ auf bekannte Weise bestimmen.

Die Hilfsgleichung geht über in

$$y^4 + (y_1 y_2 + y_3 y_4 + \ldots)y^2 = -y_1 y_2 y_3 y_4,$$

oder, wenn wir die Werthe 1) einsetzen:*)

$$y^4 + \frac{-6d + 3(\alpha+\beta)c + (\alpha^2+\beta^2+4\alpha\beta)b + 3\alpha\beta(\alpha+\beta)a + 6\alpha^2\beta^2}{-d + \beta c + \beta^2 b + \beta^3 a + \beta^4}\, y^2$$
$$= -\frac{-d + \alpha c + \alpha^2 b + \alpha^3 a + \alpha^4}{-d + \beta c + \beta^2 b + \beta^3 a + \beta^4}.$$

Aus dieser Gleichung, die, wenn man $y^2 = z$ setzt, eine gemischt-quadratische ist, findet man $y_1$, $y_2$, $y_3$, $y_4$, und, indem man die linearen Gleichungen 1) nach $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$ auflöst, auch diese Grössen.

---

*) Aus $y_1 y_2 = \dfrac{(x_1-\alpha)(x_2-\alpha)(x_3-\beta)(x_4-\beta)}{(x_1-\beta)(x_2-\beta)(x_3-\beta)(x_4-\beta)}$ geht $y_3 y_4$ hervor, wenn man im Dividend $\alpha$ und $\beta$ vertauscht. Ferner aus $y_1 y_2 + y_3 y_4$ die beiden anderen entsprechenden Ausdrücke, indem man statt der Indices 1, 2, 3 resp. 2, 3. 1 setzt.

Anm. Bei Gleichungen von höherem Grade führt die hier befolgte Methode nicht zum Ziele, da die Beseitigung zweier Glieder nicht ausreicht, um die gegebene Gleichung auf eine solche von niedrigerem Grade zu reduciren. Ueberhaupt sind dieselben im Allgemeinen durch algebraische Methoden nicht lösbar. Auch lässt sich einstweilen von ihren Eigenschaften nur sagen, dass man aus $n$ gegebenen Zahlen $x_1, x_2, \ldots x_n$ eine Gleichung $n^{\text{ten}}$ Grades bilden kann, deren Wurzeln diese Zahlen sind, und dass zwischen den Wurzeln und Coefficienten dieser allgemeinen Gleichung analoge Beziehungen existiren, wie wir sie bei den Gleichungen vom 2., 3. und 4. Grade kennen lernten. Ueber Elimination einer Unbekannten aus zwei höheren Gleichungen s. Nr. 157, 2).

## II. Exponentialgleichungen.

**119.** *Auflösung.**) — Eine Exponentialgleichung ist lösbar, wenn sie sich durch die Substitution

$$a^x = y$$

auf eine lösbare algebraische Gleichung zurückführen lässt.

Anm. Die gegebene Gleichung ist also derartig umzuformen, dass $x$ nur in den Verbindungen $a^x$, $a^{2x}$, $a^{3x}$ .. vorkommt.

Es genügt daher, die Gleichung

$$a^x = b$$

zu betrachten, in welche die obige Gleichung übergeht, nachdem für $y$ aus einer algebraischen Gleichung der Werth $b$ gefunden ist. Indem man die Gleichung $a^x = b$ nach einer beliebigen Zahl $n$ logarithmirt, erhält man

$$x \,.\, {}^n l a = {}^n l b.$$

oder:

$$x = \frac{{}^n l b}{{}^n l a},$$

wodurch die Gleichung gelöst ist.

(Aufgaben: Hofmann 3. Elfter Abschn. VI. — Bardey XXII.)

# D. Die Reihen.

**120.** *Vorbemerkung.* — Die Division zweier Polynome giebt nach zwei Seiten zur Bildung eines neuen Begriffes Anlass. Erstens bemerkt man bei Ausführung von Divisionen wie $\frac{a^n - b^n}{a - b}$, $\frac{1}{1 \pm x}$, dass jedes Glied des Quotienten in gesetz-

*) Beispiel s. am Schluss des Buches in der „Uebersicht der Formeln und Regeln".

mässiger Weise aus dem vorhergehenden gebildet werden kann, sodass, wenn nach Berechnung einiger Glieder das Bildungsgesetz klar wird, man die folgenden Glieder nicht mehr auf dem Wege der Division, sondern durch Anwendung dieses Bildungsgesetzes bestimmt. Dabei erhebt sich die Frage nach den verschiedenen möglichen Bildungsgesetzen, eine Frage, welche durch die Lehre von den Reihen beantwortet wird. Zweitens wurde schon gelegentlich der Division zweier Polynome gezeigt, dass, wenn der Divisor kein Factor des Dividend ist, der Quotient eine endlose Anzahl von Gliedern besitzt, und dass die Aufstellung solcher Quotienten eine Erweiterung des Polynom-Begriffs in sich schliesst. Hierdurch gelangen wir zum Begriff der unendlichen Reihe, deren besondere Eigenschaften zu ermitteln sein werden.

Die Glieder einer Reihe können entweder durch Addition oder durch Multiplication mit einander verbunden sein; hiernach können wir Reihen erster oder zweiter Stufe unterscheiden.

Ferner kann jedes Glied einer Reihe aus dem vorhergehenden mittelst derselben Zahl gebildet sein, oder mittelst einer Folge von Zahlen, die selbst wieder eine Reihe bilden. Hiernach unterscheidet man Reihen verschiedener Ordnung.

Endlich kann die Zahl, durch welche ein Glied aus dem vorhergehenden gebildet wird, demselben entweder durch Addition, Multiplication oder Potenzirung hinzugefügt werden. Hiernach unterscheidet man Summenreihen, Productreihen und Potenzreihen.

Anm. Ist die hinzugefügte Zahl im ersten Falle eine negative, im zweiten und dritten eine umgekehrte Zahl, so wird das folgende Glied durch Subtraction, Division, Radicirung gebildet, und die Reihe heisst fallend. Andernfalls heisst sie steigend.

Noch allgemeiner, als es in der letzten Eintheilung geschah, kann der Begriff der Reihe gefasst werden durch Verallgemeinerung des Gesetzes, nach welchem ein Glied aus dem vorhergehenden gebildet wird. Solche Reihen bleiben jedoch für's Erste von unserer Betrachtung ausgeschlossen.

# I. Die Summenreihe (arithmetische Reihe).

## 1. Reihen erster Ordnung.

### a. Reihen erster Stufe.

**121.** *Erklärungen.* — 1) Eine Summe $s$ von Gliedern, welche durch wiederholte Addition derselben Zahl $d$ aus einer Zahl $a$ gebildet sind, heisst eine arithmetische Reihe (erster Ordnung).

2) Das erste Glied $a$ heisst Anfangsglied, der wiederholte Summand $d$ die Differenz, und das letzte Glied $u$ das Endglied der Reihe. Die allgemeine Form der Reihe ist

1) $s = a + (a + d) + (a + 2d) + \dots + u.$ 123.

Bezeichnet man die Glieder der Reihe durch $a_1$, $a_2$, ... $a_n$, ... so ist das $n^{te}$ Glied (das allgemeine Glied)

$$a_n = a + (n - 1)d.$$

Aus diesem Ausdruck erhält man alle Glieder der Reihe, wenn man $n = 1, 2, 3, \dots$ setzt. Ist $n$ die Gesammtzahl der Glieder (wie von nun an stets angenommen wird), so ist $u = a_n$. Die Differenz einer gegebenen Reihe erhält man, indem man ein Glied vom folgenden subtrahirt.

**122.** *Eigenschaften der arithmetischen Reihe.* — 1) Durch drei der vier Zahlen $a$, $n$, $d$, $u$ ist eine arithmetische Reihe vollkommen bestimmt. — Denn aus der Gleichung

2) $u = a + (n - 1)d$ 124.

lässt sich, wenn drei der vier Buchstaben $a$, $n$, $d$, $u$ gegeben sind, der Werth des vierten bestimmen.

Anm. Man bestimme aus dieser Gleichung die Werthe von $a, n, d$.

2) Die Summe des $n^{ten}$ Gliedes von links und des $n^{ten}$ Gliedes von rechts ist für jeden Werth von $n$ dieselbe, nämlich $a + u$. — Denn von rechts nach links gelesen, lautet die Reihe:

3) $s = u + (u - d) + (u - 2d) + \dots + a,$

und man sieht, dass die gleichvielten Glieder von 1) und 3) stets die Summe $a + u$ geben.

3) Addirt man 1) und 3), so folgt:

$$2s = (a + u) + (a + u) + \dots (n\,\text{mal}) = (a + u)n,$$

folglich:

4) $s = (a + u) \cdot \frac{n}{2}.$ 125.

Anm. Auch in 4) lässt sich jeder der vier Buchstaben durch die drei anderen ausdrücken. — Mittelst der Hauptformeln 2) und 4) lässt sich jede Aufgabe aus der Lehre von den arithmetischen Reihen 1. Ordnung lösen.

4) Setzt man den Werth von $u$ aus 2) in 4) ein, so folgt:

126. $$5)\ s=[2a+(n-1)d]\frac{n}{2}=an+\frac{n(n-1)}{2}\cdot d.$$

Anm. Die Formeln 2) 4) 5) enthalten von den 5 Stücken der Reihe: $a$, $d$, $n$, $u$, $s$, je vier. Es fehlt $s$ in 2), $d$ in 4), $u$ in 5). Man stelle durch Elimination von $n$ und $a$ zwischen 2) und 4) die beiden noch fehlenden Formeln 6), 7) auf, welche je einen dieser Buchstaben nicht enthalten. — Man suche endlich aus 5), 6), 7) die drei rechts stehenden Buchstaben zu bestimmen, ebenso wie oben aus 2) und 4). Da aus jeder der 5 Formeln 2), 4), 5), 6), 7) vier Buchstaben bestimmt werden können, würde man im Ganzen 20 Formeln erhalten. In welchen Fällen aber ist die Bestimmung eines Buchstabens mit den bisherigen Hilfsmitteln nicht ausführbar?

(Aufgaben: Hofmann 3. Fünfzehnter Abschn. I. — Bardey XXXII. A.)

**123.** *Specielle Fälle.* — Für $d=0$ verwandelt sich die arithmetische Reihe, wie unmittelbar aus 1) oder 5) hervorgeht, in das Product $an$, oder, wenn $a=1$ ist, in die Zahl $n$. Das Product ist also ein specieller Fall der arithmetischen Reihe und bildet den Uebergang von der steigenden zur fallenden Reihe. — Die Reihe ist also steigend, wenn $d>0$, ein Product, wenn $d=0$, fallend, wenn $d<0$ ist.

Anm. Wie heisst die $n^{\text{te}}$ gerade, wie die $n^{\text{te}}$ ungerade Zahl? Wie gross ist die Summe der $n$ ersten natürlichen, der $n$ ersten geraden, der $n$ ersten ungeraden Zahlen?

**124.** *Die unendliche arithmetische Reihe.* — Betrachten wir die den Werthen $d=0$ und $a=1$ entsprechende Reihe

$$1+1+1+\ldots$$

Ist die Anzahl ihrer Glieder eine beschränkte, so drückt diese Reihe eine Zahl von ganz bestimmter Grösse aus. Denken wir uns aber die Anzahl der Glieder ohne Ende zunehmend, so wird diese Zahl unendlich gross, und die Anzahl der in ihr enthaltenen Einheiten ist eine unbestimmte. Man bezeichnet die unendlich grosse Zahl durch $\infty$ (gelesen „unendlich"), und nennt alle anderen Zahlen im Gegensatze zu ihr endliche.

Anm. Da die unendlich grosse Zahl im Gegensatze zu allen übrigen Zahlen keinen bestimmten Werth hat, so macht sie auch fast in allen Rechnungen, in denen sie auftritt, den Werth des Resultates unbestimmt. (Vgl. 149). Im Gegensatze zu allen übrigen Zahlen hat sie auch, wenn sie in derselben Rechnung mehrmals auftritt, verschiedene Werthe. — Ihrem Begriff nach bleibt sie unendlich, wenn man eine endliche Zahl zu ihr addirt oder von ihr subtrahirt, wenn man sie mit einer endlichen Zahl multiplicirt, dividirt, potenzirt oder radicirt. Daher ist

127. $$\infty+a=\infty;\quad \infty\cdot a=\infty;\quad \infty^a=\infty;$$
$$\infty-a=\infty;\quad \infty:a=\infty;\quad \sqrt[a]{\infty}=\infty,$$

wobei jedoch $a$ in den Formeln der 2. und 3. Rechnungsstufe nicht Null sein darf. Es folgt ferner, dass die Ausdrücke $\infty - \infty$, $\infty : \infty$, ${}^{\infty}l\,\infty$ jede endliche Zahl $a$ bedeuten können. Andere Formeln über die Rechnungen mit $\infty$ werden sich später ergeben. Noch ist zu bemerken, dass die unendlich grosse Zahl positiv oder negativ sein kann, je nachdem man sie aus positiven oder negativen Einheiten entstanden denkt.

Ebenso wie der Werth der Reihe $1 + 1 + \ldots$, ist auch der von $a + a + \ldots$ unendlich, sobald $a$ eine endliche Zahl (ausser Null) ist. Denn es ist $a + a + \ldots = a(1 + 1 + \ldots) = a \, . \, \infty = \infty$.

Endlich ist der Werth jeder unendlichen arithmetischen Reihe unendlich. Denn das allgemeine Glied $a + (n - 1)d$ wird, wenn $n = \infty$ ist, nach den oben in der Anm. gegebenen Formeln (und auch aus unmittelbar einleuchtenden Gründen) selbst unendlich, umsomehr also der Werth der ganzen Reihe.

### b. Reihen zweiter Stufe.

**125.** *Vorbemerkung.* — Wenn die Glieder einer arithmetischen Reihe erster Ordnung nicht durch Addition, sondern durch Multiplication verbunden werden, so hat man eine Reihe zweiter Stufe. Die allgemeine Form dieser Reihe ist also:

$$p = a(a + d)(a + 2d) \ldots u,$$

und ihr allgemeines Glied

$$a_n = a + (n - 1)d.$$

Wir beschäftigen uns im Folgenden nur mit einer speciellen Art dieser Reihen, nämlich derjenigen, für welche

$$d = -1$$

ist, und betrachten den Quotienten von zwei derartigen $n$-gliedrigen Reihen, deren Anfangsglieder $a$ und $n$ sind.

**126.** *Erklärungen.* — 1) Das Product der ersten $n$ ganzen Zahlen heisst die Facultät von $n$, wird durch $n!$ bezeichnet und „$n$ Facultät" gelesen.

$$1 \, . \, 2 \, . \, 3 \ldots n = n(n - 1)(n - 2) \ldots 2 \, . \, 1 = n!$$

2) Der Quotient zweier $n$-gliedriger arithmetischer Reihen zweiter Stufe, deren Differenz $-1$ ist, und deren Anfangsglieder $a$ und $n$ sind, heisst die $n^{\text{te}}$ Factorielle von $a$, und wird durch $a^{\cdot n}$ bezeichnet und „$a$ Punkt $n$" gelesen. $a$ heisst Grundzahl, $n$ Exponent der Factorielle.

$$1) \quad \frac{a(a - 1)(a - 2) \ldots [a - (n - 1)]}{1 \, . \, 2 \, . \, 3 \ldots n} = a^{\cdot n}.$$ 128.

**127.** *Andere Formen der Factorielle.* — Durch Erweiterung mit $(a-n)!$ erhält die Factorielle 1) die Form:

$$a^{\cdot n} = \frac{a(a-1)(a-2)\ldots[a-(n-1)].(a-n)(a-n-1)\ldots 2.1}{1.2\ldots n.1.2\ldots(a-n)},$$

oder:

129. $$2)\quad a^{\cdot n} = \frac{a!}{n!\,(a-n)!} = \frac{1.2\ldots a}{1.2\ldots n.1.2\ldots(a-n)},$$

woraus durch Division mit $(1.2\ldots n)$ die neue Form hervorgeht:

130. $$3)\quad a^{\cdot n} = \frac{(n+1)(n+2)\ldots a}{1.2\ldots(a-n)}.$$

**128.** *Factoriellengebiet einer Zahl.* Aus der Erklärung der Factorielle folgt, dass $n$ eine ganze positive Zahl sein muss, während $a$, wenn man nur die Form 1) benutzt, eine beliebige Zahl sein kann, dagegen in 2) und 3) ebenfalls ganz und positiv sein muss. Ferner muss $a > n$ sein. — Zu einer gegebenen Zahl $a$ gehört daher nur eine bestimmte Anzahl von Factoriellen, nämlich von $a^{\cdot 0}$ bis $a^{\cdot a}$, die man das Factoriellengebiet von $a$ nennen kann. Man erhält aus 3) für $n = 0$

131. $$a^{\cdot 0} = \frac{!}{a!} = 1,$$

und aus 1) für $n = a$

132. $$a^{\cdot a} = \frac{a!}{a!} = 1.$$

**129.** *Beziehung zwischen 2 Factoriellen mit der Exponentensumme a.* — Setzt man in 1) $a-n$ für $n$, so erhält man

$$\frac{a(a-1)(a-2)\ldots[a-(a-n-1)]}{1.2.3\ldots(a-n)} = a^{\cdot(a-n)}.$$

Da aber $[a-(a-n-1)] = n+1$, so ist die linke Seite dieser Formel gleich der rechten Seite von 3); mithin auch:

133. $$a^{\cdot(a-n)} = a^{\cdot n}.$$

Es bilden also die auf einander folgenden Factoriellen einer ganzen positiven Zahl $a$, von der $0^{\text{ten}}$ bis zur $a^{\text{ten}}$ eine Reihe, in welcher je zwei Glieder gleich sind, die gleichen Abstand von der Mitte haben.

**130.** *Beziehung zwischen 2 benachbarten Factoriellen.* — Setzt man in 1) $n+1$ für $n$, so folgt:

$$a^{\cdot(n+1)} = \frac{a(a-1)\ldots(a-n)}{1.2\ldots(n+1)} = \frac{a(a-1)\ldots[a-(n-1)]}{1.2\ldots n}\cdot\frac{a-n}{n+1};$$

oder:
$$a^{\cdot(n+1)} = \frac{a-n}{n+1} \cdot a^{\cdot n}. \qquad 134.$$

Anm. Für $n = 1$ und $a = 0$ folgt hieraus: $0^{\cdot 2} = -\frac{1}{2} 0^{\cdot 1}$, oder, da $0^{\cdot 1}$ nach dem Begriff der Factorielle gleich Null ist: $0^{\cdot 2} = 0$. Ebenso ist allgemein $0^{\cdot n} = 0$, sobald $n > 0$ ist.

Setzt man in 134 $n-1$ für $n$, so folgt:
$$a^{\cdot n} = \frac{a-n+1}{n} \cdot a^{\cdot(n-1)}$$
oder:
$$a^{\cdot(n-1)} = \frac{n}{a-n+1} \cdot a^{\cdot n}. \qquad 135.$$
Für $n = a$ erhält man aus der vorigen Formel (134):
$$a^{\cdot(a+1)} = 0; \qquad 135a.$$
mithin sind auch alle folgenden Factoriellen von $a$ gleich Null. Für $n = 0$ erhält man aus 135:
$$a^{\cdot(-1)} = 0. \qquad 135b.$$

**131.** *Beziehung zwischen den Factoriellen zweier benachbarter Zahlen.* — Setzt man in 2) $(a+1)$ statt $a$, so folgt:
$$(a+1)^{\cdot n} = \frac{(a+1)!}{n!(a+1-n)!} = \frac{a!}{n!(a-n)!} \cdot \frac{a+1}{a+1-n}$$
$$= \frac{a+1}{a+1-n} \cdot a^{\cdot n} = \left[1 + \frac{n}{a+1-n}\right] a^{\cdot n}$$
$$= a^{\cdot n} + \frac{n}{a+1-n} \cdot a^{\cdot n};$$
also:
$$(a+1)^{\cdot n} = a^{\cdot n} + a^{\cdot(n-1)} \text{ (nach 135).} \qquad 136.$$

Anm. Für $n = 1$, $a = 0$ ist $1^{\cdot 1} = 0^{\cdot 1} + 0^{\cdot 0}$; also, da $1^{\cdot 1} = 1$ und $0^{\cdot 1} = 0$ ist, $0^{\cdot 0} = 1$.

Für $n = 2$ ist $(a+1)^{\cdot 2} = a^{\cdot 2} + a$;
also für $a = 2$ $3^{\cdot 2} = 2^{\cdot 2} + 2 = 1 + 2$;
$a = 3$ $4^{\cdot 2} = 3^{\cdot 2} + 3 = 1 + 2 + 3$;
. . . . . . . . . . . . . . .
$a = n$ $(n+1)^{\cdot 2} = n^{\cdot 2} + n = 1 + 2 + \ldots + n$,
eine schon bekannte Formel.

**132.** *Factorielle einer Summe.* — Setzt man in der letzten Formel (136) $a+1$ für $a$, so folgt:
$$(a+2)^{\cdot n} = (a+1)^{\cdot n} + (a+1)^{\cdot(n-1)}$$
$$= a^{\cdot n} + a^{\cdot(n-1)} + a^{\cdot(n-1)} + a^{\cdot(n-2)} \quad (136)$$
$$= a^{\cdot n} + 2^{\cdot 1} \cdot a^{\cdot(n-1)} + a^{\cdot(n-2)}.$$

Setzt man hierin wieder $a+1$ für $a$, so folgt:

$$(a+3)^{\cdot n} = (a+1)^{\cdot n} + 2^{\cdot 1}(a+1)^{\cdot(n-1)} + (a+1)^{\cdot(n-2)}$$
$$= a^{\cdot n} + a^{\cdot(n-1)} + 2^{\cdot 1} a^{\cdot(n-1)} + 2^{\cdot 1} a^{\cdot(n-2)} + a^{\cdot(n-2)} + a^{\cdot(n-3)}$$
$$= a^{\cdot n} + 3^{\cdot 1} a^{\cdot(n-1)} + 3^{\cdot 2} a^{\cdot(n-2)} + a^{\cdot(n-3)}.$$

Allgemein wird gelten:

137. $$(a+b)^{\cdot n} = a^{\cdot n} b^{\cdot 0} + a^{\cdot(n-1)} b^{\cdot 1} + a^{\cdot(n-2)} b^{\cdot 2} + \ldots + a^{\cdot 0} b^{\cdot n},$$

wenn diese Formel auch noch für $a+b+1$ gilt. — Denn da sie für $b=1, 2, 3$ gilt (wie eben gezeigt), so gilt sie, wenn die eben gemachte Annahme richtig ist, auch für $b=4$, sodann für $b=5$ u. s. w., d. h. sie gilt allgemein. — Nun ist, wenn man in 137 $a+1$ für $a$ setzt:

$$(a+1+b)^{\cdot n} = (a+1)^{\cdot n} b^{\cdot 0} + (a+1)^{\cdot(n-1)} b^{\cdot 1} + (a+1)^{\cdot(n-2)} b^{\cdot 2} + \ldots + (a+1)^{\cdot 0} b^{\cdot n}$$
$$= a^{\cdot n} b^{\cdot 0} + a^{\cdot(n-1)} b^{\cdot 1} + a^{\cdot(n-2)} b^{\cdot 2} + \ldots\ldots + a^{\cdot 0} b^{\cdot n}$$
$$+ a^{\cdot(n-1)} b^{\cdot 0} + a^{\cdot(n-2)} b^{\cdot 1} + a^{\cdot(n-3)} b^{\cdot 2} + \ldots + a^{\cdot 0} b^{\cdot(n-1)} \text{ (n. 136)}$$
$$= (a+b)^{\cdot n} + (a+b)^{\cdot(n-1)} \quad \text{(nach 137)}.$$

Da diese Formel (nach 136) richtig ist, so gilt 137 auch für $a+b+1$, also allgemein.

Anm. Welche Gestalt nimmt 137 an, wenn man $a=b\ (=n)$ setzt und 133 anwendet?

**133.** *Factorielle einer negativen Zahl.* — Setzt man in der Form 1) (128) $-a$ für $a$, so folgt:

$$(-a)^{\cdot n} = \frac{(-a)(-a-1)(-a-2)\ldots[-a-(n-1)]}{1.2\ldots n},$$

oder, wenn man Dividend und Divisor mit $(-1)^n$ multiplicirt:

$$(-a)^{\cdot n} = \frac{a(a+1)(a+2)\ldots[a+(n-1)]}{1.2\ldots n(-1)^n},$$

oder, mit $(a-1)!$ multiplicirt und dividirt:

$$(-a)^{\cdot n} = \frac{[a+(n-1)]!}{(a-1)!\,n!} . (-1)^n,$$

oder, nach 129 (wenn man darin $a+n-1$ für $a$ setzt):

138. $$(-a)^{\cdot n} = (-1)^n . (a+n-1)^{\cdot n}.$$

Mittelst dieser Formel ist die Factorielle einer negativen Zahl durch diejenige einer positiven ausgedrückt. Da $a+n-1$ stets $>n$ ist, so kann in dieser Formel $a<n$ sein.

**134.** *Factorielle einer umgekehrten Zahl.* — Setzt man in 128 $\frac{1}{a}$ für $a$, so folgt:

$$\left(\frac{1}{a}\right)^{\cdot n} = \frac{\frac{1}{a}\left(\frac{1}{a}-1\right)\left(\frac{1}{a}-2\right)\ldots\left[\frac{1}{a}-(n-1)\right]}{1\,.\,2\ldots n},$$

oder, wenn man Dividend und Divisor mit $a^n$ multiplicirt:

$$\left(\frac{1}{a}\right)^{\cdot n} = \frac{(1-a)(1-2a)\ldots[1-(n-1)a]}{a^n\,.\,1\,.\,2\ldots n}. \qquad 139.$$

(Aufgaben: Hofmann 3. Siebzehnter Abschn. 1—9.)

## 2. Reihen höherer Ordnung.

**135.** *Summenreihen.* — Man kann die Summen der ersten 1, 2, 3, ... Glieder einer Reihe als Glieder einer neuen Reihe betrachten, welche die erste Summenreihe der gegebenen Reihe heisst, und welcher man das Anfangsglied 0 giebt. Ist die gegebene Reihe

$$1)\ a_1 + a_2 + a_3 + \ldots.,$$

so ist hiernach ihre erste Summenreihe

$$0 + a_1 + (a_1 + a_2) + (a_1 + a_2 + a_3) + \ldots,$$

oder, wenn man

$$2)\ 0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n = b_{n+1}$$

setzt:

$$3)\ b_1 + b_2 + b_3 + \ldots$$

Die erste Summenreihe von 3) heisst die zweite Summenreihe von 1), und allgemein heisst die erste Summenreihe der $(n-1)^{\text{ten}}$ Summenreihe von 1) die $n^{\text{te}}$ Summenreihe von 1).

**136.** *Differenzreihen.* — Umgekehrt kann man die Differenzen je zweier benachbarter Glieder von 3) als Glieder einer neuen Reihe 1) betrachten, welche die erste Differenzreihe von 3) heisst. — Denn aus 2) folgt

$$4)\ b_{n+1} - b_n = a_n; \qquad 140.$$

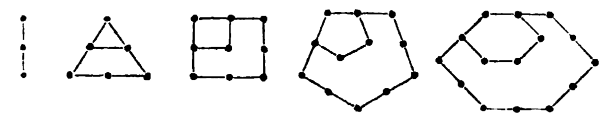
mithin sind in der That die Differenzen der Reihe 3) den Gliedern der Reihe 1) gleich. Dabei ist $b_1 = 0$ zu setzen. Formel 4) liefert noch die Regel: Das $n^{\text{te}}$ Glied der ersten Differenzreihe ist gleich der Differenz zwischen dem $(n+1)^{\text{ten}}$ und $n^{\text{ten}}$ Gliede der gegebenen Reihe.

Die erste Differenzreihe von 1) heisst die zweite Differenzreihe von 3), und allgemein heisst die erste Differenzreihe der $(n+1)^{\text{ten}}$ Differenzreihe von 3) die $n^{\text{te}}$ Differenzreihe von 3).

Anm. Bildet man zu einer Reihe, deren Anfangsglied 1, deren Differenz $n-2$ ist (worin $n$ eine beliebige ganze positive Zahl und $>1$ ist) die erste Summenreihe, so heissen die Glieder derselben $n$eck-Zahlen (oder $n$eckige Polygonalzahlen), weil man jede dieser Zahlen durch eine ein $n$eck bildende Gruppe von Punkten darstellen kann. So entstehen für

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $n=2$ | aus | $1+1+1\ldots$ | die Zweieckzahlen | $1,\ 2,\ 3,\ 4,\ldots$ |
| $n=3$ | „ | $1+2+3\ldots$ | „ Dreieckzahlen | $1,\ 3,\ 6,\ 10,\ldots$ |
| $n=4$ | „ | $1+3+5\ldots$ | „ Viereckzahlen | $1,\ 4,\ 9,\ 16,\ldots$ |
| $n=5$ | „ | $1+4+7\ldots$ | „ Fünfeckzahlen | $1,\ 5,\ 12,\ 22,\ldots$ |
| $n=6$ | „ | $1+5+9\ldots$ | „ Sechseckzahlen | $1,\ 6,\ 15,\ 28,\ldots$ |

Die folgenden Figuren stellen die drei ersten von jeder Art der eben gebildeten Zahlen dar. Das Bildungsgesetz der Figuren ist leicht zu erkennen.



(Man bilde die Differenzreihen der Quadrat-, Cubik-Zahlen etc., und zeige, dass die $n^{\text{te}}$ Differenzreihe der Reihe $1^n+2^n+3^n+\ldots$ in jedem dieser Fälle aus Gliedern besteht, die alle gleich $1.2.3\ldots n$ sind.)

Die erste Summenreihe der $n$eckigen Polygonalzahlen liefert die $n$seitigen Pyramidalzahlen. Man bilde dieselben, und untersuche auch die von oben nach unten gehenden Zahlenreihen.

**137.** *Reihen $n^{\text{ter}}$ Ordnung.* — Die ursprünglich betrachtete arithmetische Reihe $a+(a+d)+(a+2d)+\ldots$, deren Differenzen alle einander gleich, aber von Null verschieden sind, heisst Reihe erster Ordnung, und ihre $(n-1)^{\text{te}}$ Summenreihe: Reihe $n^{\text{ter}}$ Ordnung. Hiernach ist die Ordnung der ersten Summenreihe einer gegebenen Reihe um 1 höher, die der ersten Differenzreihe um 1 niedriger als die der gegebenen Reihe. Und eine Reihe nullter Ordnung ist diejenige, deren Glieder alle einander gleich sind; oder, anders ausgedrückt: Ein Product ist eine Reihe nullter Ordnung.

Eine Reihe $n^{\text{ter}}$ Ordnung ist also eine solche, deren $(n-1)^{\text{te}}$ Differenzreihe eine Reihe erster, oder, deren $n^{\text{te}}$ Differenzreihe eine Reihe nullter Ordnung ist.

Anm. Eine Reihe $n^{\text{ter}}$ Ordnung ist z. B.: $1^n+2^n+3^n+\ldots$ Vgl. vorige Anm.

**138.** *Bestimmung des allgemeinen Gliedes der Reihe $n^{\text{ter}}$ Ordnung.* — Wir betrachten zuerst die Reihe der $p^{\text{ten}}$ Factoriellen

$$0^{\cdot p},\ 1^{\cdot p},\ 2^{\cdot p},\ \ldots$$

Das $n^{\text{te}}$ Glied derselben ist $(n-1)^{\cdot p}$, das $(n+1)^{\text{te}}$ also $n^{\cdot p}$. Bildet man die erste Differenzreihe derselben, so ist deren $n^{\text{tes}}$ Glied (nach 140)

$$n^{\cdot p} - (n-1)^{\cdot p},$$

oder, da nach 136 (wenn man darin $n$ statt $a+1$ und $p$ statt $n$ setzt) $n^{\cdot p} = (n-1)^{\cdot p} + (n-1)^{\cdot (p-1)}$ ist:

$$(n-1)^{\cdot p} + (n-1)^{\cdot (p-1)} - (n-1)^{\cdot p} = (n-1)^{\cdot (p-1)}.$$

Es ist also das $n^{\text{te}}$ Glied in der gegebenen Reihe $(n-1)^{\cdot p}$, in ihrer ersten Differenzreihe $(n-1)^{\cdot (p-1)}$, folglich in ihrer zweiten Differenzreihe (weil diese die erste Differenzreihe der ersten Differenzreihe ist) $(n-1)^{\cdot (p-2)}$ und in ihrer $p^{\text{ten}}$ Differenzreihe $(n-1)^{\cdot (p-p)} = (n-1)^{\cdot 0} = 1$ (nach 131). — Die Glieder der $p^{\text{ten}}$ Differenzreihe sind also alle gleich 1, und daher ist (nach der oben gegebenen Erklärung) die Reihe der Factoriellen

$$0^{\cdot p},\ 1^{\cdot p},\ 2^{\cdot p},\ \ldots$$

eine Reihe $p^{\text{ter}}$ Ordnung, die mit ihren Differenzreihen die allgemeinen Glieder

$$(n-1)^{\cdot p},\ (n-1)^{\cdot (p-1)},\ \ldots\ (n-1)^{\cdot 0}$$

und die Anfangsglieder (aus $n=1$ hervorgehend)

$$0^{\cdot p},\ 0^{\cdot (p-1)},\ \ldots\ 0^{\cdot 0}$$

hat, welche letzteren (nach Anm. zu 134 und 136) alle Null sind, mit Ausnahme des letzten, welches gleich 1 ist. Die für $p = 0, 1, 2, \ldots$ sich ergebenden Factoriellenreihen lassen sich nun mit ihren wesentlichsten Eigenschaften, wie folgt, zusammenstellen:

| | $n^{\text{tes}}$ Glied der Reihe | Die ersten Glieder der Reihe | Anfangsglied der Reihe | der 1. Differenzreihe | der 2. Differenzreihe | . . . |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $p=0$ | $(n-1)^{\cdot 0}$ | 1 1 1 1 1 . . | 1 | 0 | 0 | . . |
| $p=1$ | $(n-1)^{\cdot 1}$ | 0 1 2 3 4 . . | 0 | 1 | 0 | . . |
| $p=2$ | $(n-1)^{\cdot 2}$ | 0 0 1 3 6 . . | 0 | 0 | 1 | . . |
| . . . | . . . | . . . . . . . . | . . | . . | . . | . . |

Multiplicirt man eine dieser Reihen, z. B. die der $p^{\text{ten}}$ Ordnung, mit einer beliebigen Zahl, so wird offenbar nicht nur

ihr eignes Anfangs- und $n^{\text{tes}}$ Glied, sondern auch alle Glieder ihrer Differenzreihen mit dieser Zahl multiplicirt (wie aus 140 ersichtlich ist). — Multiplicirt man also die oben in der Tabelle stehenden Reihen resp. mit $a, b, c, \ldots$ so lauten die $n^{\text{ten}}$ Glieder der neuen Reihen

$$a(n-1)^{\cdot 0},\ b(n-1)^{\cdot 1},\ c(n-1)^{\cdot 2},\ \ldots$$

ihre Anfangsglieder $a, 0, 0 \ldots$, diejenigen ihrer ersten Differenzreihen $0, b, 0 \ldots$ u. s. w.

Addirt man endlich alle diese Reihen, so ist 1) das $n^{\text{te}}$ Glied der neuen Reihe gleich der Summe der $n^{\text{ten}}$ Glieder der einzelnen Reihen, 2) das Anfangsglied der neuen Reihe gleich der Summe der Anfangsglieder der einzelnen Reihen, 3) das Anfangsglied von jeder Differenzreihe der neuen Reihe gleich der Summe der Anfangsglieder der gleichvielten Differenzreihen.*)

Mithin sind die Anfangsglieder der neuen Reihe und ihrer successiven Differenzreihen: $a, b, c, \ldots$, und das allgemeine Glied der neuen Reihe:

141. $$s_n = a(n-1)^{\cdot 0} + b(n-1)^{\cdot 1} + c(n-1)^{\cdot 2} + \ldots$$

d. h.: **Man findet das $n^{\text{te}}$ Glied einer arithmetischen Reihe höherer Ordnung, wenn man die Summe bildet aus ihrem Anfangsgliede und denjenigen ihrer successiven Differenzreihen, jedes der letzteren multiplicirt mit der sovielten Factorielle von $(n-1)$, als der Rang der Differenzreihe beträgt.**

Anm. Für die Reihe erster Ordnung, welche nur eine Differenzreihe besitzt, findet man hiernach $s_n = a + (n-1)b$; d. h. die Formel 124. — Für die $n$eckigen Polygonalzahlen, welche Reihen zweiter Ordnung sind, findet man folgende Resultate: Die $n^{\text{te}}$ Zweieckzahl ist $n$, die $n^{\text{te}}$ Dreieckzahl $\frac{n(n+1)}{1 \cdot 2}$, die $n^{\text{te}}$ $p$eckzahl (für welche $a = 1$, $b = p - 1$, $c = p - 2$ ist): $1 + (p-1)(n-1) + (p-2)(n-1)^{\cdot 2} = \frac{n}{2}[(p-2)n - (p-4)]$. Man bestimme ebenso die $n^{\text{te}}$ $p$seitige Pyramidalzahl.

**139.** *Bestimmung der Summe der Reihe $n^{\text{ter}}$ Ordnung.* — Setzt man in 140 $n$ der Reihe nach gleich $1, 2, 3, \ldots n$, so erhält man die Formeln:

---

*) Denn nach 140 ist, wenn $b_1$ und $f_1$ die Anfangsglieder zweier Reihen, und $a_1$ und $e_1$ die Anfangsglieder ihrer ersten Differenzreihen sind: $b_2 - b_1 = a_1$; $f_2 - f_1 = e_1$; also: $(b_2 + f_2) - (b_1 + f_1) = (a_1 + e_1)$.

$$b_2 - b_1 = a_1$$
$$b_3 - b_2 = a_2$$
$$b_4 - b_3 = a_3$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$b_n - b_{n-1} = a_{n-1}$$
$$b_{n+1} - b_n = a_n.$$

Addirt man alle diese Formeln, so folgt:

$$b_{n+1} - b_1 = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

oder:

$$b_{n+1} = b_1 + (a_1 + a_2 + \ldots + a_n), \qquad 142.$$

d. h.: Man erhält das $(n+1)^{\text{te}}$ Glied einer Reihe, indem man zu ihrem ersten Gliede die Summe der $n$ ersten Glieder ihrer ersten Differenzreihe addirt.

Wenn nun die Anfangsglieder der Reihe $b_1$, $b_2$ .. und ihrer Differenzreihen die Zahlen 0, $a$, $b$, ... sind, so sind die Anfangsglieder der Reihe $a_1$, $a_2$, ... und ihrer Differenzreihen die Zahlen $a$, $b$, $c$ ... Da $b_1 = 0$, so ist nach 142

$$b_{n+1} = a_1 + a_2 + \ldots + a_n.$$

Andrerseits ist nach 141 (wenn man darin $n+1$ für $n$, und 0, $a$, $b$, ... resp. für $a$, $b$, $c$ ... setzt):

$$b_{n+1} = a \,.\, n + b \,.\, n^{\cdot 2} + c \,.\, n^{\cdot 3} + \ldots,$$

folglich:

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = a \,.\, n^{\cdot 1} + b \,.\, n^{\cdot 2} + c \,.\, n^{\cdot 3} + \ldots \qquad 143.$$

d. h.: Man findet die Summe einer arithmetischen Reihe höherer Ordnung, wenn man die Summe bildet aus ihrem Anfangsgliede und denjenigen ihrer successiven Differenzreihen, jedes dieser Glieder multiplicirt mit der gleichvielten Factorielle von $n$.

Anm. Für die Reihe erster Ordnung findet man hiernach $S_n = na + \frac{n(n-1)}{2} b$; d. h. die Formel 126. — Für die Reihe der Quadratzahlen ist $a = 1$, $b = 3$, $c = 2$, folglich $S_n = n + 3 \,.\, n^{\cdot 2} + 2 \,.\, n^{\cdot 3} = \frac{n}{6}(2n^2 + 3n + 1)$; für die Cubikzahlen ist $a = 1$, $b = 7$, $c = 12$, $d = 6$, und $S_n = \frac{n^2}{4}(n+1)^2$. — Reihen höherer Ordnung von zweiter Stufe werden hier übergangen.

(Aufgaben: Hofmann 3. Fünfzehnter Absch. II. — Bardey XXXII. B.)

## II. Die Productreihe (geometrische Reihe).

*Vorbemerkung.* — Wir betrachten hier nur die Productreihe erster Ordnung und erster Stufe.

**140.** *Erklärungen.* — 1) Eine Summe $s$ von Gliedern, welche durch wiederholte Multiplication mit derselben Zahl $q$ aus einer Zahl $a$ gebildet sind, heisst eine geometrische Reihe.

2) Das erste Glied $a$ heisst Anfangsglied, der wiederholte Factor $q$ der Quotient, und das letzte Glied $u$ das Endglied der Reihe. Die allgemeine Form der Reihe ist

144. 1) $s = a + aq + aq^2 + \dots + u.$

Bezeichnet man die Glieder der Reihe durch $a_1, a_2, \dots a_n, \dots$ so ist das $n^{te}$ Glied (das allgemeine Glied)

$$a_n = a \cdot q^{n-1}.$$

Aus diesem Ausdruck erhält man alle Glieder der Reihe, wenn man $n = 1, 2, 3, \dots$ setzt. Ist $n$ die Gesammtzahl der Glieder, so ist $u = a_n$. Den Quotienten einer gegebenen Reihe erhält man, indem man ein Glied durch das vorhergehende dividirt.

**141.** *Eigenschaften der geometrischen Reihe.* — 1) Durch drei der vier Zahlen $a$, $n$, $q$, $u$, ist eine geometrische Reihe vollkommen bestimmt. Denn aus der Gleichung

145. 2) $u = aq^{n-1}$

lässt sich, wenn drei der vier Buchstaben gegeben sind, der Werth des vierten bestimmen.

Anm. Man bestimme aus dieser Gleichung die Werthe von $a, n, q$.

2) Das Product des $n^{\text{ten}}$ Gliedes von links und des $n^{\text{ten}}$ Gliedes von rechts ist für jeden Werth von $n$ dasselbe, nämlich $au$. Denn von rechts nach links gelesen lautet die Reihe

$$3)\quad s = u + \frac{u}{q} + \frac{u}{q^2} + \dots + a,$$

und man sieht, dass die gleichvielten Glieder von 1) und 3) stets das Product $au$ geben.

3) Multiplicirt man 1) mit $(q-1)$, so folgt:

$$\begin{aligned} s(q-1) = \quad & aq + aq^2 + aq^3 + \dots + aq^{n-1} + uq \\ & - a - aq - aq^2 - aq^3 - \dots - u \end{aligned}$$

oder, da die unter einander stehenden Glieder sich heben:

$$s(q-1) = uq - a$$

oder endlich

146. 4) $s = \dfrac{uq-a}{q-1}.$

Anm. Auch in 4) lässt sich jeder der vier Buchstaben durch die drei anderen ausdrücken. — Mittelst der Hauptformeln 2) und 4) lässt sich jede Aufgabe aus der Lehre von den geometrischen Reihen lösen.

4) Setzt man den Werth von $u$ aus 2) in 4) ein, so folgt:

$$5)\quad s = \frac{aq^n - a}{q - 1} = a \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$ 147.

Anm. Die Formeln 2), 4), 5) enthalten von den 5 Stücken der Reihe: $a$, $q$, $n$, $u$, $s$, je vier. Es fehlt $s$ in 2), $n$ in 4), $u$ in 5). Man stelle durch Elimination von $a$ und $q$ zwischen 2) und 4) die beiden noch fehlenden Formeln 6) und 7) auf, welche je einen dieser Buchstaben nicht enthalten. Man suche endlich aus 5), 6), 7) die drei rechts stehenden Buchstaben zu bestimmen, ebenso wie oben aus 2) und 4). Wie viele der 15, auf diese Weise aus 2), 4), 5), 6), 7) noch hervorgehenden Formeln lassen sich mit den bisherigen Hilfsmitteln nicht aufstellen?

**142.** *Specielle Fälle.* — Für $q = 1$ verwandelt sich die geometrische Reihe, wie aus 1) hervorgeht, in das Product $an$, oder, wenn $a = 1$ ist, in die Zahl $n$. Das Product ist also ein specieller Fall der geometrischen Reihe und bildet den Uebergang von der steigenden zur fallenden Reihe. — Die Reihe ist also steigend, wenn $q > 1$, ein Product, wenn $q = 1$, fallend, wenn $q < 1$ ist.

Anm. Formel 5) giebt für $q = 1$ den Werth $s = a \cdot \frac{0}{0}$. Es hat also, wie man durch Vergleichung sieht, $\frac{0}{0}$ hier den Werth $n$. (Vgl. 71.) — Für $a = 1$ giebt 1) in Verbindung mit 2): $s = q^{n-1} + q^{n-2} + \ldots + q^2 + q + 1$, und 5): $s = \frac{q^n - 1}{q - 1}$; also

$$q^{n-1} + q^{n-2} + \ldots + q + 1 = \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$ 147a.

(Vgl. Anm. zu 88). — Die Zahl $q$ nehmen wir stets als positiv an; denn wäre $q = -q_1$, so wäre die Reihe 1) $s = (a + aq_1^2 + aq_1^4 + \ldots) - (aq_1 + aq_1^3 + aq_1^5 + \ldots) = (1 - q_1)(a + aq_1^2 + aq_1^4 + \ldots)$, also wieder von derselben Art wie vorher.

**143.** *Die unendliche geometrische Reihe.* — Betrachten wir die dem Werthe $a = 1$ entsprechende Reihe

$$6)\quad s_1 = 1 + q + q^2 + \ldots.$$

Wenn die Gliederzahl dieser Reihe in's Unendliche zunimmt, sodass $n = \infty$ ist, so kommt es für die Beschaffenheit der Reihe darauf an, ob sie steigend, ein Product, oder fallend ist. Denn im ersten Falle werden ihre Glieder immer grösser, im zweiten sind sie alle gleich, im dritten werden sie immer kleiner. (Dies folgt, wenn man $q = \frac{1}{q_1}$ setzt, aus Anm. zu 83a.) — Im ersten Falle nähern sich die Glieder der Grenze $\infty$, sodass $u = \infty$ und $s = \infty$ ist (nach 4)). Im zweiten Falle

sind alle Glieder gleich 1, also wiederum $s = \infty$ (als unendliche arithmetische Reihe). Im dritten Falle nähern sich die Glieder der Grenze 0, sodass $u = 0$, und $s = \frac{-1}{q-1}$ (nach 4)), oder, mit $(-1)$ erweitert:

148. $$7)\quad s_1 = \frac{1}{1-q} = 1 + q + q^2 + \ldots$$

Anm. Diese Formel, welche, wie wohl zu beachten ist, nur gilt, wenn $q < 1$ ist (denn nur unter dieser Voraussetzung wird in 4) $u = 0$), würde man auch durch Ausführung der Division $\frac{1}{1-q}$ (nach Regel 88) erhalten haben, jedoch ohne dass sich jene Beschränkung dabei herausstellte. Das allgemeine in Regel 88 aufgestellte Divisionsverfahren ist daher, falls es eine endlose Reihe von Gliedern liefert, nur für solche Werthe der Buchstaben anwendbar, welche ein beständiges Abnehmen der Glieder des Resultates herbeiführen, weil sonst die linke Seite einen endlichen, die rechte dagegen einen unendlichen Ausdruck darstellen würde, und diese beiden einander nicht gleich sein können.*)

Nähert sich in 7) $q$ immer mehr dem Werthe 1, so nähert sich $q - 1$ dem Werthe 0, und $1 + q + q^2 + \ldots$ dem Werthe $\infty$, mithin ist $\infty$ der Werth von $\frac{1}{0}$, oder

---

*) Der Grund dieser Erscheinung liegt schliesslich darin, dass mit wachsender Gliederzahl das Resultat, wenn $q < 1$ ist, sich dem wahren Werthe von $\frac{1}{1-q}$ immer mehr nähert, dagegen sich immer mehr von demselben entfernt, wenn $q > 1$ ist. Denn in diesem Falle ist $\frac{1}{1-q}$ eine negative Zahl, von der sich offenbar der positive Werth der rechten Seite um so mehr entfernt, je grösser er ist.

Setzt man in 7) $q = -r$, so folgt:

$$\frac{1}{1+r} = 1 - r + r^2 - r^3 + \ldots$$

In diesem Falle findet Aehnliches statt. Man erhält, indem man rechts ein Glied nach dem andern hinzunimmt, Werthe, die abwechselnd grösser und kleiner sind, als die linke Seite. Ist nun $r < 1$, so nehmen die Glieder an absoluter Grösse ab, und der Werth der linken Seite wird in immer engere Grenzen eingeschlossen; das Divisionsverfahren führt also, je länger man es fortsetzt, zu desto genaueren Werthen. — Ist $r = 1$, so bleiben die Grenzen, in die der Werth der linken Seite eingeschlossen ist, fortwährend dieselben, nämlich 0 und 1. Das Divisionsverfahren taugt also in diesem Falle nicht zur Bestimmung des Werthes der linken Seite. — Dasselbe ist der Fall, wenn $r > 1$ ist, weil dann die Grenzen, zwischen denen jener Werth liegt, sich unaufhörlich erweitern.

$$\frac{1}{0} = \infty; \quad \frac{1}{\infty} = 0.$$ 149.

Die zweite dieser Formeln geht auch aus Anm. zu 83a hervor. Multiplicirt man die erste dieser Formeln mit einer beliebigen Zahl $a$, so folgt:

$$\frac{a}{0} = \infty;$$

d. h.: Jede Division durch Null giebt ein unendlich grosses (also für weitere Rechnungen unbrauchbares) Resultat.

Multiplicirt man die Formel 7) mit $a$, so folgt:

$$8) \quad \frac{a}{1-q} = a + aq + aq^2 + \ldots$$ 150.

Durch diese Formel ist auch die allgemeine geometrische Reihe 1) für den Fall einer unendlichen Gliederzahl summirt, immer unter der Voraussetzung, dass $q < 1$ ist.

(Aufgaben: Hofmann 3. Fünfzehnter Abschn. III. — Bardey XXXIII.)

Anm. Potenzreihen werden ihrer geringen Wichtigkeit wegen hier übergangen. Man untersuche ihre Bildungsgesetze und Eigenschaften auf dem bei den Summen- und Productreihen befolgten Wege, soweit die bisherigen Rechnungsregeln es gestatten.

# E. Die Kettenbrüche.

## 1. Endliche Kettenbrüche.

**144.** *Vorbemerkung.* — Wenn bei Ausführung der Division zweier Zahlen nach Regel 88 der Divisor nicht ein Factor des Dividend ist, so bleibt (wie schon in der zu jener Regel führenden Betrachtung, S. 56, gesagt wurde) nach einer Reihe von Subtractionen ein undividirbarer Rest übrig, an dem man die Division nur andeuten kann. Setzt man das Verfahren in der bisherigen Weise fort, so erhält man als Resultat die unendliche Reihe. — Man kann jedoch die Rechnung auch in einer anderen Weise fortsetzen, die zu einem neuen Ausdruck, dem Kettenbruch führt.

Sei in dem eben erwähnten Divisionsverfahren $r_0$ der Rest, $d$ der Divisor, also $r_0 < d$, so schreiben wir

$$\frac{r_0}{d} = \frac{1}{d \,.\, r_0}.$$

Dann liefert die Ausführung der Division $\frac{d}{r_0}$ wieder einen Quotienten $q_1$ und einen Rest $r_1$, wobei $r_1 < r_0$, und es ist

$$\frac{d}{r_0} = q_1 + \frac{r_1}{r_0} = q_1 + \frac{1}{r_0|r_1}.$$

Durch Fortsetzung dieses Verfahrens erhalten wir

$$\frac{r_0}{r_1} = q_2 + \frac{r_2}{r_1} = q_2 + \frac{1}{r_1|r_2}$$

$$\frac{r_1}{r_2} = q_3 + \frac{r_3}{r_2} = q_3 + \frac{1}{r_2|r_3} \quad 1)$$

. . . . . . . .

Wird endlich jeder rechts im Divisor stehende Quotient durch seinen aus der folgenden Formel hervorgehenden Werth ersetzt, so folgt:

$$2) \quad \frac{r_0}{d} = \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \ldots}}}$$

wofür man der Raumersparniss wegen unter Benutzung des schrägen Divisionsstriches auch schreiben kann:

$$\frac{r_0}{d} = 1/\overline{q_1} + 1/\overline{q_2} + 1/\overline{q_3} + \ldots$$

**145.** *Erklärungen.* — Ein Ausdruck von der Form $1/\overline{q_1} + 1/\overline{q_2} + \ldots$ heisst Kettenbruch, die links von den Divisionsstrichen stehenden Zahlen 1 heissen seine Zähler, die rechts stehenden Zahlen $q_1$, $q_2$, ... seine Nenner. Der Ausdruck, durch dessen Entwickelung man den Kettenbruch erhält, heisst sein Werth.

Anm. Es wird hierbei vorausgesetzt, dass $q_1$, $q_2$, ... ganze positive Zahlen sind. Der Begriff des Kettenbruchs ist aber natürlich derselben Erweiterung fähig, wie derjenige der Zahl selbst. — Eine andere Erweiterung des Kettenbruch-Begriffes besteht darin, dass man als Zähler ebenso verschiedene Zahlen annimmt, wie als Nenner. Man kann dann den oben definirten Kettenbruch einen echten, einen Kettenbruch von der Form $d_1/\overline{q_1} + d_2/\overline{q_2} + \ldots$ einen unechten nennen. — Endlich kann man, statt anzunehmen, dass jeder Nenner mit dem folgenden Zähler durch + verbunden sei, auch annehmen, dass jeder Zähler mit dem folgenden Nenner durch + verbunden sei. Man kann dann den oben definirten Kettenbruch einen absteigenden, und den eben beschriebenen einen aufsteigenden Kettenbruch nennen.

**146.** *Verwandlung eines Quotienten in einen Kettenbruch.**) — Die Reihe von Divisionen, welche die Zahlen $q_1$, $q_2$, $q_3$ ...

*) Beispiel s. am Schluss des Buches in der „Uebersicht der Formeln und Regeln".

liefern, wird am besten nach folgendem Schema ausgeführt, welches sich auf die oben gegebenen Formeln gründet.

$$\begin{array}{llllll} r_0 & | & d & | & q_1 & \\ & & r_0 q_1 & & & \\ & & r_1 & | & r_0 & | \; q_2 \\ & & & & r_1 q_2 & \\ & & & & r_2 & | \; r_1 \; | \; q_3 \\ & & & & & r_2 q_3 \\ & & & & & \dots \end{array}$$

Man dividirt $d$ durch $r_0$ und erhält $q_1$. Von $d$ subtrahirt man das Product $r_0 q_1$ und erhält $r_1$. Dann dividirt man $r_0$ durch $r_1$ und erhält $q_2$. Von $r_0$ subtrahirt man das Product $r_1 q_2$ und erhält $r_2$, u. s. w. 151.

Sind $d$ und $r_0$, wie wir hier annehmen, ganze Zahlen, so sind auch die Zahlen $q_1, q_2, \dots$ und $r_1, r_2 \dots$ ganze Zahlen. Da nun $r_0 > r_1 > r_2 \dots$, so muss schliesslich ein Rest $r_n = 0$ vorkommen. Da alsdann

$$\frac{r_{n-2}}{r_{n-1}} = q_n$$

ist, so ist $q_n$ der letzte Nenner des Kettenbruchs, und die Rechnung ist beendet. Man nennt daher die aus der Entwickelung eines Quotienten hervorgehenden Kettenbrüche endliche.

**147.** *Verwandlung eines Kettenbruchs in einen Quotienten.* — a) Durch Rückwärts-Rechnung. — Ist der Kettenbruch

$$1/\overline{q_1} + 1/\overline{q_2} + \dots + 1/\overline{q_{n-1}} + 1/\overline{q_n}$$

gegeben, so ist

$$q_{n-1} + 1/\overline{q_n} = \frac{q_{n-1} q_n + 1}{q_n}; \quad 1/\overline{q_{n-1}} + 1/\overline{q_n} = \frac{q_n}{q_{n-1} q_n + 1};$$

$$q_{n-2} + 1/\overline{q_{n-1}} + 1/\overline{q_n} = \frac{q_{n-2} q_{n-1} q_n + q_{n-2} + q_n}{q_{n-1} q_n + 1}$$

$$1/\overline{q_{n-2}} + 1/\overline{q_{n-1}} + 1/\overline{q_n} = \frac{q_{n-1} q_n + 1}{q_{n-2} q_{n-1} q_n + q_{n-2} + q_n}$$

u. s. w. — Hiernach erhält man für Kettenbrüche mit 1, 2, 3, 4 Nennern der Reihe nach die Werthe:

$$1/\overline{q_1} = \frac{1}{q_1};$$

$$1/\overline{q_1} + 1/\overline{q_2} = \frac{q_2}{q_1 q_2 + 1};$$

$$1/\overline{q_1} + 1/\overline{q_2} + 1/\overline{q_3} = \frac{q_2 q_3 + 1}{q_1 q_2 q_3 + q_1 + q_3};$$

$$1/\overline{q_1} + 1/\overline{q_2} + 1/\overline{q_3} + 1/\overline{q_4} = \frac{q_2 q_3 q_4 + q_2 + q_4}{q_1 q_2 q_3 q_4 + q_1 q_2 + q_1 q_4 + q_3 q_4 + 1}$$

Aus dem ersten dieser Werthe findet man den zweiten, indem man

$$1 \text{ durch } q_2$$
$$q_1 \text{ durch } q_1 q_2 + 1$$

ersetzt; aus dem zweiten den dritten, indem man

$$1 \text{ durch } q_3$$
$$q_2 \text{ durch } q_2 q_3 + 1$$

152. ersetzt. Allgemein aus dem $p^{\text{ten}}$ den $p+1^{\text{ten}}$, indem man

$$1 \text{ durch } q_{p+1}$$
$$q_p \text{ durch } q_p q_{p+1} + 1$$

ersetzt.

b) Durch Ausrechnung eines symbolischen Ausdrucks. — Die so eben erhaltenen Werthe der Kettenbrüche mit 1, 2, 3, 4 Nennern lassen sich alle durch folgende Regel finden:

153. Bezeichnet man mit $[q_1 q_2 q_3 \ldots]$ die Summe der Ausdrücke, welche aus dem Producte $q_1 q_2 q_3 \ldots$ dadurch hervorgehen, dass man auf alle möglichen Arten eine gerade Anzahl zusammenstehender Factoren weglässt, so ist der Kettenbruch, dessen Nenner $q_1 q_2 q_3 \ldots$. sind, gleich dem Quotienten

$$\frac{[q_2 q_3 \ldots]}{[q_1 q_2 q_3 \ldots]}.$$

Anm. Für ein Product, aus welchem sämmtliche Factoren weggelassen werden, ist 1 zu setzen. (Vgl. Anm. zu 77, und zur zweiten Erklärung auf S. 49.) — Als gerade Zahl gilt hier auch die Null.

Man kann hieraus auf die allgemeine Giltigkeit der Regel schliessen. Beweisen lässt sich dieselbe auf demselben Wege wie Formel 137.*)

---

*) Der etwas complicirte Beweis möge der Vollständigkeit wegen hier folgen. — Man kann alle in dem Ausdruck $[q_1 q_2 \ldots q_{n-1} q_n]$ enthaltenen Glieder in 2 Gruppen bringen, deren eine $[q_1 q_2 \ldots q_{n-1} \overline{q_n}]$ alle Glieder umfasst, welche den letzten Factor $a_n$ enthalten, während die andere $[q_1 q_2 \ldots q_{n-2}]$ diejenigen Glieder enthält, welchen der letzte (und folglich auch der vorletzte) Factor fehlt. Dann ist also

$$[q_1 q_2 \ldots q_n] = [q_1 q_2 \ldots q_{n-1} \overline{q_n}] + [q_1 q_2 \ldots q_{n-2}].$$

Setzt man nun $q_n + 1/q_{n-1}$ oder $\frac{q_n q_{n+1} + 1}{q_{n+1}}$ statt $q_n$, so folgt:

$$\left[q_1 q_2 \ldots \frac{q_n q_{n+1} + 1}{q_{n+1}}\right] = \left[q_1 q_2 \ldots q_{n-1} \overline{\frac{q_n q_{n+1} + 1}{q_{n+1}}}\right] + [q_1 q_2 \ldots q_{n-2}]$$
$$= \frac{1}{q_{n+1}}\Big([q_1 q_2 \ldots q_{n-1} \overline{q_n q_{n+1}}] + [q_1 q_2 \ldots q_{n-1}] + [q_1 q_2 \ldots q_{n-2} q_{n+2}]\Big).$$

Noch ist zu beachten, dass in der letzten Formel sowohl im Dividend wie im Divisor jeder Nenner oder Zähler des Kettenbruches nur in der ersten Potenz vorkommt. Setzt man daher aus den Gliedern des Zählers (oder Nenners) $q_p$ als gemeinsamen Factor heraus, bezeichnet den Inhalt der Klammer mit $a$ und die Summe der Glieder, welche $q_p$ nicht enthalten, mit $b$, so hat der Zähler (oder Nenner) die Form 154.

$$aq_p + b \cdot 1.$$

c) Durch Determinanten. — Schafft man in den Gleichungen 1) die Nenner weg, so kann man sie in folgender Gestalt schreiben:

$$\begin{array}{l} q_1 r_0 + r_1 = d \\ -r_0 + q_2 r_1 + r_2 = 0 \\ \quad -r_1 + q_3 r_2 + r_3 = 0 \\ \quad\quad -r_2 + q_4 r_3 + r_4 = 0 \\ \quad\quad\quad . \quad . \quad . \quad . \\ \quad\quad\quad\quad -r_{n-2} + q_n r_{n-1} = 0. \end{array}$$

Man kann nun aus diesen $n$ Gleichungen die Zahl $\frac{r_0}{d}$ nicht nur mittelst wiederholter Substitutionen, wie oben geschah, durch $q_1, q_2, \ldots\ldots q_n$ ausdrücken, sondern auch nach Regel 111 mittelst zweier Determinanten. Da das gegebene Gleichungs-

---

Die in der Klammer rechts stehende dreitheilige Summe ist nun gleich $[q_1 q_2 \ldots q_{n+1}]$. Denn fassen wir die letzten beiden Factoren $q_n$ und $q_{n+1}$ dieses Ausdrucks in's Auge, so können aus demselben nur folgende Arten von Gliedern gebildet werden: 1) Solche, denen keiner dieser Factoren fehlt, d. h. die in $[q_1 q_2 \ldots q_{n-1} q_n q_{n+1}]$ enthaltenen Glieder. 2) Solche, denen $q_{n+1}$, und folglich auch $q_n$ fehlt, d. h. die in $[q_1 q_2 \ldots q_{n-1}]$ enthaltenen Glieder. 3) Solche, denen nicht $q_{n+1}$, wohl aber $q_n$, und folglich auch $q_{n-1}$ fehlt, d. h. die in $[q_1 q_2 \ldots q_{n-2} q_{n+1}]$ enthaltenen Glieder. — Demnach ist

$$\left[q_1 q_2 \ldots \frac{q_n q_{n+1} + 1}{q_{n+1}}\right] = \frac{1}{q_{n+1}} [q_1 q_2 \ldots q_{n+1}].$$

Ebenso:

$$\left[q_2 q_3 \ldots \frac{q_n q_{n+1} + 1}{q_{n+1}}\right] = \frac{1}{q_{n+1}} [q_2 q_3 \ldots q_{n+1}];$$

folglich durch Division:

$$\frac{\left[q_2 q_3 \ldots \frac{q_n q_{n+1} + 1}{q_{n+1}}\right]}{\left[q_1 q_2 \ldots \frac{q_n q_{n+1} + 1}{q_{n+1}}\right]} = \frac{[q_2 q_3 \ldots q_{n+1}]}{[q_1 q_2 \ldots q_{n+1}]}.$$

Demnach gilt die Regel, wenn sie bis $q_n$ richtig ist, auch noch bis $q_{n+1}$, folglich, da sie für $n = 1, 2, 3, 4$ gilt, allgemein.

system hier $n$ Gleichungen mit den $n$ Unbekannten $r_0, r_1, \ldots r_{n-1}$ enthält, deren Coefficienten grossentheils gleich Null sind, so hat man nach jener Regel (die Division durch den Doppelpunkt angedeutet):

155. $$r_0 = \begin{vmatrix} d & 1 & 0 & 0 & 0 & . & 0 & 0 \\ 0 & q_2 & 1 & 0 & 0 & . & 0 & 0 \\ 0 & -1 & q_3 & 1 & 0 & . & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & q_4 & 1 & . & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & q_5 & . & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & q_{n-1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & q_n \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} q_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & . & 0 & 0 \\ -1 & q_2 & 1 & 0 & 0 & . & 0 & 0 \\ 0 & -1 & q_3 & 1 & 0 & . & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & q_4 & 1 & . & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & q_5 & . & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & q_{n-1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & q_n \end{vmatrix}$$

Hieraus erhält man $\frac{r_0}{d}$, wenn man in der ersten Determinante 1 statt $d$ setzt. Es ist also der aus $\frac{r_0}{d}$ sich ergebende Kettenbruch hierdurch als Quotient zweier Determinanten dargestellt.

(Aufgaben: Hofmann 2. Achter Abschn. I. — Bardey XX. 22—51).

**148.** *Näherungsbrüche eines Kettenbruches.* — Unter dem $n^{\text{ten}}$ Näherungsbruche eines Kettenbruches, dessen Nenner $q_1, q_2, q_3 \ldots$ sind, versteht man denjenigen Theil des gegebenen Kettenbruches, welcher als ersten Nenner $q_1$, als letzten $q_n$ hat. Der übrige Theil des gegebenen Kettenbruches heisst der $n^{\text{te}}$ Kettenrest. — Der Werth des $n^{\text{ten}}$ Näherungsbruches heisst der $n^{\text{te}}$ Näherungswerth des gegebenen Kettenbruches. Die Näherungswerthe eines Kettenbruches lassen sich auf dieselbe Weise bestimmen und darstellen wie der Werth des Kettenbruches selbst.

**149.** *Eigenschaften der Näherungswerthe.* — 1) Ist

$$\frac{x_n}{y_n} = 1/\overline{q_1} + 1/\overline{q_2} + \ldots + 1/\overline{q_{n-1}} + 1/\overline{q}$$

der gegebene Kettenbruch, so sind seine successiven Näherungsbrüche:

$$\frac{x_1}{y_1} = 1/\overline{q_1}; \quad \frac{x_2}{y_2} = 1/\overline{q_1} + 1/\overline{q_2}; \quad \frac{x_3}{y_3} = 1/\overline{q_1} + 1/\overline{q_2} + 1/\overline{q_3}; \ \ldots$$

Der $n^{\text{te}}$ (letzte) Näherungsbruch ist der Kettenbruch selbst.

Sind $z_1, z_2, \ldots$ die successiven Kettenreste, so ist

$$\frac{x_n}{y_n} = \frac{1}{q_1 + z_1}; \quad z_1 = \frac{1}{q_2 + z_2}; \quad z_2 = \frac{1}{q_3 + z_3}; \ \ldots \ z_{n-1} = \frac{1}{q_n}; \quad z_n = 0;$$

und es verwandelt sich $\frac{x_n}{y_n}$ in $\frac{x_p}{y_p}$, sobald man die Reihe dieser Formeln durch Weglassung von $z_p$ schliesst.

Lässt man nun $z_1$ weg, so wird (nach Anm. zu 83a) $\frac{x_1}{y_1} > \frac{x_n}{y_n}$ sein.

Lässt man $z_2$ weg, so wird $z_1$ grösser, also ist $\frac{x_2}{y_2} < \frac{x_n}{y_n}$.

Lässt man $z_3$ weg, so wird $z_2$ grösser, $z_1$ kleiner, also ist $\frac{x_3}{y_3} > \frac{x_n}{y_n}$.

Lässt man $z_p$ weg, so wird hiernach $\frac{x_p}{y_p} \gtrless \frac{x_n}{y_n}$ sein, je nachdem $p$ eine ungerade oder gerade Zahl ist. Es folgt also die Regel:

Die successiven Näherungswerthe eines Ketten- 156.
bruches sind abwechselnd grösser und kleiner als der Werth des Kettenbruches, und zwar sind diejenigen von ungerader Ordnung (der 1te, 3te ...) grösser, diejenigen von gerader Ordnung (der 2te, 4te ...) kleiner.

2) Sei $x_p$ der Zähler oder Nenner des $p^{\text{ten}}$ Näherungswerthes, so ist derselbe nach 154 von der Form

$$x_p = a \,.\, q_p + b \,.\, 1.$$

Nun erhält man nach 152 $x_{p+1}$ aus $x_p$, indem man 1 in $q_{p+1}$ und $q_p$ in $q_p q_{p+1} + 1$ übergehen lässt. Also ist

$$x_{p+1} = a q_p q_{p+1} + a \,.\, 1 + b \,.\, q_{p+1} = (a q_p + b) q_{p+1} + a \,.\, 1 = x_p q_{p+1} + a \,.\, 1.$$

Ebenso

$$x_{p+2} = x_p (q_{p+1} q_{p+2} + 1) + a q_{p+2} = (x_p q_{p+1} + a) q_{p+2} + x_p \,.\, 1 = x_{p+1} q_{p+2} + x_p \,.\, 1.$$

Demnach besteht zwischen den Zählern wie zwischen 157.
den Nennern von drei auf einander folgenden Näherungswerthen, wenn der letzte Näherungsbruch mit $q_{p+2}$ schliesst, die Beziehung:

$$x_{p+2} = x_{p+1} q_{p+2} + x_p \,.\, 1.$$

3) Ist $q_{p+2}$ überhaupt der letzte Nenner des Kettenbruches, so ist $\frac{x_{p+2}}{y_{p+2}}$ der Werth des Kettenbruches. Setzen wir $p + 2 = n$, so sind $\frac{x_{n-1}}{y_{n-1}}$ und $\frac{x_{n-2}}{y_{n-2}}$ die vorhergehenden Näherungswerthe, und man hat:

158. $$\frac{x_n}{y_n} = \frac{x_{n-1}q_n + x_{n-2} \cdot 1}{y_{n-1}q_n + y_{n-2} \cdot 1}.$$

4) Die Differenz der ersten beiden Näherungswerthe

$$\frac{x_1}{y_1} = \frac{1}{q_1}; \quad \frac{x_2}{y_2} = \frac{q_2}{q_1 q_2 + 1}$$

ist:

$$\frac{x_1}{y_1} - \frac{x_2}{y_2} = \frac{q_1 q_2 + 1 - q_1 q_2}{q_1(q_1 q_2 + 1)} = \frac{+1}{y_1 y_2};$$

die des zweiten und dritten:

$$\frac{x_2}{y_2} = \frac{q_2}{q_1 q_2 + 1}; \quad \frac{x_3}{y_3} = \frac{q_2 q_3 + 1}{q_1 q_2 q_3 + q_1 + q_3};$$

$$\frac{x_2}{y_2} - \frac{x_3}{y_3} = \frac{q_1 q_2^2 q_3 + q_1 q_2 + q_2 q_3 - q_1 q_2^2 q_3 - q_2 q_3 - q_1 q_2 - 1}{(q_1 q_2 + 1)(q_1 q_2 q_3 + q_1 + q_3)} = \frac{-1}{y_2 y_3}.$$

Allgemein wird gelten:

159. $$\frac{x_{p-1}}{y_{p-1}} - \frac{x_p}{y_p} = (-1)^p \cdot \frac{1}{y_{p-1} y_p},$$

wenn diese Formel auch für die Differenz des $p^{\text{ten}}$ und $(p+1)^{\text{ten}}$ Näherungswerthes gilt. Nun ist

$$\frac{x_p}{y_p} - \frac{x_{p+1}}{y_{p+1}} = \frac{x_p y_{p+1} - y_p x_{p+1}}{y_p y_{p+1}}.$$

Hierin ist der Dividend (nach 157)

$$x_p y_{p+1} - y_p x_{p+1} = x_p(y_p q_{p+1} + y_{p-1}) - y_p(x_p q_{p+1} + x_{p-1})$$
$$= x_p y_{p-1} - y_p x_{p-1} = (-1)(x_{p-1} y_p - x_p y_{p-1}).$$

Nun ist aber nach Annahme

$$x_{p-1} y_p - x_p y_{p-1} = (-1)^p;$$

also

$$\frac{x_p}{y_p} - \frac{x_{p+1}}{y_{p+1}} = \frac{(-1)^{p+1}}{y_p y_{p+1}};$$

d. h.: Formel 159 gilt auch noch, wenn man $p+1$ für $p$ setzt. Nun gilt sie für $p = 2$ und $p = 3$, also allgemein.

Anm. Da nach 156 der Werth des Kettenbruches zwischen je zwei successiven Näherungswerthen liegt, so ist jeder Näherungswerth von dem folgenden um mehr verschieden, als von dem Werth des Kettenbruchs. Mithin beträgt der letztere Unterschied weniger als $\frac{1}{y_p y_{p+1}}$. Da nun, wie aus 157 hervorgeht, die Zähler wie die Nenner der successiven Näherungswerthe immer grösser werden, so wird $\frac{1}{y_p y_{p+1}}$ immer kleiner; d. h.: die successiven Näherungswerthe nähern sich immer mehr dem Werthe des Kettenbruches. (Daher der Name „Näherungsbruch".)

Sei $u < x_{p+1}$; $v < y_{p+1}$, so ist $\frac{x_p}{y_p} - \frac{u}{v} = \frac{v \cdot x_p - u \cdot y_p}{v \cdot y_p}$. Der kleinste Werth, den der Zähler haben kann, wenn $\frac{u}{v}$ von $\frac{x_p}{y_p}$ verschieden sein soll, ist 1. Der Nenner $v \cdot y_p$ ist $< y_{p+1} y_p$; also der ganze Bruch jedenfalls grösser als $\frac{1}{y_p y_{p+1}}$; d. h.: Jeder in kleineren Zahlen als ein 160.
Näherungswerth ausgedrückte Bruch ist von dem Werthe des Kettenbruches um mehr verschieden als dieser Näherungswerth.

**150.** *Diophantische Gleichungen.**) — 1) Betrachten wir in der Formel 159) $x_p$ und $y_p$ als unbekannte, $x_{p+1}$ und $y_{p+1}$ als bekannte Zahlen, schreiben ferner zur Abkürzung

$$\begin{array}{lcccc} & x & y & a & b \\ \text{statt} & x_p & y_p & y_{p+1} & x_{p+1}, \end{array}$$

und beseitigen die Nenner, so folgt:

$$1) \quad ax - by = \pm 1.$$

Da $a$, $b$, $x$, $y$ ganze Zahlen sind, also auch bei Auflösung dieser Gleichung die Bedingung hinzutritt, dass $x$ und $y$ ganze Zahlen sein sollen, so erkennen wir in derselben eine diophantische Gleichung (vgl. S. 68), und da $\frac{x}{y}$ der vorletzte Näherungswerth von $\frac{b}{a}$ ist, so ergiebt sich zur Auflösung der Gleichung 1) in ganzen Zahlen die Regel:

Man bestimme den vorletzten Näherungswerth 161.
$\frac{b_1}{a_1}$ des Quotienten $\frac{b}{a}$, und setze $x = \pm b_1$, $y = \pm a_1$ wobei die Vorzeichen von $x$ und $y$ dem der rechten Seite von 1) gleich sind, wenn der Näherungswerth von ungerader, dagegen entgegengesetzt sind, wenn er von gerader Ordnung ist.

2) Multiplicirt man die Gleichung 1) mit $\pm c$, so folgt:

$$a(\pm cx) + b(\mp cy) = c,$$

ler, wenn wir

$$\pm cx = u; \quad \mp cy = v$$

itzen:

$$2) \quad au + bv = c.$$

*) Beispiele am Schluss des Buches in der „Uebersicht der Foreln und Regeln“. — Diophantus, alexandrinischer Mathematiker, im ərten Jahrhundert n. Chr.

Für die Lösung der allgemeinen diophantischen Gleichung 2) ergiebt sich hiernach folgende Regel:

162. Man bestimme den vorletzten Näherungswerth $\frac{x}{y}$ des Quotienten $\frac{a}{b}$, und setze $u = \pm cx$, $v = \mp cy$, wobei die oberen oder unteren Zeichen zu wählen sind, je nachdem der Näherungswerth von ungerader oder gerader Ordnung ist.

Sei $u_1$ und $v_1$ ein zweites Paar von Werthen, welches der Gleichung 2) genügt, so soll sein

$$au_1 + bv_1 = c,$$

mithin durch Subtraction dieser Gleichung von 2)

$$a(u - u_1) + b(v - v_1) = 0,$$

oder:

$$\frac{u - u_1}{v - v_1} = -\frac{b}{a}.$$

Da hier alle Buchstaben ganze Zahlen bedeuten, und $a$ und $b$ keinen gemeinsamen Factor haben (denn sonst hätte ihn auch $c$, und man würde die ganze Gleichung durch ihn dividirt haben), so muss $u - u_1$ dasselbe Vielfache von $-b$ sein, wie $v - v_1$ von $+a$. Sei dieses Vielfache mit $n$ bezeichnet, so ist hiernach

$$u - u_1 = -nb, \quad v - v_1 = na;$$

oder:

163. $$u_1 = u + nb; \quad v_1 = v - na.$$

Diese Formeln lehren alle ganzzahligen Werthe von $u$ und $v$ aus einem Paare derselben finden, indem aus jedem ganzzahligen (positiven oder negativen) Werthe von $n$ ein Werthepaar für $u$ und $v$ hervorgeht.

Anm. Ist $b$ negativ, so setzt man $-v = +w$ und bestimmt zunächst $w$.

(Aufgaben: Hofmann 2. Achter Absch. II. — Bardey XXXI.)

## II. Unendliche Kettenbrüche.

**151.** *Vorbemerkung.* — Ebenso wie die Division liefert auch die Radicirung mit 2 (nach Regel 90) eine unendliche Reihe, wenn der Radicand nicht genau die zweite Potenz einer Zahl ist. Aber auch in diesem Falle lässt sich die Rechnung so führen, dass das Resultat ein Kettenbruch wird. Derselbe muss aber ein unendlicher sein, weil er sich sonst genau durch einen Quotienten darstellen liesse, was der Natur der irrationalen Wurzeln widerspricht. (S. 51.)

**152.** ***Darstellungen der Wurzel einer quadratischen Gleichung als Kettenbruch.****) — 1) Es sei die Gleichung

$$y^2 + 2by = c$$

gegeben. Ihre Wurzeln sind bestimmt durch den Ausdruck

$$y = -b \pm \sqrt{b^2 + c},$$

oder, wenn wir

$$b^2 + c = a$$

setzen:

$$y = -b \pm \sqrt{a}.$$

Andrerseits ist

$$y(y + 2b) = c,$$

oder:

$$y = \frac{c}{2b + y} = \frac{c}{2b + \frac{c}{2b + y}},$$

da man für $y$ rechts den Werth $\frac{c}{2b + y}$ einsetzen kann. Durch Fortsetzung dieses Verfahrens, welches offenbar ins Unendliche wiederholt werden kann, erhält man den unendlichen Kettenbruch

$$y = c/\overline{2b} + c/\overline{2b} + \ldots$$

und

$$\sqrt{a} = b + c/\overline{2b} + c/\overline{2b} + \ldots$$

Der hier erhaltene Kettenbruch ist (vgl. Anm. auf S. 112) ein unechter. Er wird ferner „periodisch" genannt, weil der Nenner $2b$ unaufhörlich wiederkehrt. Allgemein heisst ein Kettenbruch periodisch, wenn eine Reihe von Nennern beständig in derselben Reihenfolge wiederkehrt. Die sich wiederholende Reihe heisst Periode.

2) Man setzt, um $\sqrt{a}$ zu entwickeln:

$$\sqrt{a} = e_0 + \frac{1}{c_0};$$

$$\frac{1}{c_0} = \sqrt{a} - e_0;$$

$$c_0 = \frac{1}{\sqrt{a} - e_0} = \frac{\sqrt{a} + e_0}{a - e_0^2} = \frac{\sqrt{a} + e_0}{d_0} = b_1 + \frac{1}{c_1}; \quad (a - e_0^2 = d_0.)$$

$$= \frac{\sqrt{a} + e_0 - b_1 d_0}{d_0} = \frac{\sqrt{a} - e_1}{d_0}; \qquad (b_1 d_0 - e_0 = e_1.)$$

*) Beispiele zu dieser und der folgenden Nr. s. am Schluss des ·hes in der „Uebersicht der Formeln und Regeln".

$$c_1 = \frac{d_0}{\sqrt{a} - e_1} = \frac{d_0(\sqrt{a} + e_1)}{a - e_1^2} = \frac{\sqrt{a} + e_1}{d_1} = b_2 + \frac{1}{e_2}; \quad \left(\frac{a - e_1^2}{d_0} = d_1.\right)$$

$$\frac{1}{c_2} = \frac{\sqrt{a} + e_1 - b_2 d_1}{d_1} = \frac{\sqrt{a} - e_2}{d_1}; \qquad (b_2 d_1 - e_1 = e_2.)$$

$$c_2 = \frac{d_1}{\sqrt{a} - e_2} = \frac{d_1(\sqrt{a} + e_2)}{a - e_2^2} = \frac{\sqrt{a} + e_2}{d_2} = b_3 + \frac{1}{e_3}; \quad \left(\frac{a - e_2^2}{d_1} = d_2.\right).$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . .

Hierbei sind $e_0, b_1, b_2 \ldots$ die grössten in dem links daneben stehenden Ausdruck enthaltenen ganzen Zahlen. Durch Elimination von $e_0, e_1, e_2 \ldots$ erhält man aus diesen Gleichungen:

$$\sqrt{a} = e_0 + 1/\overline{b_1} + 1/\overline{b_2} + 1/\overline{b_3} + \ldots;$$

also ist die Wurzel als unendlicher echter Kettenbruch dargestellt.

Anm. Da $\frac{a - e_1^2}{d_0} = \frac{a - (b_1^2 d_0^2 - 2b_1 d_0 e_0 + e_0^2)}{d_0} = \frac{a - e_0^2}{d_0} + 2b_1 e_0 - b_1^2 d_0 = 1 + 2b_1 e_0 - b_1^2 d_0$ ist, so ist $d_1$ stets eine ganze Zahl. Dasselbe gilt von $d_2, d_3 \ldots$ — Da ferner (wie aus der Formel für $\frac{1}{c_1}$ folgt) $\frac{\sqrt{a}}{d_0} > \frac{1}{c_1}$ oder $\sqrt{a} > \frac{d_0}{c_1}$, d. h. $\sqrt{a} - \frac{d_0}{c_1} > 0$ ist, und da (wie aus der Formel für $c_0$ folgt) $\sqrt{a} + e_0 = b_1 d_0 + \frac{d_0}{c_1}$ oder $\sqrt{a} - \frac{d_0}{c_1} = b_1 d_0 - e_0$ ist, so ist auch $b_1 d_0 - e_0 > 0$, d. h. $e_1$ positiv, und ebenso $e_2, e_3 \ldots$ — Hieraus folgt weiter, dass nur so viele verschiedene Zahlen $e$ vorkommen können, als die Zahl $e_0$ angiebt. Denn $\sqrt{a} - e_1$, $\sqrt{a} - e_2, \ldots$ sind ebenfalls positive Zahlen. Ist nun $e_p = e_0$, so ist $d_p = d_0$ (nach der Formel $d_0 = a - e_0^2$); $c_p = c_0$ $\left(\text{da } c_0 = \frac{\sqrt{a} + e_0}{d_0}\right)$; $b_{p+1} = b_1$; $c_{p+1} = c_1$; $e_{p+1} = e_1$ u. s. w. Von da an wiederholen sich also die Nenner des Kettenbruches in derselben Reihenfolge; d. h. der Kettenbruch ist periodisch.

(Aufgaben: Bardey XX. 52—62.)

**153.** *Verwandlung eines periodischen Kettenbruches in einen irrationalen Ausdruck.* — Sei

$$x = 1/\overline{q_1} + 1/\overline{q_2} + \ldots + 1/\overline{q_n} \ldots$$

der Inbegriff der periodisch wiederkehrenden Nenner, so ist offenbar

$$x = 1/\overline{q_1} + 1/\overline{q_2} + \ldots + 1/\overline{q_n} + x.$$

Verwandelt man durch Rückwärtsrechnung die rechte Seite dieser Gleichung in einen Quotienten, so erhält man eine gemischt-quadratische Gleichung, aus der sich $x$ bestimmen lässt.

Anm. Diese Methode ist auch auf unechte Kettenbrüche anwendbar, sowie auf solche, in denen vor den periodischen Nennern noch eine Reihe solcher steht, die sich nicht wiederholen.

# Angewandte Arithmetik.

## I. Die Decimalrechnung.

### 1. Ganze Decimalzahlen.

**154.** *Vorbemerkung.* — Zur Darstellung jeder natürlichen Zahl würde ein besonderes Zeichen (Ziffer) erforderlich sein, wenn es nicht gelänge, eine beschränkte Anzahl von Zeichen so zusammenzustellen, dass jede natürliche Zahl durch eine derartige Zusammenstellung ausgedrückt werden kann. Wie dies möglich ist, soll im Folgenden gezeigt werden.

Sei $x$ eine bestimmte positive ganze Zahl, und $a, b, c, \ldots$ ebenfalls ganze positive Zahlen, die nur der Bedingung unterworfen sind, dass sie $< x$ sein müssen, übrigens aber alle Werthe von 0 bis $x-1$ annehmen können. Dann ist

$$a < x;$$
$$a + bx < x^2;$$
$$a + bx + cx^2 < x^3;$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

wie sogleich ersichtlich ist, wenn man $a, b, c, \ldots$ durch den höchsten für diese Zahlen möglichen Werth $x-1$ ersetzt.

Es kann ferner jede Zahl, die $< x$ ist, durch $a$, jede, die $< x^2$ ist, durch $a + bx$, jede, die $< x^n$ ist, durch $a + bx + \ldots + kx^{n-1}$ ausgedrückt werden, d. h.: durch ein nach Potenzen von $x$ geordnetes Polynom.

Dieses Polynom lässt sich abgekürzt schreiben. Da nämlich die erste Zahl, $a$, mit $x^0$, die zweite, $b$, mit $x^1$, die $n^{te}$, mit $x^{n-1}$ multiplicirt ist, so zeigt jede Zahl schon durch re Stelle an, mit welcher Potenz von $x$ sie zu multipliciren ; diese Potenzen können also fortgelassen werden. Da ferner e Glieder des Polynoms durch + verbunden sind, so kann an auch diese Zeichen weglassen, und das Polynom in einer r Formen

$$abc \ldots hik \text{ oder } kih \ldots cba$$

schreiben, je nachdem es nach steigenden oder fallenden Potenzen von $x$ geordnet werden soll.

Es ist hieraus ersichtlich, dass, wenn man für jede der $x$ Zahlen $0, 1, \ldots (x-1)$ ein besonderes Zeichen festsetzt, man mit Hilfe dieser Zeichen jede noch so grosse Zahl mit Ausnahme der Potenzen von $x$ darstellen kann.

Aber auch für diese letzteren Zahlen bedarf man keines neuen Zeichens. Denn setzt man in $(a+bx)$ $a=0$, $b=1$, so ist $a+bx=x$, oder nach der zweiten der obigen Schreibweisen

$$x=10.$$

Setzt man in $(a+bx+cx^2)$ $a=0$, $b=0$, $c=1$, so ist $a+bx+cx^2=x^2$, oder

$$x^2=100, \text{ u. s. w.}$$

Es genügen also die Zeichen für $0, 1, \ldots (x-1)$ zur Darstellung aller ganzen positiven Zahlen ohne Ausnahme.

Der Inbegriff aller Zahlen, die als Polynome mit derselben Grundzahl dargestellt sind, heisst ein Zahlsystem.

Anm. Die Zahl, welche als Grundzahl eines Zahlsystems dienen soll, darf nicht zu gross sein, weil sonst die Anzahl der nöthigen Zahlzeichen zu gross wäre, aber auch nicht zu klein, weil sonst zum Schreiben einer Zahl zu viele Zeichen erforderlich wären. Sie muss ferner möglichst viele ganze Zahlen als Factoren enthalten, und besonders durch Potenzen von 2 theilbar sein, weil die Theilung in zwei gleiche Theile in allen Anwendungen auf wirkliche Verhältnisse am häufigsten vorkommt und am leichtesten durchführbar ist. In dieser Hinsicht würde die Zahl Zwölf, deren Vortheile von jeher in den Masszahlen der Zeit, des Geldes, der Strecken und Winkel verwerthet worden sind, den Vorzug vor der allgemein gebräuchlichen Systemzahl Zehn verdienen, die nur zwei Factoren enthält, und nur durch die erste Potenz von 2 theilbar ist. Da es aber unmöglich ist, diese Systemzahl aufzugeben, so hat man in neuerer Zeit die Masszahlen soviel wie möglich mit ihr in Uebereinstimmung gebracht, und dadurch eine Vereinfachung der Rechnungen erzielt, welche die Vortheile der früheren Masszahlen aufwiegt.

**155.** *Erklärungen.* — Jede ganze Zahl, die als ein nach fallenden Potenzen von Zehn geordnetes Polynom geschrieben ist, heisst Decimalzahl. Die Zahlzeichen 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9, mittelst welcher die Decimalzahlen geschrieben werden, heissen Ziffern, und die Ziffern als Bestandtheile der Decimalzahl Stellen. (Benennung der Stellen! Abtheilen grosser Zahlen von rechts nach links in Klassen zu je 6 Stellen!)

**156.** *Rechnungen mit Decimalzahlen.* — Mit Decimalzahlen wird ebenso gerechnet wie mit Polynomen; nur wird jeder durch Vereinigung zweier Ziffern entstandene Coefficient, sobald er $\geqq 10$ ist, in die Form $10a+b$ gebracht, und $a$ mit

dem nächst höheren Gliede des Polynoms vereinigt. — Die Rechnungen mit Decimalzahlen sind daher auch äusserlich denjenigen mit Polynomen ganz ähnlich. Zu beachten sind folgende leicht abzuleitende Regeln über den Gebrauch 164.
der Null:

1) Links von den Ziffern der Decimalzahl können Nullen beliebig gesetzt und weggelassen werden.

2) Eine Decimalzahl wird mit $10^n$ multiplicirt, indem man rechts $n$ Nullen hinzufügt.

Anm. Welche Abkürzungen finden statt, wenn man die Regeln der Rechnung mit Polynomen auf die Rechnung mit Decimalzahlen anwendet? Wie ist das „Borgen" bei der Subtraction zu begründen? Bei der Radicirung mit 2 enthält das erste Glied eine oder zwei Stellen, je nachdem die Stellenzahl des Radicanden ungerade oder gerade ist. Denn im zweiten Falle gehört zur ersten Ziffer eine ungerade Potenz von 10, aus der die Quadratwurzel nicht rational bestimmt werden kann. Man fasst also z. B. die beiden ersten Glieder $ax^7 + bx^6$ zu dem Gliede $(ax + b)x^6$ zusammen, und zerlegt dasselbe, wenn $c^2$ die nächste unter $ax + b$ liegende Quadratzahl ist, in die Glieder $c^2x^6$ und $(ax + b - c^2)x^6$.

Durch die Regeln, welche sich für Decimalzahlen aus den Gesetzen der Polynome ergeben, wird jede Vereinigung von Decimalzahlen auf Vereinigungen zwischen den Zahlen von 0 bis 9 zurückgeführt. Man braucht also nur die letzteren zu kennen (das „Eins und Eins", das „Einmaleins", beide mit ihren Umkehrungen, und die Quadratzahlen von 1 bis 100) um mit Hilfe dieser Regeln beliebige Decimalzahlen addiren, subtrahiren, multipliciren und dividiren, sowie eine solche Zahl mit 2 radiciren zu können. (Beispiel für letztere Rechnung s. am Schluss des Buches.)

(Aufgaben: Hofmann 1. Erste Abth. I. V. Anhang I.)

**157.** *Anwendungen der Kettenbrüche auf Decimalzahlen und Gleichungen.* *)

1) Bestimmung des grössten gemeinsamen Factors zweier Decimalzahlen. — Schreibt man die Gleichungen 1) S. 112 in der Form

$$\begin{aligned} d &= q_1 r_0 + r_1 \\ r_0 &= q_2 r_1 + r_2 \\ r_1 &= q_3 r_2 + r_3 \\ &\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ r_{n-3} &= q_{n-1} r_{n-2} + r_{n-1} \\ r_{n-2} &= q_n r_{n-1}, \end{aligned}$$

lehrt die erste Gleichung: Jeder gemeinsame Factor der hlen $d$ und $r_0$ ist auch Factor von $r_1$; die zweite: Derselbe

*) Beispiele s. am Schluss des Buches in der „Uebersicht der rmeln und Regeln".

Factor ist (weil er Factor von $r_0$ und $r_1$ ist) auch Factor von $r_2$, u. s. w., endlich auch von $r_{n-1}$. Andrerseits lehrt die letzte Gleichung: $r_{n-1}$ ist Factor von $r_{n-2}$; die vorletzte: $r_{n-1}$ ist gemeinsamer Factor von $r_{n-2}$ und $r_{n-3}$, u. s. w.; endlich auch von $d$ und $r_0$. — Da nun jeder gemeinsame Factor von $d$ und $r_0$ ein Factor von $r_{n-1}$, und $r_{n-1}$ gemeinsamer Factor von $d$ und $r_0$ ist, so ist $r_{n-1}$ der grösste gemeinsame Factor von $d$ und $r_0$. — Wendet man also auf die Zahlen $d$ und $r_0$ das in Regel 151 beschriebene Verfahren an, so ist der letzte Divisor der grösste gemeinsame Factor von $d$ und $r_0$. (Aufgaben: Hofmann 1. Erste Abtheilung III.)

2) Elimination einer Unbekannten aus zwei Gleichungen beliebigen Grades. — Wenn in den obigen Gleichungen die Buchstaben $d$ und $r_0$ die linken Seiten zweier Gleichungen höheren Grades (mit beliebig vielen Unbekannten) bedeuten, die nach Potenzen der Unbekannten $x$ geordnet sind, so muss, wenn $x_1$ ein Werth von $x$ ist, der beiden Gleichungen genügt, $(x - x_1)$ gemeinsamer Factor von $r_0$ und $d$ sein. (Vgl. Anm. am Schluss von Nr. 118). Dividirt man nun das Polynom $d$ durch $r_0$ (unter der Voraussetzung, dass der Grad von $d$ grösser oder gleich dem von $r_0$ ist), bis zu einem Reste $r_1$, dessen Grad niedriger ist, als der von $r_0$, und setzt dieses Verfahren (nach Regel 151) in derselben Weise fort, so gelangt man schliesslich zu einem Restpolynom $r_{n-1}$, welches $x$ nicht mehr enthält, also auch den Factor $(x - x_1)$ nicht enthalten kann. Da aber $r_{n-2}$ und $r_{n-3}$ diesen Factor enthalten, so muss, wie aus der Gleichung $r_{n-3} = q_{n-1} r_{n-2} + r_{n-1}$ folgt, $r_{n-1} = 0$ sein. Die Gleichung $r_{n-1} = 0$ ist also eine Folge der Gleichungen $r_{n-2} = 0$, $r_{n-3} = 0$, .... $r_0 = 0$, $d = 0$, und da alle diese Gleichungen durch den Werth $x = x_1$ erfüllt werden, so ist $r_{n-1} = 0$ das Resultat der Elimination von $x$ zwischen den Gleichungen $r_0 = 0$ und $d = 0$.

Anm. Durch wiederholte Anwendung dieser Methode lassen sich schliesslich $n$ höhere Gleichungen mit $n$ Unbekannten auf eine Gleichung mit einer Unbekannten reduciren.

## 2. Decimalbrüche.

**158.** *Vorbemerkung.* — Ebenso wie bei den Polynomen liefert auch bei den Decimalzahlen die Division und die Radicirung nicht immer ein abgeschlossenes Resultat. Es bleibt dann ein Rest, an welchem man das bisher befolgte Verfahren fortsetzen kann. Für diesen Zweck muss aber der Begriff der

Decimalzahl ebenso erweitert werden, wie früher der des Polynoms; denn es kommt jetzt darauf an, Brüche (vgl. Anm. zu 83a) und irrationale Zahlen ebenso in Form der Decimalzahlen darzustellen, wie bisher die ganzen Zahlen.

Wir bemerken zu diesem Zweck, dass, wenn die Division zweier nach fallenden Potenzen von $x$ geordneten Polynome auf ein Polynom geführt hat, dessen Endglieder $cx^2 + bx + a$ sind, die Fortsetzung des Divisionsverfahrens an dem Reste ein Polynom von der Form

$$\frac{b_1}{x} + \frac{c_1}{x^2} + \dots$$

oder $$b_1 x^{-1} + c_1 x^{-2} + \dots$$

liefert. — Dasselbe findet statt bei der Radicirung eines Polynoms mit 2.

Man braucht hiernach, um die ferneren Glieder des Resultates durch eine Decimalzahl auszudrücken, nur die Bildung der Stellen nach rechts fortzusetzen. Das Gesammtresultat ist dann immer noch nach fallenden Potenzen von $x$ (10) geordnet, und während die Exponenten von 10 in dem ganzzahligen Theile der Decimalzahl positiv sind, sind sie in dem Bruchtheile negativ.

**159.** *Erklärungen.* — Jede gebrochene oder irrationale Zahl, die als ein nach fallenden Potenzen von Zehn geordnetes Polynom geschrieben ist, heisst Decimalbruch. Die Stellen, zu welchen Potenzen von Zehn mit negativen Exponenten gehören, heissen Decimalstellen, diejenigen, für welche die Exponenten positiv sind, ganze Stellen. Die ganzen Stellen werden von den Decimalstellen durch ein Komma getrennt. — Die allgemeine Form eines Decimalbruches ist hiernach in nicht abgekürzter Bezeichnung (wobei $x$ die Zahl Zehn bedeutet):

$$\dots cx^2 + bx + a + b_1 x^{-1} + c_1 x^{-2} + \dots,$$

oder in abgekürzter Bezeichnung

$$\dots cba,b_1c_1 \dots$$

Anm. Man erhält hiernach den Werth der $n^{\text{ten}}$ Stelle links vom Komma (der $n^{\text{ten}}$ ganzen Stelle), wenn man ihre Ziffer mit $10^{n-1}$, und diejenigen der $n^{\text{ten}}$ Stelle rechts vom Komma (der $n^{\text{ten}}$ Decimalstelle), wenn man ihre Ziffer mit $10^{-n}$ multiplicirt. — Ist $a = b = c = \dots = 0$, so wird der Decimalbruch geschrieben $0,b_1c_1 \dots$

Wenn man die Decimalstellen

$$b_1 x^{-1} + c_1 x^{-2} + \dots + k_1 x^{-n}$$

mit $x^n$ multiplicirt und dividirt, so erhält man:

$$\frac{b_1 x^{n-1} + c_1 x^{n-2} + \ldots + k_1}{x^n};$$

165. d. h.: Der Werth der Decimalstellen ist einem Quotienten gleich, dessen Dividend die als ganze Zahl betrachteten Decimalstellen bilden, während der Divisor aus einer Eins mit ebensovielen Nullen besteht.

**160.** *Rechnungen mit Decimalbrüchen.* — Mit Decimalbrüchen wird gerechnet wie mit Decimalzahlen; nur die Stelle, welche das Komma im Resultat erhält, bedarf einer Bestimmung durch besondere Regeln. — Fürs Erste sind wichtig folgende leicht abzuleitende Regeln über den Gebrauch der Null:

1) Links von den ganzen und rechts von den Decimalstellen können Nullen beliebig gesetzt und weggelassen werden.

2) Ein Decimalbruch wird mit $10^n$ multiplicirt oder dividirt, indem man das Komma um $n$ Stellen nach rechts oder links rückt.

Anm. Wann geht beim Multipliciren der Decimalbruch in eine ganze Zahl über? Wie kann man eine ganze Zahl als Decimalbruch schreiben? Wie eine ganze Zahl mittelst des Kommas durch $10^n$ dividiren?

Addition und Subtraction. — Durch Hinzufügen von Nullen auf der rechten Seite kann man bewirken, dass alle durch Addition oder Subtraction zu vereinigenden Decimalbrüche gleichviele Decimalstellen haben. Ebensoviele Decimalstellen muss dann auch das Resultat haben. Schreibt man also die zu vereinigenden Zahlen so unter einander, dass die Komma unter einander stehen, so steht auch das Komma des Resultates unter denen der einzelnen Zahlen. (Aufgaben: Hofmann 1. Erste Abtheilung XV.)

Anm. Die Hinzufügung der Nullen ist nur dann nöthig, wenn beim Subtrahiren der Minuend weniger Decimalstellen hat als der Subtrahend.

Multiplication. — Enthält der eine Factor $m$, der andere $n$ Decimalstellen, so wird durch Weglassung des Kommas der eine mit $10^m$, der andere mit $10^n$ multiplicirt. Wenn man also die beiden Decimalbrüche ohne Rücksicht auf das Komma multiplicirt, so ist das Resultat nachträglich noch durch $10^{m+n}$ zu dividiren; d. h.: das Resultat muss $m+n$ Decimalstellen haben.

Anm. Nullen am Ende des Resultats dürfen erst nach Setzung des Kommas weggelassen werden. — Warum? — Wie multiplicirt man einen Decimalbruch mit einer ganzen Zahl? Wie insbesondere mit einer Zahl von der Form $a \,.\, 10^n$?

Division. — Durch Hinzufügen von Nullen auf der rechten Seite kann man bewirken, dass beide Decimalbrüche gleichviele Decimalstellen haben. Lässt man dann beide Kommas weg, so werden dadurch Dividend und Divisor mit derselben Potenz von 10 multiplicirt, der Quotient bleibt folglich unverändert, und die Aufgabe ist auf die Division zweier ganzer Zahlen zurückgeführt.

Anm. Wie dividirt man einen Decimalbruch durch eine ganze Zahl? Wie insbesondere durch eine Zahl von der Form $a \, . \, 10^n$? (S. Formel 35.) — Ist die ganze Zahl des Dividend kleiner als der Divisor, so dividirt man erst die ganzen Zahlen durch einander; dies giebt 0,. Dann nimmt man die Decimalstellen einzeln herunter, und setzt, bis man dividiren kann, für jede Decimalstelle eine Null in's Resultat. — Warum?

(Aufgaben: Hofmann 1. Erste Abtheilung. XVI. XVII. XIX. XX.)

Radicirung mit 2. — Da diese Operation ein wiederholtes Divisionsverfahren ist, so wird das Komma ins Resultat gesetzt, sobald man die erste Decimalstelle benutzt. Bei der Bestimmung des ersten Gliedes wird nur auf die Anzahl der ganzen Stellen Rücksicht genommen, weil es nur von dieser Anzahl abhängt, ob die erste Stelle links eine Potenz von 10 mit geradem oder ungeradem Exponenten enthält.

**161.** *Verwandlung eines Quotienten und einer Quadratwurzel in einen Decimalbruch.* — Man verwandle den Dividend des Quotienten, oder den Radicanden der Wurzel durch Anhängung eines Kommas und beliebig vieler Nullen in einen Decimalbruch, und führe die Division oder Radicirung nach den für diesen Fall aufgestellten Regeln aus.

(Aufgaben: Hofmann 1. Erste Abth. XVIII.; 2. Vierter Abschn. II. 108—192.)

**162.** *Eintheilung der Decimalbrüche.* — 1) Aus Regel 165 geht hervor, wie ein Bruch, dessen Nenner eine Potenz von Zehn ist, unmittelbar als Decimalbruch geschrieben werden kann. — Hat der Nenner die Form $2^p \, . \, 5^q$, d. h.: enthält er keine anderen Factoren als Potenzen von 2 und 5, so kann man den Bruch mit $5^{p-q}$ (wenn $p > q$) oder mit $2^{q-p}$ (wenn $p < q$) erweitern, wodurch der Nenner in $10^p$ oder $10^q$ übergeht. In diesen Fällen also hat das Divisionsverfahren, durch welches man den gegebenen Bruch in einen Decimalbruch verwandelt, ein Ende, weil der Decimalbruch eine endliche Anzahl von Decimalstellen enthält. Ein solcher Decimalbruch heisst ein endlicher.

2) Enthält der Nenner des Bruches nicht ausschliesslich Potenzen von 2 und 5 als Factoren, so ist es offenbar unmög-

lich, ihn durch Erweiterung mit einer ganzen Zahl auf die Form $10^p$ zu bringen, also auch unmöglich, den Bruch als endlichen Decimalbruch darzustellen. In diesem Falle hat das Divisionsverfahren kein Ende, und der Decimalbruch heisst ein unendlicher.

Sei $n$ der Nenner des gegebenen Bruches. Dann beträgt die Anzahl der möglichen Reste beim Divisionsverfahren $n-1$. Folglich muss spätestens nach $n-1$ Divisionen ein früherer Rest wiederkehren. Da aber an den jedesmaligen Rest eine Null angehängt wird, so kehrt nun auch ein früherer Dividend, folglich auch ein früherer Quotient wieder, und es wiederholt sich von nun an eine bestimmte Anzahl von Decimalstellen stets in derselben Reihenfolge. Ein solcher Decimalbruch heisst ein periodischer, und zwar rein periodisch, wenn die sich wiederholende Ziffernreihe (die Periode) unmittelbar hinter dem Komma beginnt, gemischt periodisch, wenn vor der ersten Periode noch Ziffern stehen, die sich nicht wiederholen.

Anm. Ein Quotient kann also nur einen endlichen, oder einen unendlichen periodischen Decimalbruch liefern. — Der Decimalbruch ist rein periodisch, wenn der Nenner des gegebenen Bruches weder 2 noch 5 als Factor enthält, gemischt periodisch, wenn er ausser anderen Factoren noch Potenzen von 2 oder 5 enthält, endlich, wenn er nur Potenzen von 2 oder 5 als Factoren enthält. Die Anzahl der Decimalstellen eines endlichen, und der vorperiodischen Stellen eines gemischt periodischen Decimalbruchs ist dem Exponenten der im Nenner enthaltenen Potenz von 2 oder 5 gleich. — Die Periode pflegt man nur einmal hinzuschreiben und durch einen darüber gezogenen wagerechten Strich zu bezeichnen.

3) Diejenigen unendlichen Decimalbrüche, welche aus dem Verfahren der Quadratwurzelausziehung hervorgehen, können weder endliche noch periodische sein, weil (wie sogleich gezeigt werden wird) jeder endliche und jeder periodische Decimalbruch in einen Quotienten verwandelt werden kann, welcher der irrationalen Quadratwurzel nicht gleich sein kann. Diese Decimalbrüche sind also (nebst allen anderen, welche irrationalen Zahlen gleich sind) unendlich und nicht periodisch.

Aus diesen Betrachtungen geht folgende Eintheilung der Decimalbrüche hervor.

Decimalbrüche.

1. Endliche — Unendliche.

Unendliche: 2. Nicht periodische — Periodische.

Periodische: 3. Rein periodische — 4. Gemischt periodische.

**163.** *Verwandlung eines Decimalbruchs in einen Quotienten.*

1) Endliche Decimalbrüche. — Aus Regel 165 geht unmittelbar die Regel hervor: Ein endlicher Decimalbruch ist gleich einem Quotienten, dessen Dividend die Decimalstellen, und dessen Divisor eine Eins mit ebensovielen Nullen enthält, als Decimalstellen vorhanden sind. 166.

2) Rein periodische Decimalbrüche. — Jeder endliche Decimalbruch konnte als Summe von Brüchen dargestellt werden, deren Zähler die einzelnen Decimalstellen, deren Nenner Potenzen von 10 waren. Auch konnten mehrere dieser Brüche oder alle zu einem einzigen Bruche vereinigt werden. Ganz ebenso kann man die Perioden eines Decimalbruchs einzeln als Brüche darstellen. Ist dann $a$ die Periode, und $x$ der nach Regel 166 gebildete zugehörige Nenner, so ist der Decimalbruch, dessen Werth mit $s$ bezeichnet werden mag, gleich der unendlichen geometrischen Reihe

$$s = \frac{a}{x} + \frac{a}{x^2} + \ldots = a x^{-1} + a x^{-2} + \ldots = \frac{a}{x}(1 + x^{-1} + x^{-2} + \ldots)$$

mithin nach 148, da $q = \frac{1}{x}$ zu setzen ist:

$$s = \frac{a}{x} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{x}} = \frac{a}{x - 1}.$$

Da $x$ aus einer Eins mit ebensovielen Nullen besteht, als $a$ Stellen hat, so besteht $x - 1$ aus ebensovielen Neunen, als $a$ Stellen hat, und die letzte Formel giebt hiernach die Regel: Ein rein periodischer Decimalbruch ist gleich einem Quotienten, dessen Dividend die Periode, und dessen Divisor ebensoviele Neunen enthält, als die Periode Stellen hat. 167.

3) Gemischt periodische Decimalbrüche. — Wenn die Stellen einer Periode durch $a$, und ihre Anzahl durch $p$, ferner die vorperiodischen Stellen durch $b$, und ihre Anzahl durch $q$, endlich 10 durch $x$ bezeichnet wird, so gehört nach Regel 166 zu den vorperiodischen Stellen der Nenner $x^q$, und zu den einzelnen Perioden die Nenner $x^{q+p}$, $x^{q+2p}$, ... Mithin ist der Werth des Decimalbruches

$$s = \frac{b}{x^q} + \frac{a}{x^{q+p}} + \frac{a}{x^{q+2p}} + \dots$$
$$= \frac{b}{x^q} + \frac{a}{x^{q+p}}\left(1 + \frac{1}{x^p} + \frac{1}{x^{2p}} + \dots\right)$$
$$= \frac{b}{x^q} + \frac{a}{x^{q+p}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{x^p}} = \frac{b}{x^q} + \frac{a}{x^{q+p} - x^q}$$
$$= \frac{1}{x^q}\left(b + \frac{a}{x^p - 1}\right) = \frac{(bx^p + a) - b}{x^q(x^p - 1)}.$$

Nun ist $(bx^p + a)$ die Zahl, welche entsteht, wenn man die vorperiodischen Stellen mit der ersten Periode zusammen als eine Zahl betrachtet; $(x^p - 1)$ eine Zahl, welche aus soviel Neunen besteht, als die Periode Stellen hat, und $x^q$ eine Zahl, welche aus einer Eins mit soviel Nullen besteht als vorperiodische Stellen vorhanden sind. Multiplicirt man nun $x^p - 1$ mit $x^q$, so erhält man eine Zahl, die soviel Neunen enthält als periodische, und soviel Nullen als vorperiodische Stellen vor-
168. handen sind. Die letzte Formel giebt also die Regel: Ein gemischt periodischer Decimalbruch ist gleich einem Quotienten, dessen Dividend erhalten wird, wenn man die vorperiodische Zahl von derselben um die erste Periode verlängerten Zahl subtrahirt, und dessen Divisor aus soviel Neunen besteht als die Periode Stellen hat, und aus soviel Nullen, als vorperiodische Stellen da sind.

Anm. Nach Anwendung der Regeln 166, 167, 168 hat man noch (nach Nr. 157, 1) den grössten gemeinsamen Factor zwischen Zähler und Nenner zu suchen und den Bruch durch denselben zu heben.

(Aufgaben: Hofmann 1. Erste Abth. XVIII.)

### 3. Näherungswerthe.

**164.** *Vorbemerkung.* — Soll ein unendlicher Decimalbruch für weitere Rechnungen brauchbar sein, so muss man ihn an irgend einer Stelle abbrechen. Man erhält dadurch für die gebrochene oder irrationale Zahl, die er vertritt, einen Näherungswerth, der um so genauer ist, je mehr Stellen er enthält. — Ein solcher Näherungswerth hat, der gebrochenen oder irrationalen Zahl gegenüber, einerseits den Nachtheil einer nicht vollkommenen Genauigkeit, andrerseits aber den Vortheil, dass seine Grösse leicht mit derjenigen anderer Decimalzahlen

verglichen, und dass mit ihm ebenso wie mit anderen Decimalzahlen gerechnet werden kann. Jener Nachtheil kommt aber nicht in Betracht, wenn, was in der angewandten Arithmetik meist der Fall ist, die Zahlen, mit denen man rechnet, Resultate von Beobachtungen sind, welche selbst nicht auf vollkommene Genauigkeit Anspruch machen können. Es genügt alsdann, von vornherein zu bestimmen, welchen Grad der Genauigkeit die Rechnung haben soll, d. h. wie viele Decimalstellen von allen darin vorkommenden Decimalbrüchen benutzt werden sollen. Um die Fehler, welche durch das Abkürzen der Decimalbrüche entstehen, nicht zu gross werden zu lassen, bedient man sich der Regel:

Die letzte Ziffer des abgekürzten Decimalbruchs 169.
wird um Eins vergrössert, wenn die erste Ziffer des weggelassenen Theiles $\geq 5$ ist.

Lässt man nun die Forderung einer absoluten Genauigkeit der Resultate fallen, so erhebt sich die Frage, ob es nicht möglich ist, die in der reinen Arithmetik ungelöst gebliebenen Aufgaben: Ein Polynom mit einer Zahl (ausser 2) zu radiciren und logarithmiren, und, eine Gleichung von höherem als vierten Grade aufzulösen, wenigstens durch Bestimmung von Näherungswerthen zu lösen. Dies gelingt nun in der That theils mittelst der Kettenbrüche, theils mittelst der Logarithmen.

### a. Näherungswerthe durch Kettenbrüche.*)

**165.** *Näherungsweise Bestimmung der Wurzel einer Gleichung.* — Setzt man in einer geordneten und auf Null gebrachten Gleichung $A = 0$ die Unbekannte $x$ gleich der ganzen Zahl $n$, und nennt den Werth, welchen $A$ durch diese Substitution erhält, $A_n$, so entsprechen sich die Werthe

$$x = n,\ n-1, \dots 3,\ 2,\ 1,\ 0,\ -1,\ -2, \dots$$
$$A = A_n, A_{n-1}, \dots A_3, A_2, A_1, A_0, A_{-1}, A_{-2}, \dots$$

Liegt nun eine Wurzel der Gleichung zwischen $a_1$ und $a_1 + 1$, so liegt offenbar der zu dieser Wurzel gehörige Werth von $A$, nämlich Null, zwischen $A_{a_1}$ und $A_{a_1+1}$; d. h.: eine dieser beiden Zahlen muss positiv und die andre negativ sein. Umgekehrt kann man also, wenn zwei benachbarte Zahlen der Reihe, $A_{a_1}$

---

*) Beispiele s. am Schluss des Buches in der „Uebersicht der Formeln und Regeln".

und $A_{a_1+1}$, entgegengesetzte Zeichen haben, schliessen, dass eine Wurzel der Gleichung zwischen $a_1$ und $a_1+1$ liegen wird. Demnach setzt man

$$x = a_1 + \frac{1}{x_1},$$

substituirt diesen Werth in die Gleichung $A = 0$, und erhält dadurch eine Gleichung mit der Unbekannten $x_1$, die man ebenso behandelt wie die gegebene. Durch Fortsetzung dieses Verfahrens erhält man allmälig die Gleichungen:

$$x_1 = a_2 + \frac{1}{x_2}; \quad x_2 = a_3 + \frac{1}{x_3}; \quad \ldots,$$

und durch Elimination von $x_1$, $x_2$, ...

$$x = a_1 + 1/\overline{a_2} + 1/\overline{a_3} + \ldots$$

Dieser, bis auf eine beliebige Anzahl von Gliedern fortgesetzte Kettenbruch kann dann in einen Quotienten, und schliesslich in einen Decimalbruch verwandelt werden.

(Aufgaben: Bardey XL.)

**166.** *Näherungsweise Bestimmung eines Logarithmus.* — Es sei zu bestimmen

$$^{a}l\, b = y,$$

oder, was dasselbe ist, die Gleichung aufzulösen:

$$a^y = b.$$

Dann kann man stets zwei Zahlen $x_1$ und $x_1+1$ so bestimmen, dass

$$a^{x_1} < b; \quad a^{x_1+1} > b$$

ist. Sei dann

$$a^{x_1} = b_1; \quad a^{x_1+1} = c_1,$$

so setzen wir

$$y = x_1 + \frac{1}{y_1},$$

woraus folgt:

$$a^y = a^{x_1} \cdot a^{\frac{1}{y_1}}$$

oder

$$b = b_1 \cdot a^{\frac{1}{y_1}};$$

$$a^{\frac{1}{y_1}} = \frac{b}{b_1} = a_1;$$

$$a_1^{y_1} = a.$$

Diese Gleichung wird genau so behandelt wie die gegebene, und das ganze Verfahren beliebig oft wiederholt, wie folgendes Schema zeigt:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $a^y = b$ | $a_1^{y_1} = a$ | $a_2^{y_2} = a_1$ | . |
| $\begin{cases} a^{x_1} = b_1 \\ a^{x_1+1} = c_1 \end{cases}$ | $\begin{cases} a_1^{x_2} = b_2 \\ a_1^{x_2+1} = c_2 \end{cases}$ | $\begin{cases} a_2^{x_3} = b_3 \\ a_2^{x_3+1} = c_3 \end{cases}$ | . . |
| $(b_1 < b < c_1)$ | $(b_2 < a < c_2)$ | $(b_3 < a_1 < c_3)$ | . |
| $y = x_1 + \frac{1}{y_1}.$ | $y_1 = x_2 + \frac{1}{y_2}.$ | $y_2 = x_3 + \frac{1}{y_3}.$ | . . |
| $a^y = a^{x_1} . a^{\frac{1}{y_1}}$ | $a_1^{y_1} = a_1^{x_2} . a_1^{\frac{1}{y_2}}$ | $a_2^{y_2} = a_2^{x_3} . a_2^{\frac{1}{y_3}}$ | . |
| $b = b_1 . a^{\frac{1}{y_1}}$ | $a = b_2 . a_1^{\frac{1}{y_2}}$ | $a_1 = b_3 . a_2^{\frac{1}{y_3}}$ | . . |
| $\frac{b}{b_1} = a_1 = a^{\frac{1}{y_1}}$ | $\frac{a}{b_2} = a_2 = a_1^{\frac{1}{y_2}}$ | $\frac{a_1}{b_3} = a_3 = a_2^{\frac{1}{y_3}}$ | . . |
| $a_1^{y_1} = a$ | $a_2^{y_2} = a_1$ | $a_3^{y_3} = a_2$ | . |

Aus den in der 5. wagerechten Reihe stehenden Gleichungen erhält man dann durch Elimination von $y_1, y_2, \dots$

$$y = x_1 + 1/\overline{x_2} + 1/\overline{x_3} + \dots,$$

wodurch der gesuchte Logarithmus in Form eines Kettenbruches dargestellt ist.

### b. Näherungswerthe durch Logarithmen.

**167.** Addition und Subtraction von Decimalbrüchen sind Rechnungen, die leicht ausführbar sind, und wieder auf Decimalbrüche führen von derselben Stellenzahl, also auch von derselben Genauigkeit, wie die gegebenen. Dagegen erfordern Multiplication und Division zweier Decimalbrüche, sowie Potenzirung eines Decimalbruchs mit einer ganzen Zahl, umständliche echnungen, die sogar zum Theil nutzlos sind, wenn das Reıltat mehr Decimalstellen enthält, als die gegebenen Zahlen, ı man in diesem Falle die überflüssigen Decimalstellen wegssen wird. Es ist also wichtig, ein Verfahren zu kennen, elches diese Rechnungen in kürzerer Weise ausführen lehrt. in solches Verfahren, welches gleichzeitig auch die bisher ıch ungelösten Aufgaben zum Abschluss bringt, einen Deci-

malbruch (oder eine Decimalzahl) mit einem beliebigen anderen zu potenziren und zu radiciren, ergiebt sich aus den Eigenschaften der Logarithmen.

Es zeigen nämlich die Formeln 63, 64, 66, 67

$$ {}^{c}l(xy) = {}^{c}lx + {}^{c}ly; \qquad {}^{c}l(x^b) = b\,.\,{}^{c}lx $$

$$ {}^{c}l\left(\frac{z}{y}\right) = {}^{c}lz - {}^{c}ly; \qquad {}^{c}l(\sqrt[b]{y}) = \frac{{}^{c}ly}{b} $$

übereinstimmend die Eigenschaften, dass die Logarithmen jeder Formel dieselbe Grundzahl haben, und dass die mit den Logarithmen rechts auszuführenden Rechnungen eine Stufe tiefer stehen, als diejenigen, welche links in den Klammern angedeutet sind.

Kennt man also die Logarithmen aller Decimalzahlen (bis zu irgend einer Grenze) nach derselben Basis $c$, so kann man z. B. das Product $z = xy$, worin $x$ und $y$ gegebene Zahlen sind, dadurch ausrechnen, dass man die Logarithmen dieser Zahlen addirt, und zu dem so gefundenen Logarithmus den zugehörigen Numerus aufsucht. So wird die Multiplication durch eine Addition ersetzt, und, wie die drei übrigen Formeln zeigen, die Division durch eine Subtraction, die Potenzirung durch eine Multiplication, die Radicirung durch eine Division. — Da der Logarithmus eines Decimalbruches als Differenz der Logarithmen von Dividend und Divisor des ihm entsprechenden Quotienten dargestellt werden kann, so sieht man, dass die abgekürzte Rechnung nicht nur auf Decimalzahlen, sondern auch auf Decimalbrüche angewendet werden kann. Es ist aber nicht zu vergessen, dass, da die Logarithmen selbst in ihrer grossen Mehrzahl, (sofern sie als Decimalbrüche dargestellt sind) nur Näherungswerthe sind, auch die mit ihrer Hilfe gefundenen Resultate im Allgemeinen dieselbe Eigenschaft besitzen.

**168.** *Logarithmische Systeme.* — *Erklärungen.* — 1) Unter einem logarithmischen Systeme versteht man den Inbegriff aller zu derselben Grundzahl gehörigen Logarithmen.

2) Der Inbegriff der ganzen Stellen des einen Logarithmus darstellenden Decimalbruches heisst die Kennziffer, der Inbegriff der Decimalstellen die Mantisse.

3) Dasjenige logarithmische System, welches die zur Grund-

zahl 10 gehörigen Logarithmen enthält, heisst das gemeine (Briggische).*)

Anm. Die Grundzahl 10 pflegt beim Schreiben und Sprechen weggelassen zu werden.

**169.** *Eigenschaften des gemeinen logarithmischen Systems.* — 1) Es ist

$$l(10^n) = n \,.\, l10 = n; \quad (66,\ 62.)$$

d. h.: Der Logarithmus einer Potenz von 10 ist gleich 170.
ihrem Exponenten.

2) Da die Potenzen von 10 um so grösser sind, je grösser ihr Exponent ist, und umgekehrt, so hat die grössere von 171.
zwei Zahlen den grösseren Logarithmus.

3) Aus 170 und 171 folgt: Die Logarithmen aller Zahlen

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| zwischen | 1 | und | 10 | liegen | zwischen | 0 und | 1 |
| „ | 10 | „ | 100 | „ | „ | 1 „ | 2 |
| „ | 100 | „ | 1000 | „ | „ | 2 „ | 3 |
| . . . | . . . | . . . | . . . | . . . | . . . | . . . | . . . |

Nun sind aber die Zahlen zwischen 1 (incl.) und 10 (excl.) die einstelligen, die zwischen 10 und 100 die zweistelligen Zahlen, u. s. w. Andrerseits haben alle als Decimalbrüche ausgedrückte Logarithmen, wenn sie zwischen 0 und 1 liegen, die Kennziffer 0; wenn zwischen 1 und 2, die Kennziffer 1, u. s. w. — Man kann daher auch sagen: Die Logarithmen aller einstelligen Zahlen haben die Kennziffer 0, die aller zweistelligen Zahlen die Kennziffer 1; allgemein:

Die Kennziffer eines Logarithmus ist um Eins 172.
kleiner als die Stellenzahl des zugehörigen Numerus.

Anm. Man kann daher die Kennziffer ohne weiteres hinschreiben, und es brauchen die logarithmischen Tabellen nur die Mantissen der Logarithmen zu enthalten.

4) Es ist

$$l(10^n \,.\, a) = n \,.\, l10 + la = n + la;$$

d. h. (wenn $n$ und $a$ ganze Zahlen sind): Die Logarithmen 173.

---

*) Dieses System ist für Anwendungen auf die Decimalrechnung d wegen das vortheilhafteste, weil seine Grundzahl auch die Grundzahl d · Decimalrechnung ist. Ausserdem ist noch das natürliche (Nepersche) S stem zu erwähnen, dessen Grundzahl der Werth der unendlichen Reihe

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

fi $x = 1$ ist ($e = 2{,}7182818\ldots$)

Henry Briggs (1560—1630) und John Napier (1550—1617), englische h hematiker.

solcher ganzen Zahlen, die sich nur durch angehängte Nullen von einander unterscheiden, haben dieselbe Mantisse, und unterscheiden sich nur durch die Kennziffer.

5) Ist $a$ ein Decimalbruch, so ist $10^n.a$ ein Decimalbruch, der sich nur durch die Stelle des Kommas von $a$ unterschei-
174. det. Man hat also die Regel: In einem Decimalbruch hat die Stellung des Kommas keinen Einfluss auf die Mantisse.

6) Vermindert man in einer Decimalzahl durch Setzen eines Kommas die Zahl der ganzen Stellen um $n$, so wird die Zahl durch $10^n$ dividirt, oder (was dasselbe ist) mit $10^{-n}$ multiplicirt, also vermindert sich (nach 173) die Kennziffer
175. ihres Logarithmus ebenfalls um $n$. D. h.: Die Kennziffer des Logarithmus eines Decimalbruches ist um Eins kleiner als die Anzahl seiner ganzen Stellen.

7) Setzen wir in der Formel 173 $-n$ statt $n$, und nehmen an, dass $a$ eine ganze Zahl ist, deren Stellenzahl $p \leqq n$ ist, so lautet die Formel:

$$l\left(\frac{a}{10^n}\right) = la - n.$$

Wird nun $\frac{a}{10^n}$ als Decimalbruch geschrieben, so muss derselbe (nach 165) $n$ Decimalstellen haben; mithin müssen den $p$ Stellen von $a$ noch $n-p$ Nullen als Decimalstellen, und eine Null vor dem Komma, also im Ganzen $n-p+1$ Nullen vorgesetzt werden. Die Kennziffer des Logarithmus für $a$ ist $p-1$; für $\frac{a}{10^n}$ also ist sie $p-1-n = -(n-p+1)$; man hat daher die
176. Regel: Die Kennziffer des Logarithmus eines Decimalbruches, welcher mit Nullen beginnt, ist gleich der negativ genommenen Anzahl aller dieser Nullen.

Anm. Die Regeln 172—176 lassen sich so zusammenfassen: Die Kennziffer des Logarithmus eines Decimalbruches (Decimalzahl) ist, wenn derselbe $> 1$ ist, gleich der um 1 verminderten Anzahl seiner ganzen Stellen; wenn er aber $< 1$ ist, gleich der negativ genommenen Anzahl der voranstehenden Stellen. — Die Mantisse des Logarithmus eines Decimalbruches (Decimalzahl) ist von den etwa vor oder nachstehenden Nullen, sowie vom Komma unabhängig. —

Die negative Kennziffer wird hinter die Decimalstellen des Logarithmus gesetzt, der hiernach als Differenz eines Decimalbruches mit 0 Ganzen, und einer ganzen Zahl erscheint und behandelt wird.

Die Regeln 173—176 lassen sich auch dadurch finden, dass man eine ganze Zahl wiederholt mit 10 multiplicirt, oder durch 10 dividirt, und die Veränderungen in der Kennziffer ihres Logarithmus feststellt.

Da die Potenzen einer positiven Zahl nie negativ sind, so giebt es im gemeinen Logarithmensystem für negative Zahlen keine Logarithmen. Soll ein negativer Ausdruck logarithmisch berechnet werden, so berechnet man den positiven Ausdruck, und giebt erst dem gefundenen Resultate das Zeichen —.

Je nach dem Grade der Genauigkeit, welchen die logarithmischen Rechnungen haben sollen, benutzt man logarithmische Tafeln mit 7, 6, 5, 4 Decimalstellen der Mantisse, oder auch nur das Rechenlineal.*)

(Aufgaben: Hofmann 3. Elfter Abschn. II. III. IV. V. — Bardey XVIII. C. D.)

# II. Die Zinsrechnung.

## 1. Einfache Zinsrechnung.

**170.** *Vorbemerkung.* — Der Zuwachs $z_1$, den eine durch die Zahl $c$ ausgedrückte Grösse in einer bestimmten Zeit erfährt, kann als Bruchtheil der Zahl $c$ ausgedrückt werden, und zwar mittelst der Decimalbrüche stets als Bruch mit dem Nenner 100. Beträgt dieser Zuwachs $\frac{p}{100}$ von $c$, so ist demnach

1) $z_1 = \frac{pc}{100}$. 177.

**171.** *Erklärungen.* — 1) Eine Geldsumme $c$, welche sich in gleichen Zeiten um gleiche Summen vermehrt, heisst Capital; der jährliche Zuwachs dieser Summe, $z_1$, die Zinsen des Capitals für ein Jahr; und die Zinsen $p$ für jedes Hundert des (in irgend einer Münze ausgedrückten) Capitals der Zinsfuss (die Procente).

2) Man sagt: Das zum Zinsfuss $p$ (zu $p$ Procent) stehende Capital $c$ bringt in einem Jahre die Zinsen $z_1$.

Anm. Die Bedeutung von $p$ ergiebt sich, wenn man in Formel 1) $c = 100$ setzt. Den Namen Procente führt $p$ auch dann, wenn die Zahlen $z_1$ und $c$ die in der Vorbemerkung gegebene allgemeinere Bedeutung haben.

**172.** *Weitere Formeln.* — Bezeichnet man den Zuwachs von $c$ in $n$ Jahren mit $z_n$, so ist, weil derselbe nach Erklärung 1) $n$mal so gross ist als derjenige in einem Jahre,

---

*) Siebenstellig, z. B.: Vega, Berlin b. Weidmann. Sechsstellig: Bremiker, Berlin b. Nikolai. Fünf- und vierstellig: Bremiker, Berlin b. Weidmann. — Das Rechenlineal, von Tavernier-Gravet, Rue de Babylone in Paris, beschrieben in der „Ztschr. f. math. u. naturw. Unterricht v. Hoffmann“ Bd. 3. S. 336.

178. 2) $z_n = \frac{npc}{100}$.

Aus 2) folgt weiter:

179. 3) $n = \frac{100\,z_n}{pc}$; $p = \frac{100\,z_n}{nc}$; $c = \frac{100\,z_n}{np}$.

Mittelst der Formeln 2) und 3) lassen sich alle Aufgaben der einfachen Zinsrechnung lösen. Dieselben Formeln lassen sich in folgende mechanische Regel zusammenfassen:

Ist nach Zinsen gefragt, so kommt 100 unter den Divisionsstrich, alles andere darüber; ist nach etwas anderem als Zinsen gefragt, so kommt 100 und die Zinsen über den Divisionsstrich, alles andere darunter.

Anm. Ist $n = 1$ und $c$ der Einkaufspreis einer Waare, so heisst $z_1$ der Gewinn ($-z_1$ der Verlust); $c \pm z_1$ der Verkaufspreis. — Ist $s_n = c + z_n$ eine nach $n$ Jahren zahlbare Summe, so heisst $c$ die Baarzahlung, $z_n$ der Disconto. — Ist $c$ der Preis einer Waare, so heisst, wenn die Waare gleich beim Einkauf bezahlt wird, $-z_1$ der Rabatt, und $c - z_1$ ist dann die wirklich bezahlte Summe. Um alle hierher gehörigen Aufgaben zu lösen, braucht man nur noch eine Formel, welche lehrt $c$ zu finden, wenn $s_n$, $n$, $p$ gegeben sind. Nun erhält man aus 2)

$$s_n = c \pm z_n = \frac{c(100 \pm np)}{100};$$

also:

180. 4) $c = \frac{100 s_n}{100 \pm np}$,

welches die verlangte Formel ist.

(Aufgaben: Hofmann 1. Zweite Abth. VI.)

## 2. Zinseszins-Rechnung.

**173.** *Vorbemerkung.* — In der einfachen Zinsrechnung wurde vorausgesetzt, dass die jährlichen Zinsen eines Capitals ausbezahlt würden, und das Capital selbst unverändert bliebe. Unterbleibt jene Auszahlung, so vergrössert sich das Capital jährlich um den Betrag der Zinsen des vorigen Jahres, und man sagt, das Capital stehe auf Zinseszins.

Anm. Ebenso wie die Zinsen, statt am Schlusse eines Jahres, in beliebigen anderen Zeitabschnitten ausbezahlt werden können, so können sie auch nach anderen Zeitabschnitten, als nach einem Jahre, „zum Capital geschlagen werden". Ist dieser Zeitabschnitt der $r^{\text{te}}$ Theil eines Jahres, so hat man in den Formeln der Zinseszins-Rechnung nur $\frac{p}{r}$ statt $p$, und $nr$ statt $n$ zu setzen. Die Formeln der einfachen Zinsrechnung erleiden durch diese Substitution keine Aenderung.

**174.** *Bestimmung der Summe, zu der ein auf Zinseszins stehendes Capital anwächst.* — Sei $s_n$ die Summe, zu der das zum Zinsfuss $p$ stehende Capital $c$ nach $n$ Jahren angewachsen ist, so ist nach 177

$$s_1 = c + \frac{pc}{100} = c\left(1 + \frac{p}{100}\right)$$

oder, wenn wir

$$1) \qquad 1 + \frac{p}{100} = q$$ 181.

setzen:

$$s_1 = c \cdot q;$$

Ebenso:

$$s_2 = s_1 \cdot q;$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$s_n = s_{n-1} \cdot q.$$

Durch Multiplication aller dieser Formeln folgt:

$$2) \qquad s_n = c \cdot q^n.$$ 182.

Anm. Man bestimme aus 2) die Werthe von $c$, $n$, $q$ ($p$). Soll eine nach $n$ Jahren zu leistende Zahlung durch eine sogleich zu leistende ersetzt werden, so ist $c$ zu bestimmen.

**175.** *Erweiterung.* — Tritt am Schlusse jedes Jahres zu dem auf Zinseszins stehenden Capitale noch ein Capital $b$ hinzu, das ebenfalls auf Zinseszins stehen soll, so wachsen diese Capitalien, von denen das erste $(n-1)$, das zweite $(n-2)$, ... das $n^{\text{te}}$ 0 Jahre lang verzinst wird, nach 2) zu den Summen an:

$$bq^{n-1}, \; bq^{n-2}, \; \ldots \; bq^0.$$

Mithin beträgt am Schluss des $n^{\text{ten}}$ Jahres die aus allen Capitalen sich ergebende Summe

$$s = cq^n + bq^{n-1} + bq^{n-2} + \ldots + b$$
$$= cq^n + b(q^{n-1} + q^{n-2} + \ldots + 1)$$

$$3) \quad s = cq^n + b \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}. \qquad (147\text{a.})$$ 183.

Anm. Man bestimme aus 3) die Werthe von $c$, $b$, $n$.

**176.** *Specielle Fälle.* — 1) $c = 0$. — Dieser Fall tritt ein, enn man durch jährliche Zahlungen (Prämien) ein Capital $s$ rsparen will, welches nach $n$ Jahren oder nach dem Tode iner bestimmten Person ausbezahlt werden soll (Lebensver-cherung. Im letzten Falle wird für $n$ die bei Beginn der ahlungen vorhandene wahrscheinliche Lebensdauer jener Per-on gesetzt. Vgl. den Abschnitt über Wahrscheinlichkeits-echnung).

2) $b$ ist negativ. — Dies ist der Fall, wenn durch Abzahlungen jährlich eine Verringerung des Capitals stattfinden soll. Hierbei sind aber 3 Fälle zu unterscheiden. Die Zinsen des ersten Jahres sind nach 177 gleich $\frac{pc}{100}$, oder, nach 181, gleich $c(q-1)$.

a) $b = c(q-1)$. Dann deckt die jährliche Abzahlung nur die jährlichen Zinsen, und es findet offenbar keine Verminderung des Capitals statt, sodass einfache Zinsrechnung vorliegt. In der That erhält man $s = c$, wenn man in 183 $b$ durch $-c(q-1)$ ersetzt.

Anm. Dieser Fall findet statt, wenn aus den Zinsen eines Capitals eine jährliche Ausgabe von gleicher Grösse auf ewige Zeiten bestritten werden soll.

b) $b < c(q-1)$. Dann werden die jährlichen Zinsen durch die jährliche Abzahlung nicht gedeckt, und das Capital fährt trotz der Abzahlung fort, sich zu vergrössern.

c) $b > c(q-1)$. Dann bleibt nach Abrechnung der jährlichen Zinsen ein Theil der Abzahlung zur Verringerung des Capitals übrig, und zwar wird, da das Capital, also auch seine jährlichen Zinsen, immer kleiner wird, der auf die Verringerung des Capitals entfallende Theil der jährlichen Abzahlung immer grösser.

Anm. Dieser Fall findet statt, wenn ein Capital den Zweck hat, nur für eine bestimmte Zeit zur Bestreitung jährlich wiederkehrender Ausgaben zu dienen, wobei es nach Verlauf dieser Zeit erschöpft ist.

3) $s = 0$, $b$ negativ. — Die Formel 3) lautet dann:

184. $$cq^n = b \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Dieser Fall tritt ein, wenn ein Capital durch jährliche Abzahlungen nach einer bestimmten Zeit getilgt wird.

Anm. Man bestimme aus der letzten Formel die Werthe von $b, c, n$. Soll eine auf einem Grundstück ruhende, in Form einer $n$ Jahre hindurch zu leistenden Zahlung $b$ erscheinende Last durch eine einmalige Zahlung abgelöst werden, so ist $c$ zu bestimmen.*) — Soll ermittelt werden, nach wieviel Jahren ein Capital $c$ durch eine jährliche Zahlung $b$ getilgt sein wird, so ist $n$ zu bestimmen. — Soll endlich die Höhe der Geldsumme (Rente) bestimmt werden, die einer Person $n$ Jahre lang gezahlt werden kann, wenn sie zu Anfang ein Capital $c$ einzahlt, so ist $b$ zu bestimmen.

(Aufgaben: Hofmann 3. Sechzehnter Abschn. — Bardey XXXIV.)

*) Ist die Last eine auf ewige Zeiten ruhende, so ist die Formel beiderseits durch $q^n$ zu dividiren, und dann $n = \infty$ zu setzen, woraus $c = \frac{b}{q-1}$ folgt.

# Reine Combinatorik.

## Einleitung.

**177.** Aus einer Reihe verschiedener Gegenstände lassen sich in mannigfaltiger Weise Gruppen aussondern. Man nennt in diesem Falle die Gegenstände *Elemente*; die durch Zusammenfassung mehrerer Elemente entstehenden Gruppen heissen *Formen*; und die Wissenschaft, deren *erste Aufgabe* es ist, auf alle möglichen Arten Combinationen einer gegebenen Menge von Elementen *auszuwählen* und zu zählen, heisst *Combinatorik*.

Ein Element wird durch eine Ziffer oder durch einen Buchstaben bezeichnet, eine Form durch eine Reihe von Ziffern oder Buchstaben.

Von zwei Elementen heisst dasjenige, welches durch eine Ziffer von höherem Werthe oder durch einen späteren Buchstaben des Alphabets bezeichnet ist, das *höhere*, das andere das *niedere*.

Anm. Ziffern und Buchstaben haben also hier eine durchaus andere Bedeutung als in der Arithmetik. Es fehlt ihnen der Begriff der Grösse, und verschiedene Buchstaben oder Ziffern dienen eben nur zur Unterscheidung verschiedener Elemente. Worin aber diese Verschiedenheit besteht, ob in der Grösse, Gestalt, Farbe, oder sonstigen Eigenschaften der Gegenstände, die man sich unter den Elementen denkt, ist ganz gleichgiltig. Da diese Gegenstände auch Zahlen sein können, so zeigt sich die Möglichkeit, die Combinatorik auf die Arithmetik anzuwenden.

Die Stellung, welche die einzelnen Elemente innerhalb einer Combination einnehmen, ist entweder unwesentlich oder wesentlich. Im zweiten Falle erwächst der Combinatorik die *zweite Aufgabe*: die Elemente einer gegebenen Combination auf alle möglichen Arten *zu ordnen*, und die Anzahl dieser verschiedenen Ordnungen zu bestimmen.

An einer gegebenen Menge von Elementen kann entweder nur eine der beiden Aufgaben der Combinatorik, Auswählen und Ordnen, oder beide gelöst werden. Man unterscheidet hiernach folgende drei Operationen:

1. Permutiren: Ordnen, ohne auszuwählen.
2. Combiniren: Auswählen, ohne zu ordnen.
3. Variiren: Auswählen und Ordnen.

## 1. Das Permutiren.

**178.** *Erklärungen.* — Eine gegebene Combination 123...*n* permutiren heisst: ihre Elemente auf alle möglichen Arten zu ordnen. Die hierdurch entstehenden Formen heissen die Permutationen der gegebenen Combination.

**179.** *Bildung der Permutationen.* — Erste Methode. Man schreibt ein Element auf, und besetzt die beiden Plätze rechts und links von demselben mit einem zweiten. In jeder der beiden so erhaltenen Formen besetzt man die drei vorhandenen Plätze (vor jedem Element und am Ende) mit einem dritten Elemente, u. s. w. Man erhält dadurch allmälig die Formen

1.
21, 12.
321, 231, 213, 312, 132, 123.
. . . . . . . . . . . . . .

Dies Verfahren wird fortgesetzt, bis alle Elemente erschöpft sind. Dann bildet die letzte Formenreihe die gesuchten Permutationen.

Die Reihe der Elemente heisst geordnet, wenn jedem Elemente ein höheres folgt.

Die Reihe der Permutationen heisst geordnet, wenn, unter der Voraussetzung dass jede Form eine Decimalzahl bedeutet, jede folgende Form eine grössere Zahl vorstellt als die vorhergehende.

Anm. Die erste Methode giebt die Permutationen nicht in geordneter Reihe. Auch macht sie insofern einen Umweg als ausser den beabsichtigten Permutationen noch eine Menge anderer Formen gebildet wird. Von dem ersten Mangel ist die folgende Methode frei.

Zweite Methode. Man schreibt jedes Element einmal in geordneter Reihe auf. In jeder dieser (einstelligen) Formen setzt man an zweite Stelle die jedesmal übrigen Elemente in geordneter Reihe, u. s. w. So erhält man:

| | 1 | 2 | 3 | 4 . . |
|---|---|---|---|---|
| 12 | 21 | 31 | 41 | . . |
| 13 | 23 | 32 | 42 | . . |
| 14 | 24 | 34 | 43 | . . |
| . . | . . | . . | . . | . . |

Dritte Methode. Um aus der geordneten Elementen-Reihe alle Permutationen direct und geordnet zu bilden, erhöht man das dem Ende nächste Element, welches, ohne auf ein vorhergehendes höheres Element zurückzugreifen, noch erhöht werden kann, möglichst wenig, und ordnet die folgenden Elemente. Ebenso bildet man aus jeder Permutation die folgende. So erhält man z. B. für 6 Elemente der Reihe nach:

1 2 3 4 5 6
1 2 3 4 6 5
1 2 3 5 4 6
1 2 3 5 6 4
1 2 3 6 4 5
1 2 3 6 5 4
1 2 4 3 5 6
. . . . . .

Anm. Wie bestimmt man die $n^{te}$ Permutation einer gegebenen Combination, ohne die $n-1$ vorhergehenden zu bilden? — Wie bestimmt man von einer gegebenen Permutation, die wievielte sie ist? —

**180.** *Bestimmung der Anzahl der Permutationen.* — Erster Fall: Alle Elemente sind ungleich. — Aus der ersten der zur Bildung der Permutationen angewandten Methoden geht hervor, dass die Anzahl der Permutationen für 1 Element 1, für 2 Elemente $1.2 = 2!$, für 3 Elemente $1.2.3 = 3!$ beträgt. Sie wird daher für $n$ Elemente $n!$ sein, wenn diese Bestimmung auch noch für $(n+1)$ Elemente gilt. Nun erhält man aber aus den Permutationen von $n$ Elementen diejenigen von $(n+1)$ Elementen, wenn man in jeder der ersteren das neue Element an die $(n+1)$ vorhandenen Plätze stellt. Aus jeder der $n!$ Permutationen gehen also $(n+1)$ neue hervor, sodass die Gesammtzahl $n!(n+1) = (n+1)!$ beträgt. Mithin gilt, wenn mit $P_n$ die Anzahl der Permutationen aus $n$ Elementen bezeichnet wird, allgemein die Formel

$$P_n = n! \qquad 185.$$

Zweiter Fall: Unter den $n$ Elementen sind $p$ gleiche. — Wenn man alsdann in einer beliebig gewählten Form die $p$ gleichen Elemente unter sich permutirt, so erhält

man $p!$ Formen, die sich gar nicht von einander unterscheiden. Stellt man nun zuerst alle diejenigen Formen auf, welche wirklich von einander verschieden sind, und permutirt in jeder die $p$ gleichen Elemente unter sich, so erhält man sämmtliche $n!$ Formen. Sei die Anzahl der von einander verschiedenen Formen $P_{np}$, so ist hiernach

$$p!\,P_{np} = n!$$

oder:

186. $$P_{np} = \frac{n!}{p!}.$$

Sind ausser der Gruppe von $p$ gleichen Elementen noch Gruppen von $q, r, ..$ unter sich gleichen Elementen vorhanden, so erhält man durch Wiederholung der vorigen Betrachtung die Formel

187. $$P_{npqr\ldots} = \frac{n!}{p!\,q!\,r!\ldots}.$$

Anm. Aus 187 folgt noch:

187a. $$P_{np(n-p)} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!} = n^{\cdot p} \qquad (129).$$

(Aufgaben: Hofmann 3. Siebzehnter Abschn. 50—70. — Bardey XXXV, A.)

## 2. Das Combiniren.

**181.** *Erklärungen.* — Eine Reihe von $n$ Elementen zur $p^{\text{ten}}$ Classe combiniren (die Combinationen zur $p^{\text{ten}}$ Classe aus $n$ Elementen bilden) heisst: aus diesen $n$ Elementen auf alle möglichen Arten Formen bilden, welche $p$ Elemente enthalten. Diese Formen heissen Combinationen zur $p^{\text{ten}}$ Classe, und zwar Combinationen ohne Wiederholung, wenn jedes Element in jeder Form nur einmal, mit Wiederholung, wenn es beliebig oft vorkommen darf.

Anm. Man kann auch Combinationen mit beschränkter Wiederholung bilden, wobei die Anzahl der gleichen Elemente einer Form unter einer gegebenen Grenze bleiben muss; oder Combinationen zu einer bestimmten Summe, wobei die Summe der Zahlenwerthe der Elemente in jeder Form einer gegebenen Zahl gleich sein muss. — In jeder Form pflegt man die Elemente in dem beim Permutiren festgesetzten Sinne zu ordnen.

**182.** *Bildung der Combinationen.* — a) Ohne Wiederholung. Erste Methode. — Die Combinationen zur ersten Classe sind die Elemente selbst. Aus ihnen erhält man die Combinationen zur zweiten Classe, indem man jeder Form jedes Element hinzufügt, welches höher ist als ihr Endelement. So erhält man für 4 Elemente der Reihe nach die Formen:

1, 2, 3, 4.
12, 13, 14, 23, 24, 34.

Dasselbe Verfahren liefert die Combinationen zur dritten, wie zu höheren Classen.

Zweite Methode. Um aus der geordneten Elementen-Reihe alle Combinationen zur $p^{\text{ten}}$ Classe direct zu bilden, schreibt man ihre ersten $p$ Elemente auf, und erhöht dann das letzte Element, welches eine Erhöhung zulässt, so oft, als es die Zahl der gegebenen Elemente gestattet, um eine Einheit, während jedes dem erhöhten Element etwa folgende Element um eine Einheit höher angenommen wird als das vorhergehende. Durch Fortsetzung dieses Verfahrens ergeben sich allmälig alle Combinationen. So erhält man z. B. die Combinationen zur 3. Classe aus 5 Elementen, wie folgt:

123, 124, 125, 134, 135, 145, 234, 235, 245, 345.

b) Mit Wiederholung. — Die Methoden sind dieselben wie im vorigen Falle; nur wird bei der ersten Methode jedem Endelemente nicht nur jedes höhere, sondern auch das ihm gleiche Element hinzugefügt. Bei der zweiten Methode besteht die erste Form aus $p$ Einheiten (1), und jedes dem erhöhten Element etwa folgende Element wird diesem gleich gesetzt.

Dadurch treten in dem für die erste Methode gegebenen Beispiel noch die Formen 11, 22, 33, 44 hinzu. Nach der zweiten Methode erhält man die Combinationen zur 3. Classe aus 3 Elementen, wie folgt:

111, 112, 113, 122, 123, 133, 222, 223, 233, 333.

**183.** *Bestimmung der Anzahl der Combinationen.* — a) Ohne Wiederholung. — Aus der ersten der zur Bildung der Combinationen angewandten Methoden geht hervor, dass die Anzahl der Combinationen aus $n$ Elementen zur 1. Classe $n$ ist. Um die Combinationen zur 2. Classe zu finden, kann man jedes der $n$ Elemente mit jedem der $n-1$ übrigen verbinden. Dies giebt $n(n-1)$ Formen. Durch dieses Verfahren aber erhält man jede Form auf alle Arten permutirt, d. h. doppelt; mithin ist die Anzahl der verschiedenen Formen nur $\frac{n(n-1)}{1.2} = n^{\cdot 2}$. Durch die gleiche Betrachtung erhält man als Anzahl der Combinationen zur 3. Classe $\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} = n^{\cdot 3}$, und allgemein,

wenn ${}^{p}C_{n}$ die Anzahl der Combinationen aus $n$ Elementen zur $p^{\text{ten}}$ Classe ohne Wiederholung bezeichnet:

188. $${}^{p}C_{n} = n^{\cdot p}.$$

b) Mit Wiederholung. Denkt man sich in jeder dieser Combinationen das $2^{\text{te}}$ Element um 1, das $3^{\text{te}}$ um 2, u. s. f.; das $p^{\text{te}}$ endlich um $p-1$ erhöht, so liefert jede Form eine Combination zur $p^{\text{ten}}$ Classe aus $n+p-1$ Elementen ohne Wiederholung. (Denn dadurch, dass auch das höchste Element $n$, wie alle vorhergehenden, an manchen Stellen um $p-1$ erhöht wird, wächst die Anzahl der Elemente um $p-1$. Und da die gleichen Elemente einer Form um verschiedene Grössen erhöht werden, so kommen in keiner der neuen Formen noch gleiche Elemente vor.)

Denkt man sich umgekehrt in jeder der Combinationen zur $p^{\text{ten}}$ Classe aus $n+p-1$ Elementen ohne Wiederholung das $2^{\text{te}}$ Element um 1, das $3^{\text{te}}$ um 2, u. s. f.; das $p^{\text{te}}$ endlich um $p-1$ erniedrigt, so liefert jede Form eine Combination zur $p^{\text{ten}}$ Classe aus $n$ Elementen mit Wiederholung.

Also entsprechen sich je zwei dieser verschieden gebildeten Formen; d. h.: die Anzahl der einen ist so gross wie die der andern. Bezeichnet man also die Anzahl der Combinationen aus $n$ Elementen zur $p^{\text{ten}}$ Classe mit Wiederholung durch ${}^{p}C^{n}$, so ist nach 188

189. $${}^{p}C^{n} = (n+p-1)^{\cdot p}.$$

(Aufgaben: Hofmann 3. Siebzehnter Abschn. 78—100. — Bardey XXXV. B.)

### 3. Das Variiren.

**184.** *Erklärungen.* — Eine Reihe von $n$ Elementen zur $p^{\text{ten}}$ Classe variiren (die Variationen zur $p^{\text{ten}}$ Classe aus $n$ Elementen bilden) heisst: die permutirten Combinationen zur $p^{\text{ten}}$ Classe aus diesen $n$ Elementen bilden. Diese Formen heissen Variationen zur $p^{\text{ten}}$ Classe, und zwar Variationen ohne oder mit Wiederholung, je nachdem die Combinationen ohne oder mit Wiederholung gebildet sind.

**185.** *Bildung der Variationen.* — a) Ohne Wiederholung. — Die Variationen zur ersten Classe sind die Elemente selbst. Aus ihnen erhält man die Variationen zur zweiten Classe, indem man jeder Form jedes Element hinzufügt, welches noch

nicht in ihr enthalten ist. So erhält man für 3 Elemente der Reihe nach die Formen:

1, 2, 3.
12, 13, 21, 23, 31, 32.

Dasselbe Verfahren liefert die Variationen zur dritten, wie zu höheren Classen.

b) Mit Wiederholung. — Die Methode ist dieselbe wie vorher; doch wird jeder Form jedes Element ohne Ausnahme hinzugefügt. Dadurch treten in dem obigen Beispiel noch die Formen 11, 22, 33 hinzu.

Anm. Diese Methode führt directer zum Ziel, als wenn man erst die Combinationen bildet, und dann jede Combination permutirt.

**186.** *Bestimmung der Anzahl der Variationen.* — a) Ohne Wiederholung. — Aus der oben gegebenen Bildungsmethode geht durch dieselbe Betrachtung, welche bei den Combinationen angestellt wurde, hervor, dass die Anzahl der Variationen ohne Wiederholung aus $n$ Elementen zur $1^{\text{ten}}$ Classe $n$, zur $2^{\text{ten}}$ $n(n-1)$ ist; allgemein zur $p^{\text{ten}}$ Classe (wenn diese Anzahl mit ${}^pV_n$ bezeichnet wird):

$${}^pV_n = n(n-1)\dots(n-p+1) = n^{\cdot p} . p! \qquad 190.$$

b) Mit Wiederholung. — Man findet ebenso wie vorher, dass die Anzahl der Variationen mit Wiederholung aus $n$ Elementen zur $1^{\text{ten}}$ Classe $n$, zur $2^{\text{ten}}$ $n^2$ ist; allgemein zur $p^{\text{ten}}$ Classe (wenn diese Anzahl mit ${}^pV^n$ bezeichnet wird):

$${}^pV^n = n^p. \qquad 191.$$

(Aufgaben: Hofmann 3. Siebzehnter Abschn. 71—100. — Bardey XXXV. C.)

# Angewandte Combinatorik.

## I. Die Binomialreihe.

**187.** *Vorbemerkung.* — Mit Hilfe der Combinatorik ist eine Aufgabe der Arithmetik lösbar, die früher nicht erledigt werden konnte. Es ist dies die in dem Ausdruck $(a+b)^c$ ausgesprochene zweite Grundaufgabe der Potenzirung. (Vgl. S. 28.) Wir werden diese Aufgabe hier nur für den Fall lösen, dass $c$ eine ganze positive Zahl ist. Es lässt sich auch zeigen, dass die gefundene Formel allgemein gilt; doch gehören die dazu erforderlichen Betrachtungen nicht mehr in das Gebiet der Elemente.

**188.** *Aufstellung der Binomialreihe.* — Es sei das aus $n$ Factoren bestehende Product

$$(x+a_1)(x+a_2)(x+a_3)\ldots(x+a_n)$$

gegeben. Die Lösung der Klammern liefert offenbar ein nach fallenden Potenzen von $x$ geordnetes Polynom, dessen erstes Glied $x^n$, dessen letztes $a_1a_2\ldots a_n$ ist. Seien die Coefficienten der Potenzen von $x$ einstweilen mit $c_1, c_2, \ldots c_n$ bezeichnet, so ist

$$1)\quad \begin{cases} (x+a_1)(x+a_2)(x+a_3)\ldots(x+a_n) \\ = x^n + c_1x^{n-1} + c_2x^{n-2} + \ldots + c_{n-1}x + c_n. \end{cases}$$

Um nun die Factoren $c$ zu bestimmen, ist Folgendes zu beachten. Das Glied des Polynoms, welches $x^{n-1}$ enthält, entsteht, wenn man aus allen Klammern, eine ausgenommen, den Summand $x$ zur Multiplication bringt. So erhält man $a_1x^{n-1} + a_2x^{n-1} + \ldots + a_nx^{n-1}$ oder $(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)x^{n-1}$. Ebenso findet man die Factoren der übrigen Potenzen von $x$, nämlich:

$$\begin{aligned} c_1 &= a_1 + a_2 + \ldots + a_n \\ c_2 &= a_1a_2 + a_1a_3 + a_2a_3 + \ldots. \\ c_3 &= a_1a_2a_3 + a_1a_2a_4 + \ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_n &= a_1a_2\ldots a_n. \end{aligned}$$

Demnach ist $c_1$ die Summe aller Combinationen ohne Wiederholung zur $1^{\text{ten}}$ Classe aus den Elementen $a_1, a_2, \ldots a_n$ (wobei die Elemente jeder Form durch Multiplication verbunden sind). Und allgemein ist $c_p$ die Summe aller Combinationen ohne Wiederholung zur $p^{\text{ten}}$ Classe aus den Elementen $a_1, a_2, \ldots a_n$.

Setzt man nun

2) $$a_1 = a_2 = a_3 = \ldots = a_n = a,$$

so ist

$$c_1 = a(1 + 1 + \ldots)$$
$$c_2 = a^2(1 + 1 + \ldots)$$
$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$
$$c_n = a^n$$

Und zwar enthält die $p^{\text{te}}$ Klammer so viel Einheiten, als die Anzahl der Combinationen aus $n$ Elementen zur $p^{\text{ten}}$ Classe beträgt; d. h.: der Werth der $p^{\text{ten}}$ Klammer ist $n^{\cdot p}$ (nach 188). Folglich ist

3) $$c_1 = n^{\cdot 1} \,.\, a;\ c_2 = n^{\cdot 2} \,.\, a^2;\ \ldots\ c_n = n^{\cdot n} a^n = a^n.$$

Setzt man nun die Werthe 2) und 3) in 1) ein, so folgt:

4) $$(x+a)^n = x^n + n^{\cdot 1} a x^{n-1} + n^{\cdot 2} a^2 x^{n-2} + \ldots + n^{\cdot n-1} a^{n-1} x + n^{\cdot n} a^n.$$ 192.

Diese Formel wird für jeden ganzen und positiven Werth von $n$ gelten, wenn sie unter der Voraussetzung, dass sie für den Exponenten $n$ richtig ist, auch noch für $n+1$ gilt. (Denn nach 44 gilt sie für die Werthe $n=2$ und $n=3$.)

Nun ist

$$(x+a)^{n+1} = (x+a)(x+a)^n$$
$$= x^{n+1} + n^{\cdot 1} a x^n + n^{\cdot 2} a^2 x^{n-1} + \ldots + n^{\cdot n} a^n x$$
$$+ \quad a x^n + n^{\cdot 1} a^2 x^{n-1} + \ldots + n^{\cdot n-1} a^n x + n^{\cdot n} a^{n+1}$$
$$= x^{n+1} + (n+1)^{\cdot 1} a x^n + (n+1)^{\cdot 2} a^2 x^{n-1} + \ldots + (n+1)^{\cdot n} a^n x + (n+1)^{\cdot (n+1)} a^{n+1}.$$

(Denn nach 136 ist $n^{\cdot p} + n^{\cdot (p-1)} = (n+1)^{\cdot p}$). Die Formel gilt also auch für den Exponenten $n+1$, mithin, da sie für $n=2$ und $n=3$ gilt, für jeden ganzen und positiven Werth von $n$.

Anm. Ist $a$ negativ, so haben die Glieder auf der rechten Seite abwechselnd positive und negative Vorzeichen.

Setzt man in 4) $a=1$, und ordnet die Glieder auf beiden S ten von rechts nach links, so erhält man

5) $$(x+1)^n = 1 + n^{\cdot 1} x + n^{\cdot 2} x^2 + n^{\cdot 3} x^3 + \ldots$$ 193.

**189.** *Erklärung.* — Die Reihe

$$1 + n^{\cdot 1} x + n^{\cdot 2} x^2 + n^{\cdot 3} x^3 + \ldots$$

h sst Binomialreihe, $x$ ihre Grundzahl, $n$ ihr Exponent, d Factoren $n^{\cdot 1}$, $n^{\cdot 2}$, ... die Binomialcoefficienten.

Anm. Für negative und umgekehrte Exponenten gilt die Binomialformel 5) nur, wenn ihre Grundzahl $< 1$ ist. Die Binomialreihe ist in beiden Fällen eine unendliche, weil kein Binomialcoefficient den Factor Null enthalten kann, die Reihe sich also beliebig fortsetzen lässt. Setzt man in 4) $a = y + z$, so lässt sich eine Formel für $(x + y + z)^n$ aufstellen (Polynomial-Formel).

Wenn in 5) $x$ und $n$ negativ angenommen werden, so erhält man:

$$(1 - x)^{-n} = 1 - (-n)^{\cdot 1} x + (-n^{\cdot 2}) x^2 - (-n^{\cdot 3}) x^3 + \ldots$$

oder, da nach 188 $(-n)^{\cdot p} = (-1)^p (n + p - 1)^{\cdot p}$ ist:

193a. $$\frac{1}{(1 - x)^n} = 1 + n^{\cdot 1} x + (n + 1)^{\cdot 2} x^2 + (n + 2)^{\cdot 3} x^3 + \ldots$$

Welche Zahlenreihen bilden die Coefficienten für $n = 1, 2, 3, \ldots$? Bestimmung derselben Zahlreihen durch das Divisionsverfahren. — Welche Zahlenreihen liefert für die obigen Werthe von $n$ der Ausdruck $\frac{1 + x}{(1 - x)^n}$, wenn man ihn mittelst der unmittelbar klaren Formel

$$\frac{1 + x}{(1 - x)^n} = 2\left[\frac{1}{(1 - x)^n}\right] - \frac{1}{(1 - x)^{n-1}}$$

berechnet?

Wenn man in der Formel $(1 + x)^p \cdot (1 + x)^q = (1 + x)^{p+q}$ die drei Potenzen nach 193 in Reihen entwickelt, und nach Ausführung der Multiplication links die Coefficienten der gleichhohen Potenzen von $x$ links und rechts gleich setzt, so erhält man Formel 137.

(Aufgaben: Hofmann 3. Siebzehnter Abschn. 10—49.)

## II. Die Wahrscheinlichkeitsrechnung.

### Einleitung.

**190.** *Wahrscheinlichkeit durch Beobachtung.* — Jedes Ereigniss hängt von einer oder mehreren Ursachen ab. Mehrere Ereignisse können durch Ursachen von gleicher oder verschiedener Stärke bestimmt werden. Hängen mehrere Ereignisse so zusammen, dass in einem gegebenen Falle das eine oder das andere erfolgen muss, dass es aber dem Zufalle überlassen bleibt, welches derselben erfolgt, so kann man aus dem Eintreten desselben noch keinen Schluss auf die Stärke der bestimmenden Ursache ziehen. Mehrt sich aber die Zahl der gegebenen Fälle, so werden diejenigen Ereignisse, welche von stärker wirkenden Ursachen abhängen, häufiger, jene dagegen, deren Ursachen schwächer wirken, seltener eintreten. Die Wirkung des Zufalls tritt also zurück, und nähert sich der Grenze Null in demselben Masse, wie die Anzahl der gegebenen Fälle wächst. Dagegen tritt die Wirkung der die Ereignisse bestimmenden Ursachen hervor, und zeigt sich in den Zahlen, welche

angeben, wie oft jenes Ereigniss eintrat. Wenn also in einer grossen Anzahl gegebener Fälle ($n$) $p$ Arten von Ereignissen eintreten, und zwar die erste Art $a_1$ mal, die zweite $a_2$ mal, ... die $p^{\text{te}}$ $a_p$ mal, (sodass

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_p = n$$

ist), dann kann man rückwärts schliessen, dass die Ursachen dieser Ereignisse in ihrer Stärke sich annähernd verhalten wie die Zahlen $a_1, a_2, \ldots a_p$. (Wenn $n$ immer grösser wird, so werden die Verhältnisse dieser Zahlen immer kleinere Aenderungen erleiden und sich festen Werthen nähern.) Man kann aber auch vorwärts schliessen, dass, wenn die $n$ gegebenen Fälle auf's Neue eintreten, dann das erste Ereigniss wieder $a_1$ mal, das zweite $a_2$ mal, etc. eintreten wird. Man nennt dann den Quotienten $\frac{a_r}{n}$ die Wahrscheinlichkeit des $r^{\text{ten}}$ Ereignisses (die Wahrscheinlichkeit, dass in einem gegebenen Falle das Ereigniss eintritt). Diese Wahrscheinlichkeit, welche durch Beobachtung und Zählung wirklicher Ereignisse (a posteriori) gefunden wird, hat nach dem oben Gesagten nur die Genauigkeit eines Näherungswerthes. Die Wissenschaft, welche solche Beobachtungen und Zählungen anstellt, und aus ihnen Schlüsse auf die ein Ereigniss bestimmenden Ursachen und auf die Wiederkehr des Ereignisses zu ziehen sucht, ist die Statistik.

Anm. So kann man z. B. aus einem einzigen in irgend einem Lande vorgekommenen Verbrechen keinen Schluss ziehen auf die Verbreitung desjenigen sittlichen Mangels, aus welchem das Verbrechen hervorging. Wenn aber unter $n$ innerhalb eines Jahres in diesem Lande vorgekommenen Verbrechen verschiedener Art die eine $a_1$ mal, die andre $a_2$ mal u. s. w. vorkam, so wird man schliessen, dass die zu Grunde liegenden Ursachen sich ebenso verhalten wie diese Zahlen. Und wenn in einer Reihe aufeinanderfolgender Jahre diese Zahlen sich im Verhältniss zur Bevölkerungszahl nicht wesentlich ändern, so wird man sagen können, dass die Bevölkerung im Ganzen in demselben Verhältniss zu diesen Verbrechen hinneige, wie es jene Zahlen $a$ angeben. Dasselbe gilt von Krankheiten, von der Wahl des Berufes, von Abstimmungen, u. s. w., und zwar nicht nur im Umfange eines ganzen Landes, sondern auch in kleineren Bezirken. Andre Beispiele bieten: die an einem bestimmten rte während eines Jahres beobachteten Windrichtungen, Gewitter, Regenlle, Temperaturen. Ferner: Höhe der Ein- und Ausfuhr von Producten, nnahmen und Ausgaben, Steuer-Erträge während eines Jahres. — Alle gewonnenen Resultate lassen sich zu muthmasslichen Vorherbestimmungen benutzen.

**191.** *Wahrscheinlichkeit durch Berechnung.* — Waren bis tzt die Ereignisse gegeben, ihre Ursachen aber unbekannt, können umgekehrt die Ursachen gegeben sein, und es lässt

sich dann aus der Stärke der Ursachen auf die Häufigkeit der durch dieselben hervorgerufenen Ereignisse schliessen. In diesem Falle sind also $a_1, a_2, \ldots a_p$ keine Näherungswerthe, sondern bestimmte Zahlen, und ebenso hat $\frac{a_r}{n}$, die Wahrscheinlichkeit des $r^{\text{ten}}$ Ereignisses, einen genauen Werth. Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses wird hier durch Vorausberechnung, ohne dass dasselbe schon stattgefunden hat, ermittelt (a priori). Soll diese Berechnung aber möglich sein, so muss für jedes Ereigniss eine Anzahl von Fällen gegeben sein, welche dieses Ereigniss hervorrufen, und die Zahlen $a_1, a_2 \ldots a_p$, welche diese Anzahl für jedes Ereigniss angeben, müssen zusammen alle möglichen Fälle umfassen. Die Wissenschaft, welche lehrt, alle in Bezug auf ein Ereigniss möglichen Fälle aufzustellen und die dem Ereigniss günstigen Fälle zu bestimmen, ist die Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Anm. So ist, wenn aus einem Spiel Karten ein Bild gezogen werden soll, die Zahl der möglichen Fälle gleich der Anzahl der Karten, die Zahl der günstigen Fälle gleich der Anzahl der Bilder. Andre Beispiele bieten: Das Werfen mit Würfeln, das Ziehen eines Looses, das Wetten (wobei die Einsätze der Parteien sich verhalten müssen wie die durch Rechnung oder durch Schätzung bestimmten Wahrscheinlichkeiten des Gewinnes).

Die Richtigkeit der durch Rechnung gefundenen Wahrscheinlichkeit kann durch Versuche (d. h. dadurch, dass man die Ereignisse wirklich hervorruft) geprüft werden. Hat man also als Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses den Quotienten $\frac{a_r}{n}$ gefunden, so muss unter $p \,.\, n$ Versuchen das Ereigniss $p \,.\, a_r$-mal eintreten, und zwar muss dies Resultat um so genauer zutreffen, je grösser $p$ ist. Widerspricht das Resultat der Versuche dem durch Berechnung gefundenen, so folgt, dass die Zahl $a_r$ nicht die Stärke der das Ereigniss hervorrufenden Ursache ausdrückt, dass also Ursachen wirksam sind, die man vorher nicht in Rechnung gezogen hatte. So kann also die Vergleichung der durch Berechnung und der durch Beobachtung gewonnenen Resultate zur Ermittelung unbekannter Ursachen dienen.

Anm. So ist z. B. beim Werfen mit einem Würfel die Wahrscheinlichkeit für alle Würfe von 1 bis 6 dieselbe. Es wird daher ein bestimmter Wurf, z. B. 6, unter 6 Würfen durchschnittlich einmal, unter 6 $p$ Würfen nahezu $p$ mal vorkommen. Findet dieser Wurf aber viel öfter statt, so wird man schliessen, dass der Würfel gefälscht ist, d. h. dass eine bei der Rechnung nicht in Betracht gezogene Ursache die Wahrscheinlichkeit für den Wurf 6 erhöht hat.

Umgekehrt kann die Vermuthung, dass einem Ereigniss besondere Ursachen, die sich der Wahrnehmung entziehen, zu Grunde liegen, durch nachträgliche Berechnung der Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses geprüft werden. Fällt diese Wahrscheinlichkeit sehr gering aus, so wird die Vermuthung für begründet erachtet werden.

Anm. So wird man z. B., wenn man auf einem Tische 6 Würfel findet, die alle auf der oberen Seite eine Eins zeigen, auch ohne Berechnung schon vermuthen, dass diese Zusammenstellung nicht das Resultat eines Wurfes, sondern einer absichtlichen Anordnung sei. — Noch mehr wird eine solche Vermuthung bestärkt, wenn die Möglichkeit wiederholter Versuche ausgeschlossen ist. Beispiele der Art bieten u. A.: die grosse Anzahl der Doppelsterne, welche auf die begründete Vermuthung geführt hat, dass viele dieser Sternpaare nicht zufällig für unser Auge beisammenstehen, sondern wirklich zusammengehören; ferner die geringe Neigung der Planetenbahnen gegen die Ekliptik, u. s. w.

Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses kann sowohl für den Fall eines, wie für den Fall mehrerer Versuche bestimmt werden. Man unterscheidet hiernach Wahrscheinlichkeit für einen und für mehrere Fälle.

Es kann sich ferner handeln um die Wahrscheinlichkeit eines oder mehrerer Ereignisse. Hiernach unterscheidet man einfache und combinirte Wahrscheinlichkeit.

Im letzteren Falle kann entweder der einzelne Eintritt irgend eines der Ereignisse, oder das Zusammentreffen aller als günstiger Fall betrachtet werden. Hiernach unterscheidet man getrennte und zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit mehrerer Ereignisse.

## A. Wahrscheinlichkeit für einen Fall.

### a. Einfache Wahrscheinlichkeit.

**192.** *Erklärung.* — Unter der mathematischen Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses versteht man den Quotienten aus der Anzahl der das Ereigniss hervorrufenden Fälle, und der Anzahl aller in Bezug auf das Ereigniss möglichen Fälle.

**193.** *Folgerungen.* — Die Wahrscheinlichkeit ist im Allgemeinen ein echter Bruch. Ihre Grenzwerthe sind 1 und 0. Die Wahrscheinlichkeit 1 bedeutet die Gewissheit des Eintretens, die Wahrscheinlichkeit 0 die Gewissheit des Nicht-Eintretens des Ereignisses. — Ist die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses $a$, so ist $1 - a$ die dem Ereigniss entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit.

Alle die Ermittelung der einfachen Wahrscheinlichkeit betreffenden Aufgaben lassen sich auf eine allgemeine Form bringen. Ist das Ereigniss ein einfaches, so kann man sein Eintreten durch die Wahl eines Elementes aus einer grösseren Anzahl (durch das Ziehen eines Looses) darstellen. Ist das Ereigniss ein zusammengesetztes, so kann man die Aufgabe in die Form einkleiden: mit einer Anzahl Würfel von bestimmter Felderzahl eine gegebene Summe zu werfen.

**194.** *a.* Einfache Ereignisse.

1) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, aus $n$ gegebenen Elementen ein vorher bestimmtes zu wählen?

Die Anzahl der möglichen Fälle ist $n$, die der günstigen 1; also

194. $$w = \frac{1}{n}.$$

2) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, aus $n$ gegebenen Elementen $k$ vorher bestimmte zu wählen?

Die $k$ vorherbestimmten Elemente bilden eine Combination zur $k^{\underline{ten}}$ Classe aus $n$ Elementen. Die Anzahl aller dieser Combinationen ist die Zahl der möglichen Fälle. Sie ist (nach 188) $n^{\cdot k}$. Die Zahl der günstigen Fälle ist 1; also ist

195. $$w = \frac{1}{n^{\cdot k}}.$$

Anm. Sollen die $k$ vorher bestimmten Elemente noch in bestimmter Reihenfolge erscheinen, so bilden sie eine Variation zur $k^{\underline{ten}}$ Classe aus $n$ Elementen. Mithin ist, da die Anzahl aller dieser Variationen (nach 190) $n^{\cdot k} . k!$ beträgt,

196. $$w = \frac{1}{n^{\cdot k} . k!}.$$

3) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass, wenn von $n$ Elementen $k$ gewählt werden, $h$ vorher bestimmte dabei sind?

Würden nur $h$ Elemente gewählt, so wäre die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{n^{\cdot h}}$. Es sind aber ausser diesen vorherbestimmten $h$ Elementen noch $(k-h)$ andre beliebig zu wählen, und zwar aus den $(n-h)$ noch übrigen Elementen. Diese Wahl kann in sovielfacher Weise stattfinden, als Combinationen zur $(k-h)^{\underline{ten}}$ Classe aus $(n-h)$ Elementen existiren. Jede dieser $(n-h)^{\cdot(k-h)}$ Combinationen giebt, mit den $h$ vorher bestimmten Elementen verbunden, einen günstigen Fall. Die Anzahl der günstigen

Fälle ist also $(n-h)^{\cdot(k-h)}$. Die Anzahl der möglichen Fälle ist, wie in 2) $n^{\cdot k}$; mithin

$$w = \frac{(n-h)^{\cdot(k-h)}}{n^{\cdot k}}. \qquad 197.$$

4) Unter $n$ Elementen sind $p$ von einer bestimmten Sorte. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass, wenn $k$ Elemente gewählt werden, $h$ von jener Sorte dabei sind?

Ausser den $h$ vorher bestimmten Elementen sind, wie im vorigen Falle, $(k-h)$ beliebige Elemente zu wählen. Die Wahl derselben findet aber diesmal nicht aus $(n-h)$, sondern aus $(n-p)$ Elementen statt (weil unter den $k-h$ beliebigen Elementen keins der $p$ Elemente von der bestimmten Sorte sich befinden darf). Demnach würde $w = \frac{(n-p)^{\cdot(k-h)}}{n^{\cdot k}}$ sein. — Nun sind aber nicht, wie im vorigen Falle, $h$ bestimmte Elemente zu wählen, sondern diese können wieder beliebig aus den $p$ Elementen der bestimmten Sorte gewählt werden. Die Zahl der günstigen Fälle in der eben aufgestellten Formel ist also mit der Anzahl der Combinationen aus $p$ Elementen zur $h^{\text{ten}}$ Classe zu multipliciren (weil in dieser Formel nur eine dieser Combinationen vorausgesetzt ist). Demnach ist

$$w = \frac{(n-p)^{\cdot(k-h)} \cdot p^{\cdot h}}{n^{\cdot k}}. \qquad 198.$$

Anm. Ist $k > p$, so stellen die Fälle $h = 0, 1, 2, \ldots p$ zusammen alle möglichen Fälle dar; d. h.: die Summe aller Zähler der durch diese Annahmen aus $w$ entstandenen Brüche ist gleich dem gemeinsamen Nenner, oder (mit Benutzung von 131 und 132):

$$(n-p)^{\cdot k} + p^{\cdot 1}.(n-p)^{\cdot(k-1)} + p^{\cdot 2}.(n-p)^{\cdot(k-2)} + \ldots + (n-p)^{\cdot(k-p)} = n^{\cdot k}.$$

Diese Formel ist mit 137 identisch, in deren Gestalt sie durch die Substitutionen $k = n$; $n = a + b$; $p = b$ übergeht.

5) Unter $n$ Elementen sind $p_1$ von der ersten, $p_2$ von der zweiten, ... $p_r$ von der $r^{\text{ten}}$ Sorte. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass, wenn $k$ Elemente gewählt werden, $h_1$ von der ersten, $h_2$ von der zweiten, ... $h_r$ von der $r^{\text{ten}}$ Sorte dabei sind?

Da alle Elemente, die in keiner der verlangten Sorten vorhanden sind, zusammen als eine neue Sorte betrachtet werden können, so kann man, ohne der Allgemeinheit der Aufgabe zu schaden, annehmen, dass

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_r = n; \quad h_1 + h_2 + \ldots + h_r = k$$

sei, d. h. dass die $r$ Sorten alle $n$ Elemente erschöpfen. — Für 2 Sorten würde Formel 198 in der neuen Bezeichnung lauten:

$$w = \frac{p_1^{\cdot h_1} \cdot p_2^{\cdot h_2}}{n^{\cdot k}}.$$

Die Wiederholung der im vorigen Fall angestellten Betrachtung zeigt, dass nun allgemein die Formel gilt:

199. $$w = \frac{p_1^{\cdot h_1} \cdot p_2^{\cdot h_2} \cdots p_r^{\cdot h_r}}{n^{\cdot k}}.$$

Anm. Aus 199 folgt 198, wenn $r = 2$, aus 198 folgt 197, wenn $p = h$, aus 197 folgt 195, wenn $h = k$, aus 195 endlich folgt 194, wenn $h = 1$ gesetzt wird. Jede der Formeln 195, 197, 198, 199 ist also ein specieller Fall der folgenden.

### 195. $\beta$) Zusammengesetzte Ereignisse.

Im Folgenden wird, wenn nichts andres bestimmt ist, die Anzahl der Felder eines Würfels zu 6 angenommen.

1) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, mit *einem* Würfel die Summe $s$ zu werfen?

Die Anzahl der möglichen Fälle ist 6, die der günstigen (unter der Voraussetzung, dass $s$ eine der Zahlen 1 bis 6 ist) ist 1; also

200. $$w = \frac{1}{6}.$$

Die Wahrscheinlichkeit ist also, ebenso wie die Anzahl der günstigen Fälle, für jeden Werth von $s$, von 1 bis 6, gleich.

Stellt man den Ausdruck auf:

$$x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6,$$

so giebt der Factor jeder Potenz von $x$ (nämlich 1) die Anzahl der für den zugehörigen Exponenten günstigen Fälle an (wenn man sich nämlich unter dem Exponenten die zu werfende Summe denkt).

2) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, mit *zwei* Würfeln die Summe $s$ zu werfen?

Die Anzahl der möglichen Fälle ist $6^2$, da jedes Feld des ersten mit jedem des zweiten Würfels zusammentreffen kann. Die Anzahl der günstigen Fälle ist jedoch für verschiedene Werthe von $s$ (von 2 bis 12) verschieden. Denn es kann jede der folgenden Summen durch die darunter stehenden Combinationen hervorgebracht werden:

| 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 26 | 36 | 46 | 56 | 66 |
| | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 35 | 45 | 55 | 65 | |
| | | 31 | 32 | 33 | 34 | 44 | 54 | 64 | | |
| | | | 41 | 42 | 43 | 53 | 63 | | | |
| | | | | 51 | 52 | 62 | | | | |
| | | | | | 61 | | | | | |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 |

Die Zahl der günstigen Fälle beträgt also 1 für $s=2$, 2 für $s=3$, u. s. w. Denkt man sich nun zu jedem Elemente in den eben aufgestellten Combinationen als Exponent die Grundzahl $x$ hinzugefügt (sodass z. B. 32 in $x^3x^2$ übergeht), denkt man sich ferner alle diese neuen Elemente in jeder Combination als Factoren, die Combinationen selbst aber als Summanden, so ist der hierdurch entstehende Ausdruck derselbe, welcher aus der Multiplication des Ausdrucks $x^1+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6$ mit sich selbst hervorgeht. Und wiederum giebt, wie im vorigen Falle, der Factor jeder Potenz von $x$ die Anzahl der für den zugehörigen Exponenten günstigen Fälle an. Man hat also diese Zahl dem Ausdrucke

$$(x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)^2$$

zu entnehmen.

3) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, mit $n$ Würfeln die Summe $s$ zu werfen?

Die Anzahl der möglichen Fälle ist $6^n$. Die Anzahl der günstigen Fälle ist, ähnlich wie vorher, die Anzahl der Combinationen mit Wiederholung zur Summe $s$ aus den Elementen 1 bis 6. Alle diese Combinationen entstehen, wenn man $(x+x^2+\ldots+x^6)^n$ entwickelt, und diejenigen Glieder herausnimmt, deren Exponentensumme $s$ ist. Mithin ist (ähnlich wie vorher) die Anzahl der günstigen Fälle gleich dem Factor von $x^s$ in der Entwickelung des Ausdrucks

$$(x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)^n.$$

Nun ist

$$x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6 = x(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5)$$

$$= \frac{x(1-x^6)}{1-x}; \qquad (147.)$$

$$= x(1-x^6)(1-x)^{-1};$$

also

$$(x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^n = x^n(1 - x^6)^n (1 - x)^{-n}$$

$$= x^n [1 - n^{\cdot 1} x^6 + n^{\cdot 2} x^{12} - n^{\cdot 3} x^{18} + \ldots]$$

$$. [1 + n^{\cdot 1} x + (n + 1)^{\cdot 2} x^2 + (n + 2)^{\cdot 3} x^3 + \ldots]$$

$$= [1 - n^{\cdot 1} x^6 + n^{\cdot 2} x^{12} - n^{\cdot 3} x^{18} + \ldots]$$

$$. [x^n + n^{\cdot 1} x^{n+1} + (n + 1)^{\cdot 2} x^{n+2} + (n + 2)^{\cdot 3} x^{n+3} + \ldots]$$

(nach 193 und 193a). Aus dem durch Lösung der Klammern rechts entstehenden Polynome sind nun alle diejenigen Glieder herauszunehmen, welche den Factor $x^s$ enthalten. Es entsteht aber $x^s$ durch Multiplication der folgenden Glieder beider Polynome (abgesehen von den Coefficienten):

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $1$ | $x^6$ | $x^{12}$ | $\ldots$ | $x^{6r}$ | $\ldots$ |
| $x^s$ | $x^{s-6}$ | $x^{s-12}$ | | $x^{s-6r}$ | |

Im ersten Polynom sind die Coefficienten der hier stehenden Glieder der Reihe nach

$$1, \quad n^{\cdot 1}, \quad n^{\cdot 2}, \quad \ldots \quad n^{\cdot r} \ldots$$

Im zweiten Polynom ist der Coefficient von $x^{n+k}$ die Zahl $(n + k - 1)^{\cdot k}$; mithin ist der Coefficient von $x^{n+(s-n)}$ oder von $x^s$ die Zahl $(s - 1)^{\cdot (s-n)}$, welche man erhält, wenn man $k = s - n$ setzt. Setzt man im letzteren Ausdruck für $s$ der Reihe nach $s - 6$, $s - 12, \ldots$, so erhält man die zu den oben aufgestellten Gliedern gehörige Coefficientenreihe:

$$(s-1)^{\cdot (s-n)}, (s-7)^{\cdot (s-n-6)}, (s-13)^{\cdot (s-n-12)} \ldots (s-1-6r)^{\cdot (s-n-6r)} \ldots$$

Die Anzahl der günstigen Fälle ist nun gleich der Summe der Producte aus je zwei entsprechenden Gliedern der beiden Coefficientenreihen, nämlich gleich

$$(s-1)^{\cdot (s-n)} + n^{\cdot 1} . (s-7)^{\cdot (s-n-6)} + n^{\cdot 2} . (s-13)^{\cdot (s-n-12)} + \ldots$$

Demnach ist schliesslich die Wahrscheinlichkeit, mit $n$ Würfeln die Summe $s$ zu werfen, durch die Formel gegeben:

201. $$w = \frac{1}{6^n} \left[ (s-1)^{\cdot (s-n)} + n^{\cdot 1} . (s-7)^{\cdot (s-n-6)} + n^{\cdot 2} . (s-13)^{\cdot (s-n-12)} + \ldots \right].$$

4) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, mit $n$ Würfeln, deren jeder $k$ Felder hat, die Summe $s$ zu werfen?

Man hat nur in der vorigen Formel die Zahl 6 überall durch $k$ zu ersetzen, und erhält:

$$w = \frac{1}{k^n}\Big[(s-1)^{\cdot(s-n)} + n^{\cdot 1}\,.\,(s-1-k)^{\cdot(s-n-k)} + n^{\cdot 2}\,.\,(s-1-2k)^{\cdot(s-n-2k)} + \ldots\Big]. \qquad 202.$$

Die Reihe ist so lange fortzusetzen als $s - n - rk$ positiv bleibt.

### b. Combinirte Wahrscheinlichkeit.

**196.** *Getrennte Wahrscheinlichkeit.* — Sind $\frac{a_1}{a}$ und $\frac{a_2}{a}$ die Wahrscheinlichkeiten für zwei Ereignisse, die durch denselben Versuch entstehen können, so ist die Wahrscheinlichkeit, dass eins dieser Ereignisse eintritt, gleich $\frac{a_1 + a_2}{a}$, weil die Anzahl der günstigen Fälle jetzt $a_1 + a_2$ ist. Setzen wir also

$$\frac{a_1}{a} = w_1; \quad \frac{a_2}{a} = w_2,$$

so ist die Wahrscheinlichkeit

$$w = w_1 + w_2.$$

Wenn ferner $w_1, w_2, \ldots w_n$ die Wahrscheinlichkeiten für $n$ Ereignisse sind, die alle durch denselben Versuch entstehen können, so ist die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten irgend eines dieser Ereignisse,

$$w = w_1 + w_2 + \ldots + w_n. \qquad 203.$$

In Worten?

Anm. Die Bedingung, dass die $n$ Ereignisse durch denselben Versuch entstehen können, ist unerlässlich. Denn wenn z. B. in einem Gefäss 1 weisse und 2 schwarze Kugeln, in einem andern 1 weisser und 2 schwarze Würfel sich befinden, so ist die Wahrscheinlichkeit, eine schwarze Kugel zu ziehen, gleich $\frac{2}{3}$, und ebenso gross die Wahrscheinlichkeit für einen schwarzen Würfel. Hieraus darf man nun nicht schliessen, dass die Wahrscheinlichkeit, eine schwarze Kugel oder einen schwarzen Würfel zu ziehen, gleich $\frac{4}{3}$ sei (was ohnehin, da $w$ nicht $>$ 1 sein kann, keinen Sinn geben würde); denn es sind, um Kugeln und Würfel zu berücksichtigen, ersuche nöthig, nämlich in jedes Gefäss ein Griff. Befinden sich da-en Kugeln und Würfel in demselben Gefäss, so ist jede der beiden hrscheinlichkeiten (für eine schwarze Kugel und einen schwarzen fel) gleich $\frac{2}{6}$; mithin die Wahrscheinlichkeit für das Ziehen einer warzen Kugel oder eines schwarzen Würfels gleich $\frac{2}{3}$. — Umfassen $n$ Ereignisse alle möglichen Fälle, so ist natürlich $w = 1$.

**197.** *Zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit.* —. Sollen zwei Ereignisse, deren einzelne Wahrscheinlichkeiten $\frac{a_1}{b_1}$ und $\frac{a_2}{b_2}$ sind, zusammen oder in bestimmter Reihenfolge nach einander eintreten, so ergiebt sich die Wahrscheinlichkeit für dieses Zusammentreffen durch folgende Betrachtung. Da jeder der in Bezug auf das erste Ereigniss möglichen Fälle mit jedem der das zweite Ereigniss betreffenden zusammentreffen kann, so ist die Anzahl der möglichen Fälle $b_1 b_2$. Ferner giebt jeder der günstigen Fälle des ersten mit jedem der günstigen Fälle des zweiten Ereignisses zusammen einen für das Zusammentreffen günstigen Fall. Die Anzahl der günstigen Fälle ist daher $a_1 a_2$. Und die Wahrscheinlichkeit für das Zusammentreffen beider Ereignisse ist: $w = \frac{a_1 a_2}{b_1 b_2}$, oder, wenn wir $w_1 = \frac{a_1}{b_1}$; $w_2 = \frac{a_2}{b_2}$ setzen:

$$w = w_1 \cdot w_2.$$

Ebenso ist die Wahrscheinlichkeit für das Zusammentreffen von $n$ Ereignissen, deren einzelne Wahrscheinlichkeiten $w_1$, $w_2$, ... $w_n$ sind:

204. $$w = w_1 \cdot w_2 \ldots w_n.$$

In Worten?

Soll ein Ereigniss, dessen Wahrscheinlichkeit $w_1 = \frac{a}{b}$ ist, $n$mal nach einander eintreffen, so ist in Formel 204 nur $w_1 = w_2 = \ldots = w_n$ zu setzen, und man erhält

205. $$w = w_1^n = \frac{a^n}{b^n}.$$

Mitunter jedoch vermindert sich mit dem jedesmaligen Eintreten des Ereignisses die Anzahl der möglichen und die der günstigen Fälle um je 1; dann ist:

206. $$w = \frac{a(a-1)(a-2)\ldots(a-n+1)}{b(b-1)(b-2)\ldots(b-n+1)}$$

oder (nach 128):

$$w = \frac{a^{\cdot n}}{b^{\cdot n}}.$$

Soll von mehreren Ereignissen, deren Wahrscheinlichkeit $w_1 = \frac{a_1}{b_1}$; $w_2 = \frac{a_2}{b_2}$ ... sind, das erste $n_1$mal, das zweite $n_2$ma etc. eintreffen, so ist die Wahrscheinlichkeit, je nachdem d

Zahl der möglichen und die der günstigen Fälle nach jedem Eintritt ungeändert bleibt, oder sich um 1 vermindert:

$$w = \frac{a_1^{n_1}}{b_1^{n_1}} \cdot \frac{a_2^{n_2}}{b_2^{n_2}} \cdots \qquad 207.$$

oder:

$$w = \frac{a_1^{\cdot n_1}}{b_1^{\cdot n_1}} \cdot \frac{a_2^{\cdot n_2}}{b_2^{\cdot n_2}} \cdots \qquad 208.$$

Anm. Hiernach ist die getrennte Wahrscheinlichkeit mehrerer Ereignisse grösser, dagegen die zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit kleiner als die Wahrscheinlichkeit jedes einzelnen der Ereignisse. — Ist die Reihenfolge der verschiedenen Ereignisse eine beliebige, so hat man in den Formeln 204, 207, 208 die rechte Seite noch mit der Permutationszahl der verlangten Ereignisse zu multipliciren. — Bei der zusammengesetzten Wahrscheinlichkeit wird die Reihe der verlangten Ereignisse als ein einziges zusammengesetztes Ereigniss, und folglich die Reihe der die Ereignisse hervorrufenden Versuche als ein einziger Versuch betrachtet.

## B. Wahrscheinlichkeit für mehrere Fälle.

**198.** *Vorbemerkung.* — Bisher wurde angenommen, dass zur Herbeiführung eines einfachen oder zusammengesetzten Ereignisses nur ein einziger Versuch gemacht würde, und für diesen einen Versuch wurde die Wahrscheinlichkeit des Gelingens berechnet. Wenn dagegen eine Reihe von Versuchen angestellt wird, so wird die Wahrscheinlichkeit des Gelingens mit jedem Versuche steigen, und man kann entweder fragen, wie gross die Wahrscheinlichkeit des Gelingens bei $n$ Versuchen ist, oder, wie viele Versuche man anstellen muss, damit von vornherein die Wahrscheinlichkeit des Gelingens gleich einer gegebenen Zahl $w$ sei.

1) Wenn die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses für den ersten Versuch $w_1$ ist, wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass dasselbe spätestens beim $n^{\text{ten}}$ Versuch eintrifft?

Wir berechnen zuerst die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit. Dieselbe beträgt für den ersten Versuch (vgl. Nr. 193) $1 - w_1$; mithin für die $n$ ersten Versuche (nach 205) $(1 - w_1)^n$. Dies ist also die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Ereigniss $n$ mal hintereinander ausbleibt. Die hierzu entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit umfasst offenbar alle dem früheren Eintreten des Ereignisses günstigen Fälle; mithin ist, wenn wir dieselbe mit $w$ bezeichnen,

$$w = 1 - (1 - w_1)^n. \qquad 209.$$

Ist $w$ gegeben, und $n$ gesucht, so folgt aus dieser Formel:

$$n = \frac{l(1-w)}{l(1-w_1)}.$$

2) Wenn die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses für den ersten Versuch $w_1$ ist, wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass dasselbe bei $n$ Versuchen $k$mal eintrifft?

Die Wahrscheinlichkeit, dass $k$ Versuche günstig ausfallen, ist $w_1^k$ (205); diejenige, dass $(n-k)$ Versuche ungünstig ausfallen, ist $(1-w_1)^{n-k}$. Die Wahrscheinlichkeit, dass $k$ günstige Versuche mit $(n-k)$ ungünstigen zusammentreffen, ist $w_1^k . (1-w_1)^{n-k}$ (204). Nun kann dieses Zusammentreffen aber in soviel verschiedenen Reihenfolgen stattfinden, als die Anzahl der Permutationen von $n$ Elementen beträgt, unter denen $k$ von der einen und $(n-k)$ von der andern Art unter einander gleich sind. Mit dieser Permutationszahl ist also die gefundene Wahrscheinlichkeit noch zu multipliciren. Diese Permutationszahl ist nun $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ (nach 187) oder $n_{\cdot k}$ (nach 187a). Mithin ist, wenn wir die gesuchte Wahrscheinlichkeit mit $w$ bezeichnen:

210. $$w = n_{\cdot k} . w_1^k (1-w_1)^{n-k}.$$

Anm. Die Fälle $k=0, 1, 2, \ldots n$ stellen zusammen alle möglichen Fälle dar: mithin ist die Summe aller diesen Fällen entsprechenden Wahrscheinlichkeiten gleich 1, oder:

210a. $$(1-w_1)^n + n_{\cdot 1} w_1^1 (1-w_1)^{n-1} + n_{\cdot 2} w_1^2 (1-w_1)^{n-2} + \ldots + w_1^n = 1.$$

Diese Formel ist mit 192 identisch, in deren Gestalt sie durch die Substitutionen $(1-w_1) = x$; $w_1 = a$ übergeht.

Die Wahrscheinlichkeit, dass das Ereigniss wenigstens $k$mal eintrifft, erhält man durch Addition aller Werthe für $w$ von $k=k$ bis $k=n$; die Wahrscheinlichkeit, dass es höchstens $k$mal eintrifft, durch Addition aller Werthe für $w$ von $k=0$ bis $k=k$.

Ist im ersteren Falle $k=1$, so ist die Aufgabe offenbar mit der unter 1) gelösten identisch. Da man alsdann von $k=1$ bis $k=n$ zu addiren hat, so ist

$$w = n_{\cdot 1} . w_1^1 (1-w_1)^{n-1} + n_{\cdot 2} . w_1^2 (1-w_1)^{n-2} + \ldots + w_1^n;$$

d. h. (nach 210a)

$$w = 1-(1-w_1)^n,$$

übereinstimmend mit 209.

(Aufgaben: Hofmann 3. Siebzehnter Abschn. 101—114. — Bardey XXXVI.)

# Uebersicht der Formeln und Regeln.

(Zur Wiederholung.)

## Reine Arithmetik.

### Einleitung.

1. Von zwei gleichen Zahlen kann man die eine an die Stelle der anderen setzen.
2. Sind zwei Zahlen derselben dritten gleich, so sind sie unter einander gleich.

### Die einfachen Zahlen.

## A. Die absoluten Zahlen.

### 1. Addition.

3. $a+b=b+a$. (Vertauschung.)
4. $(a+b)+c=a+(b+c)$. (Zusammenfassung.)
5. Die Summe ist grösser als jeder Summand.
6. Gleiches zu Gleichem addirt, giebt Gleiches.
7. $a+(b+c)=a+b+c$. (Summe addirt.)
8. $(a+b)+c=(a+c)+b$. (Reihenf.)

### 2. Subtraction.

9. Gleiches von Gleichem subtrahirt, giebt Gleiches.
10. $(c \mp b) \pm b = c$.
11. $a+(x-c)=a+x-c$. (Diff. add.)
12. $(x+a)-c=(x-c)+a$. (Reihenf.)
13. $a-(b+c)=a-b-c$. (Summe sbtr.)
14. $(a-b)-c=(a-c)-b$. (Reihenf.)
15. $a-(x-c)=a-x+c$. (Diff. subtr.)
16. Eine Plusklammer kann beliebig gesetzt und weggelassen werden, eine Minusklammer nur dann, wenn man gleichzeitig alle in der Klammer stehenden Plus- und Minuszeichen umkehrt.

### 3. Multiplication.

17. $ab=b+b+\ldots.$ ($a$mal).
18. $ab=ba$. (Vertauschung.)
19. $(ab)c=a(bc)$. (Zusammenfass.)
20. Das Product ist grösser als jeder Factor und ein Vielfaches jedes Factors.
21. Gleiches mit Gleichem multiplicirt, giebt Gleiches.
22. $(a+b)c=ac+bc$. (Summe mltpl.)
23. $(x-b)c=xc-bc$. (Diff. multipl.)
24. Heraussetzung d. gem. Factors.
25. $(a+b)(d\pm e)=ad+bd\pm ae\pm be$.
$(x-b)(d\pm e)=xd-bd\pm xe\mp be$.
26. $a(bc)=abc$. (Product multipl.)
27. $(ab)c=(ac)b$. (Reihenfolge.)

### 4. Division.

28. Gleiches durch Gleiches dividirt, giebt Gleiches.
29. $\frac{c}{b}.b=c$; $\frac{ab}{b}=a$.
30. $\frac{x+y}{c}=\frac{x}{c}+\frac{y}{c}$. (Summe divid.)

31. $\frac{z-y}{c} = \frac{z}{c} - \frac{y}{c}$. (Diff. dividirt.)

32. Addit. und Subtract. von Quotienten mit gleichem Divisor.

33. $a . \frac{x}{c} = \frac{ax}{c}$. (Mult. mit Quot.)

34. $\frac{xa}{c} = \frac{x}{c} . a$. (Reihenfolge.)

35. $\frac{a}{bc} = \frac{a|b}{c}$. (Divis. durch Prod.)

36. $\frac{a|b}{c} = \frac{a|c}{b}$. (Reihenfolge.)

37. $\frac{a}{x|c} = \frac{a}{x} . c$. (Divis. durch Quot.)

**5. Potenzirung.**

38. $b^a = b . b . b \ldots$ ($a$mal).

39. Die Potenz ist grösser als die Grundzahl, ist ein Vielfaches derselben, und besteht aus lauter gleichen Factoren von der Grösse der Grundzahl.

40. Gleiches mit Gleichem potenzirt, giebt Gleiches.

41. $c^a . c^b = c^{a+b}$. (Potenz. m. Summe.)

42. $\frac{c^x}{c^b} = c^{x-b}$. (Potenzir. mit Diff.)

43. Multiplication und Division von Potenzen m. gleicher Grundzahl.

44. $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$.
$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$.

45. $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$.

45a. $a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1} = \frac{a^n - b^n}{a - b}$.

45b. $(a + b + c + d + \ldots)^2 = ?$

46. $(ab)^c = a^c b^c$. (Product potenzirt.)

47. $\left(\frac{x}{b}\right)^c = \frac{x^c}{b^c}$. (Quotient potenz.)

48. Multiplication und Division von Potenzen mit gleichen Exponenten.

49. $(c^a)^b = c^{ab}$. (Potenz potenzirt.)

50. $(c^a)^b = (c^b)^a$. (Reihenfolge.)

**6. Radicirung.**

51. Gleiches mit Gleichem radicirt, giebt Gleiches.

52. $(\sqrt[a]{c})^a = c$; $\sqrt[a]{b^a} = b$.

53. $\sqrt[c]{xy} = \sqrt[c]{x} . \sqrt[c]{y}$. (Prod. radic.)

54. $\sqrt[c]{\frac{z}{y}} = \frac{\sqrt[c]{z}}{\sqrt[c]{y}}$. (Quot. radicirt.)

55. Multiplication und Division von Wurzeln mit gleichen Exponenten.

56. $\sqrt[b]{c^x} = c^{\frac{x}{b}}$. (Potenz radicirt.)

57. $(\sqrt[x]{y})^a = \sqrt[x]{y^a}$. (Wurzel potenz.)

58. $(\sqrt[a]{y})^x = \sqrt[a]{y^x}$. (Reihenfolge.)

59. $\sqrt[a]{\sqrt[b]{y}} = \sqrt[ab]{y}$. (Wurzel radic.)

60. $\sqrt[a]{\sqrt[b]{y}} = \sqrt[b]{\sqrt[a]{y}}$. (Reihenf.)

**7. Logarithmirung.**

61. Gleiches mit Gleichem logarithmirt, giebt Gleiches.

62. $b^{{}^b l c} = c$; ${}^b l(b^a) = a$.

63. ${}^c l(xy) = {}^c l x + {}^c l y$. (Product log.)

64. ${}^c l\left(\frac{z}{y}\right) = {}^c l_z - {}^c l_y$. (Quot. log.)

65. Addition und Subtraction von Logarithmen mit gleicher Grundzahl.

66. ${}^c l(x^b) = b \,.\, {}^c l_x$. (Potenz log.)

67. ${}^c l\left(\sqrt[b]{y}\right) = \frac{{}^c l_y}{b}$. (Wurzel log.)

## B. Die relativen Zahlen.

### 1. Die Null.

68. $a \pm 0 = a$.

69. $0 \,.\, c = 0;\ 0 : c = 0$.

70. $0^n = 0;\ \sqrt[n]{0} = 0$.

71. $\frac{0}{0} = c;\ {}^0 l_0 = n$.

### 2. Die negativen Zahlen.

72. $a \pm (-c) = a \mp c$.

73. $\left.\begin{array}{l} +b \pm c = +(b \pm c) \\ -b \pm c = -(b \mp c) \end{array}\right\}$ (Vereinigung.)

74. $(-b)c = -bc;\ \frac{-y}{c} = -\frac{y}{c}$.

75. Product und Quotient zweier gleichstimmiger Zahlen sind positiv, zweier entgegengesetzter negativ.

76. Alle geraden Potenzen einer negativen Zahl sind positiv, alle ungeraden negativ.

### 3. Die Eins.

7 $a \,.\, 1 = \frac{a}{1} = a$.

7 $c^0 = 1$.

7 $1^c = 1$.

8 $c^1 = c$.

81. ${}^c l_1 = 0$.

82. $\sqrt[0]{1} = c;\ {}^1 l_1 = c$.

83. ${}^c l_c = 1$.

### 4. Die umgekehrten Zahlen.

83a. $\frac{a}{c} = a \,.\, \frac{1}{c}$ (Quot. = Prod.)

83b. $\sqrt[b]{c} = c^{\frac{1}{b}}$ (Wurzel = Potenz).

84. $c^{-b} = \frac{1}{c^b} = \left(\frac{1}{c}\right)^b$.

---

## Die zusammengesetzten Zahlen.

## A. Die Polynome.

85. Addition. Beispiel:

$$\begin{array}{l} 3-4x+\ 7x^2 \\ 5+9x-11x^2 \\ \hline 8+5x-\ 4x^2. \end{array}$$

86. Subtraction. Beispiel:

$$\begin{array}{l} \ \ 3-\ 4x+\ 7x^2 \\ \mp 5 \mp\ 9x \pm 11x^2 \\ \hline -2-13x+18x^2. \end{array}$$

87. Multiplication. Beispiel:

$$\begin{array}{l} 3-\ 4x+\ 7x^2 \\ 5+\ 9x-11x^2 \\ \hline 15-20x+35x^2 \\ \quad +27x-36x^2+\ 63x^3 \\ \qquad\quad -33x^2+\ 44x^3-77x^4 \\ \hline 15+\ 7x-34x^2+107x^3-77x^4. \end{array}$$

88. Division. Beispiel:

Dvs: $5+9x-11x^2$ | Q: $3-4x+7x^2$

$$\begin{array}{l} \text{Dvd}: 15+7x-34x^2+107x^3-77x^4 \\ \quad \mp 15 \mp 27x \pm 33x^2 \\ \hline \qquad -20x-\ x^2\ +107x^3 \\ \qquad \pm 20x \pm 36x^2 \mp\ 44x^3 \\ \hline \qquad\qquad +35x^2+\ 63x^3-77x^4 \\ \qquad\qquad \mp 35x^2 \mp\ 63x^3 \pm 77x^4 \\ \hline \qquad\qquad\qquad 0. \end{array}$$

89. Das Quadrat eines Polynoms ist gleich der Summe der Quadrate aller Glieder, vermehrt um die doppelten Producte je zweier.

90. Radicirung mit 2. Beispiel:

$$3-4x+7x^2=\sqrt{9-24x+58x^2-56x^3+49x^4}$$

$$\begin{array}{l|l} & 9 \\ 6-4x & -24x+58x^2 \\ & \pm 24x \mp 16x^2 \\ 6-8x+7x^2 & +42x^2-56x^3+49x^4 \\ & \mp 42x^2 \pm 56x^3 \mp 49x^4 \\ & 0. \end{array}$$

## B. Die Proportionen.

### 1. Die arithmetischen Proportionen.

Wenn $a+b=c+d$, so ist

91. $a-c=d-b$.

92. $c+d=a+b$; $d-b=a-c$.

93. $b+a=d+c$; $c-a=b-d$.

94. Die Proportion kann von links nach rechts oder von rechts nach links gelesen werden. (92 und 93.)

95. $a-d=c-b$. (Vgl. 91.)

96. Wenn $a-x=x-b$, so ist

$$x=\frac{a+b}{2}.$$

97. $\frac{a+b}{2}+\frac{a-b}{2}=a$; $\frac{a+b}{2}-\frac{a-b}{2}=b$.

98. Wenn $(x-a_1)+(x-a_2)+\ldots+(x-a_n)=0$, so ist

$$x=\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}.$$

### 2. Die geometrischen Proportionen.

Wenn $ab=cd$, so ist

99. $\frac{a}{c}=\frac{d}{b}$.

100. $cd=ab$; $\frac{d}{b}=\frac{a}{c}$.

101. $ba=dc$; $\frac{c}{a}=\frac{b}{d}$.

102 $=94$.

103. $\frac{a}{d}=\frac{c}{b}$. (Vgl. 99.)

104. $\frac{a\pm c}{c}=\frac{d\pm b}{b}$. (Vgl. 99.)

105. $\frac{a+c}{a-c}=\frac{d+b}{d-b}$.

106. Wenn $\frac{a}{x}=\frac{x}{b}$, so ist

$$x=\sqrt{ab}.$$

107. Wenn $\frac{x}{a_1}\cdot\frac{x}{a_2}\ldots\frac{x}{a_n}=1$,

so ist $x=\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}$.

108. Wenn $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\ldots=\frac{a_n}{b_n}$, so ist

$$\frac{a_1\pm a_2\pm\ldots\pm a_n}{b_1\pm b_2\pm\ldots\pm b_n}=\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\ldots=\frac{a_n}{b_n}.$$

## C. Die Gleichungen.

### *I. Algebraische Gleichungen.*

109. Gleiche Rechnungen mit gleichen Zahlen geben gleiche Resultate.

110. Jedes Glied einer Gleichung kann mit entgegengesetztem Vorzeichen auf die andre Seite gebracht werden.

**1. Die Gleichung vom 1. Grade.**

Beispiele der Reduct. u. Auflös.:

1) $(2x-5)(3x-10)=(x-4)(6x-9)$

$$\begin{array}{r|c|r} 6x^2-15x & & 6x^2-24x \\ -20x+50 & = & -\ \ 9x+36 \\ \hline -35x+50 & = & -33x+36 \end{array}$$

$-35x+33x=+36-50$

$-2x=-14$

$x=7.$

2) $1+\sqrt{x^2-9}=x.$

$\sqrt{x^2-9}=x-1$

$x^2-9=(x-1)^2=x^2-2x+1$

$2x=9-1=8$

$x=4.$

3) $\frac{3x+5}{4}-\frac{x+7}{3}=\frac{x+3}{12}.$

$9x+15-4x-28=x+3$

$5x-13=x+3$

$4x=16$

$x=4.$

Gleichungen mit mehreren Unbekannten.

Beispiel: 1) $2x+3y=19.$
2) $7x-8y=11.$

1) Substitutionsmethode.

1) $x=\frac{19-3y}{2}$; in 2) eingesetzt:

2) $\frac{133-21y}{2}-8y=11$

$133-21y-16y=22$

$-37y=22-133=-111$

$y=3.$

1) $x=\frac{19-9}{2}=5.$

Comparationsmethode.

1) $x=\frac{19-3y}{2}$; 2) $x=\frac{11+8y}{7}$

$\frac{19-3y}{2}=\frac{11+8y}{7}$

$133-21y=22+16y.$

Weiter wie oben.

3) Additionsmethode.

1) $14x+21y=133$

2) $\mp 14x \pm 16y=\mp 22$

$37y=111;$

$y=3.$

1) $2x+9=19;$

$2x=10$

$x=5.$

4) Determinantenmethode.

$$x=\frac{\begin{vmatrix}19 & 3\\ 11 & -8\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2 & 3\\ 7 & -8\end{vmatrix}};\quad y=\frac{\begin{vmatrix}2 & 19\\ 7 & 11\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2 & 3\\ 7 & -8\end{vmatrix}};$$

$$x=\frac{-152-33}{-16-21}=\frac{-185}{-37}=5$$

$$y=\frac{22-133}{-16-21}=\frac{-111}{-37}=3.$$

111. Jede Unbekannte eines Systems von $n$ linearen Gleichungen mit $n$ Unbekannten ist gleich einem Quotienten, dessen Divisor die Determinante des Systems ist, und dessen Dividend aus dem Divisor hervorgeht, wenn man darin die Coefficienten jener einen Unbekannten der Reihe nach durch die rechten Seiten der Gleichungen ersetzt.

112. Damit ein System von $n$ homogenen, auf Null gebrachten Gleichungen 1. Grades mit $n$ Unbekannten eine Lösung habe, muss die Determinante des Systems verschwinden.

**2. Die Gleichung vom 2. Grade.**

Beispiel: $x^2 - 7x = -12.$

$$x^2 - 7x + \left(\frac{7}{2}\right)^2 = -12 + \left(\frac{7}{2}\right)^2$$

$$\left(x - \frac{7}{2}\right)^2 = -12 + \frac{49}{4} = \frac{1}{4};$$

$$x - \frac{7}{2} = \pm\sqrt{\frac{1}{4}} = \pm\frac{1}{2};$$

$$x_1 = \frac{7}{2} + \frac{1}{2} = 4$$

$$x_2 = \frac{7}{2} - \frac{1}{2} = 3.$$

113. Ist $x^2 + ax + c = 0$, und $x_1, x_2$ die Wurzeln der Gleichung, so ist
$x_1 + x_2 = -a$; $x_1 x_2 = c$, und:

114. $(x - x_1)(x - x_2) = x^2 + ax + c = 0.$

**Die imaginäre Einheit.**

115. $+i = +\sqrt[2]{-1}$; $-i = -\sqrt[2]{-1}.$

116. $(+i)(-i) = -i^2 = +1.$

117. $\frac{1}{+i} = -i$; $\frac{1}{-i} = +i.$

118. $i^{4n} = +1$; $i^{4n+1} = +i$
$i^{4n+2} = -1$; $i^{4n+3} = -i.$

**Imaginäre und complexe Zahlen.**

119. Wenn $a + bi = x$; $a - bi = y$, so ist:
$x + y = 2a$; $x - y = 2bi$; $xy = a^2 + b^2$;
$x^2 = a^2 - b^2 + 2abi$; $y^2 = a^2 - b^2 - 2abi.$

120. Summe, Differenz, Product und Quotient von zwei complexen Zahlen sind wieder complexe Zahlen.

120a. $$\sqrt{a \pm \sqrt{a^2 - b^2}} = \sqrt{\frac{a+b}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-b}{2}}.$$

**3. Die Gleichung vom 3. Grade.**

Beispiel: $x^3 - 6x^2 + 3x + 38 = 0.$

$x = y + 2.$

$$\left.\begin{array}{r} y^3 + 6y^2 + 12y + 8 \\ -6y^2 - 24y - 24 \\ +3y + 6 \\ +38 \end{array}\right| = 0$$

$$y^3 - 9y + 28 = 0.$$

$y = u + v$

$u^3 + v^3 + (u+v)(3uv - 9) + 28 = 0.$

$3uv - 9 = 0$; $uv = 3.$

$u^3 + v^3 = -28$; $u^3 v^3 = 27.$

$u^3 = u_1$; $v^3 = v_1.$

$u_1 + v_1 = -28$; $u_1 v_1 = 27.$

$(u_1 \pm v_1)^2 - 4u_1 v_1 = 784 - 108$

$(u_1 - v_1)^2 = 676.$

$u_1 - v_1 = 26$

$u_1 + v_1 = -28$

$u_1 = -1$; $v_1 = -27$;

$u = -1$; $v = -3.$

$y = -4$; $x = -2.$

121. Ist $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, und $x_1, x_2, x_3$ die Wurzeln der Gleichung, so ist
$x_1 + x_2 + x_3 = -a$;
$x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1 = b$;
$x_1 x_2 x_3 = -c.$

**4. Die Gleichung vom 4. Grade.**

Beispiel: $x^4 - 4x^3 + 20x - 25 = 0.$

$x = y + 1$

$$\left.\begin{array}{r} y^4 + 4y^3 + 6y^2 + 4y + 1 \\ -4y^3 - 12y^2 - 12y - 4 \\ +20y + 20 \\ -25 \end{array}\right| = 0$$

$$y^4 - 6y^2 + 12y - 8 = 0.$$

$u - v = -6$

$y^4 + uy^2 = vy^2 - 12y + 8;$

$$\left(y^2 + \frac{u}{2}\right)^2 = vy^2 - 12y + \left(8 + \frac{u^2}{4}\right);$$

$\mu^2 = v;\ 2\mu\nu = 12;\ \nu^2 = 8 + \frac{u^2}{4};$

$4v\left(8 + \frac{u^2}{4}\right) = 144;$

$4(u+6)\left(8 + \frac{u^2}{4}\right) = 144$

$u^3 + 6u^2 + 32u = -48.$

$u = z - 2$

$$\left.\begin{array}{r} z^3 - 6z^2 + 12z - 8 \\ +6z^2 - 24z + 24 \\ +32z - 64 \\ +48 \end{array}\right| = 0$$

$z^3 + 20z = 0;\quad z = 0;\ u = -2$

$v = 4.$

$(y^2-1)^2 = 4y^2 - 12y + 9 = (2y+3)^2;$

$y^2 - 1 = \pm(2y+3);$

$y^2 \mp 2y = 1 \pm 3.$

$y^2 - 2y = 4;\quad y^2 + 2y = -2$

$(y-1)^2 = 5;\quad (y+1)^2 = -1$

$y = 1 \pm \sqrt{5};\quad y = -1 \pm \sqrt{-1}.$

122. Ist $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, und $x_1, x_2, x_3, x_4$ die Wurzeln der Gleichung, so ist

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -a;$

$x_1x_2 + x_3x_4 + x_2x_3 + x_4x_1 + x_3x_1 + x_2x_4 = b;$

$x_1x_2x_3 + x_2x_3x_4 + x_3x_4x_1 + x_4x_1x_2 = -c;$

$x_1x_2x_3x_4 = d.$

*II. Exponentialgleichungen.*

Beispiel: $100^x = 1000.$

$x.{}^{10}l100 = {}^{10}l1000;\ x = \frac{{}^{10}l1000}{{}^{10}l100} = \frac{3}{2}.$

# D. Die Reihen.

## *I. Die arithmetische Reihe.*

### 1. Reihen erster Ordnung.

#### a. Reihen erster Stufe.

3. $s = a + (a+d) + (a+2d) + \ldots + u.$

4. $u = a + (n-1)d.$

125. $s = (a+u)\frac{n}{2}.$

126. $s = [2a + (n-1)d]\frac{n}{2}$

$= an + \frac{n(n-1)}{2}.d.$

127. $\infty \pm a = \infty;\ \infty.a = \infty;\ \infty : a = \infty;$

$\infty^a = \infty;\ \sqrt[a]{\infty} = \infty.$

#### b. Reihen zweiter Stufe.

128. $a^{\cdot n} = \frac{a(a-1)(a-2)\ldots[a-(n-1)]}{1.2.3\ldots n}.$

129. $a^{\cdot n} = \frac{1.2..a}{1.2..n.1.2..(a-n)} = \frac{a!}{n!(a-n)!}.$

130. $a^{\cdot n} = \frac{(n+1)(n+2)..a}{1.2..(a-n)}.$

131. $a^{\cdot 0} = 1.$

132. $a^{\cdot 1} = 1.$

133. $a^{\cdot(a-n)} = a^{\cdot n}.$

134. $a^{\cdot(n+1)} = \frac{a-n}{n+1}.a^{\cdot n}.$

135. $a^{\cdot(n-1)} = \frac{n}{a-n+1}.a^{\cdot n}.$

135a. $a^{\cdot(a+1)} = 0.$

135b. $a^{\cdot(-1)} = 0.$

136. $(a+1)^{\cdot n} = a^{\cdot n} + a^{\cdot(n-1)}.$

137. $(a+b)^{\cdot n} = a^{\cdot n}b^{\cdot 0} + a^{\cdot(n-1)}b^{\cdot 1} + \ldots + a^{\cdot 0}b^{\cdot n}.$

138. $(-a)^{\cdot n} = (-1)^n.(a+n-1)^{\cdot n}.$

139. $\left(\frac{1}{a}\right)^{\cdot n} = \frac{(1-a)(1-2a)..[1-(n-1)a]}{a^n.1.2..n}.$

### 2. Reihen höherer Ordnung.

140. Ist $a_1, a_2, ..$ die erste Differenzreihe von $b_1, b_2, \ldots$, so ist $b_{n+1} - b_n = a_n.$

141. Sind $a, b, c, \dots$ die Anfangsglieder einer Reihe höherer Ordnung und ihrer successiven Differenzreihen, so ist ihr $n^{\text{tes}}$ Glied

$$s_n = a(n-1)^{\cdot 0} + b(n-1)^{\cdot 1} + c(n-1)^{\cdot 2} + \dots$$

142. Unter Voraussetzung 140 ist

$$b_{n+1} = b_1 + (a_1 + a_2 + \dots + a_n).$$

143. Unter Voraussetzung 141 ist die Summe der $n$ ersten Glieder einer Reihe höherer Ordnung:

$$S_n = a.n^{\cdot 1} + b.n^{\cdot 2} + c.n^{\cdot 3} + \dots$$

### *II. Die geometrische Reihe.*

144. $s = a + aq + aq^2 + \dots + u.$

145. $u = aq^{n-1}.$

146. $s = \dfrac{uq - a}{q - 1}.$

147. $s = \dfrac{aq^n - a}{q - 1} = a \cdot \dfrac{q^n - 1}{q - 1}.$

147a. $q^{n-1} + q^{n-2} + \dots + q + 1 = \dfrac{q^n - 1}{q - 1}.$

148. Für die unendliche fallende Reihe ist

$$s_1 = \frac{1}{1-q} = 1 + q + q^2 + \dots$$

149. $\dfrac{1}{0} = \infty; \ \dfrac{1}{\infty} = 0.$

150. $\dfrac{a}{1-q} = a + aq + aq^2 + \dots$

## E. Die Kettenbrüche.

### *I. Endliche Kettenbrüche.*

151. Verwandlung eines Quotienten in einen Kettenbruch. Beispiel: $\dfrac{7}{11}$.

```
7 | 11 | 1
    7
   ---
   4 | 7 | 1
       4
      ---
      3 | 4 | 1
          3
         ---
         1 | 3 | 3
             3
            ---
             0
```

$$\frac{7}{11} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3}}}}$$

152. Der Werth eines Kettenbruchs mit $p+1$ Nennern $(1/\overline{q_1} + 1/\overline{q_2} + \dots)$ entsteht aus demjenigen mit $p$ Nennern, indem man

1 durch $q_{p+1}$

$q_p$ durch $q_p \cdot q_{p+1} + 1$

ersetzt.

153. Bezeichnet man mit $[q_1 q_2 q_3 \dots]$ die Summe der Ausdrücke, welche aus dem Producte $q_1 q_2 q_3 \dots$ dadurch hervorgehen, dass man auf alle möglichen Arten eine gerade Anzahl zusammenstehender Factoren weglässt, so ist der Kettenbruch, dessen Nenner $q_1, q_2, \dots$ sind, gleich dem Quotienten

$$\frac{[q_2 q_3 \dots]}{[q_1 q_2 q_3 \dots]}.$$

154. Zähler und Nenner des Werthes eines Kettenbruches haben die Form

$$a \cdot q_p + b \cdot 1.$$

155. Werth des Kettenbruches als Quotient zweier Determinanten:

$$\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & . & 0 & 0 \\ 0 & q_2 & 1 & . & 0 & 0 \\ 0 & -1 & q_3 & . & 0 & 0 \\ . & . & . & . & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & q_{n-1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & q_n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} q_1 & 1 & 0 & . & 0 & 0 \\ -1 & q_2 & 1 & . & 0 & 0 \\ 0 & -1 & q_3 & . & 0 & 0 \\ . & . & . & . & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & q_{n-1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & q_n \end{vmatrix}}$$

156. Die successiven Näherungswerthe eines Kettenbruches sind abwechselnd grösser und kleiner als der Werth des Kettenbruches, und zwar sind diejenigen von ungerader Ordnung grösser, diejenigen von gerader Ordnung kleiner.

157. Zwischen den Zählern wie zwischen den Nennern von drei aufeinander folgenden Näherungswerthen besteht, wenn der letzte Näherungsbruch mit $q_{p+1}$ schliesst, die Beziehung:

$$x_{p+2} = x_{p+1} \cdot q_{p+2} + x_p \,.\, 1.$$

158. $\dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{x_{n-1} q_n + x_{n-2} \,.\, 1}{y_{n-1} q_n + y_{n-2} \,.\, 1}.$

159. $\dfrac{x_{p-1}}{y_{p-1}} - \dfrac{x_p}{y_p} = (-1)^p \,.\, \dfrac{1}{y_{p-1} \cdot y_p}.$

160. Jeder in kleineren Zahlen als ein Näherungswerth ausgedrückte Bruch ist von dem Werthe des Kettenbruchs um mehr verschieden als dieser Näherungswerth.

**Diophantische Gleichungen.**

1. **Beispiel:** $11x - 7y = +1.$

$\frac{7}{11}$ als Kettenbruch s. 151. Vorletzter (dritter) Näherungswerth ist $\frac{2}{3}$. Da derselbe von ungerader Ordnung ist, so haben $x$ und $y$ dasselbe Zeichen, wie die rechte Seite der Gleichung, also $x = +2$; $y = +3$.

162. **Beispiel:** $11u + 7v = 5.$

$\frac{7}{11}$ als Kettenbruch, wie oben; dgl. der Näherungswerth. Also

$$u = +2 \,.\, 5 = +10;$$
$$v = -3 \,.\, 5 = -15.$$

163. Weitere Lösungen.

$$u_1 = u + n \,.\, 7; \quad v_1 = v - n \,.\, 11.$$
$$u_1 = 10 + 7n; \quad v_1 = -15 - 11n.$$

### *II. Unendliche Kettenbrüche.*

**Darstellungen der Wurzel einer quadratischen Gleichung als Kettenbruch.**

1) **Beispiel:** $y^2 + 4y = 4.$

$$y = -2 \pm \sqrt{8}; \quad y(y+4) = 4;$$
$$y = \frac{4}{4+y};$$
$$y = 4/4 + 4/4 + 4/4 + \ldots$$
$$\sqrt{8} = 2 + 4/4 + 4/4 + \ldots$$

2) **Beispiel:** $\sqrt{8} = 2 + \dfrac{1}{c_0}.$

$$\frac{1}{c_0} = \sqrt{8} - 2$$
$$c_0 = \frac{1}{\sqrt{8}-2} = \frac{\sqrt{8}+2}{4} = 1 + \frac{1}{c_1}$$
$$\frac{1}{c_1} = \frac{\sqrt{8}+2-4}{4} = \frac{\sqrt{8}-2}{4}$$

$$c_1 = \frac{4}{\sqrt{8}-2} = \frac{4(\sqrt{8}+2)}{4} =$$
$$\sqrt{8}+2 = 4 + \frac{1}{c_2}.$$
$$\frac{1}{c_2} = \sqrt{8}+2-4 = \sqrt{8}-2 = \frac{1}{c_0};$$
$$c_2 = c_0;\ c_3 = c_1;\ \ldots$$
$$\sqrt{8} = 2 + 1/\overline{1} + 1/\overline{4} + 1/\overline{1} + 1/\overline{4} + \ldots$$

Verwandlung eines periodischen Kettenbruchs in einen irrationalen Ausdruck.

Beispiel:
$$y = 1/\overline{1} + 1/\overline{4} + 1/\overline{1} + 1/\overline{4} + \ldots$$
$$y = 1/\overline{1} + 1/\overline{4} + y = 1\Big/\frac{5+y}{4+y};$$
$$y = \frac{4+y}{5+y};\ y^2 + 5y = 4 + y;$$
$$y^2 + 4y = 4;\ y = -2 \pm \sqrt{8}.$$

# Angewandte Arithmetik.

## *I. Die Decimalrechnung.*

### 1. Ganze Decimalzahlen.

164. Links von den Ziffern der Decimalzahl können Nullen beliebig gesetzt und weggelassen werden. — Eine Decimalzahl wird mit $10^n$ multiplicirt, indem man rechts $n$ Nullen hinzufügt.

Bestimmung der Quadratwurzel.

Beispiel: $\sqrt{41|37|06|24} = 6432$

```
         41|37|06|24 = 6432
         36
  12|4   53|7
         496
 128|3   410|6
         3849
1286|2   2572|4
         25724
             0.
```

Bestimmung des grössten gemeinsamen Factors zweier Decimalzahlen.

Beispiel:

```
629|703|1
    629
     74|629|8
        592
         37|74|2
            74
             0.
```

Also ist 37 der grösste gemeinsame Factor von 629 und 703.

Elimination einer Unbekannten aus zwei Gleichungen beliebigen Grades.

Beispiel: $2x^3y - xy^3 - 24 = 0;$
$2x^2 - y^2 - 2 = 0.$

$$2x^2 - y^2 - 2 \mid 2x^3y - xy^3 - 24 \mid xy$$
$$\pm 2x^3y \pm xy^3 \pm 2xy$$
$$2xy - 24$$

$$2xy - 24 \mid 2x^2 - y^2 - 2 \mid \frac{x}{y} + \frac{12}{y^2}$$
$$\mp 2x^2 \pm \frac{24x}{y}$$
$$\frac{24x}{y} - y^2 - 2$$
$$\mp \frac{24x}{y} \pm \frac{288}{y^2}$$
$$\frac{288}{y^2} - y^2 - 2 = 0.$$

$y^4 + 2y^2 = 288;\ y^2 = 16;\ y = 4;\ x =$

### 2. Decimalbrüche.

165. 166. Ein endlicher Dec[imal]bruch ist gleich eine[m] Quotienten, dessen Dividen[d] die Decimalstellen, und desse[n]

Divisor eine Eins mit ebensovielen Nullen enthält, als Decimalstellen vorhanden sind.

167. **Ein rein periodischer Decimalbruch** ist gleich einem Quotienten, dessen Dividend die Periode, und dessen Divisor ebensoviele Neunen enthält, als die Periode Stellen hat.

168. **Ein gemischt periodischer Decimalbruch** ist gleich einem Quotienten, dessen Dividend erhalten wird, wenn man die vorperiodische Zahl von derselben um die erste Periode verlängerten Zahl subtrahirt, und dessen Divisor aus soviel Neunen besteht als die Periode Stellen hat, und aus soviel Nullen, als vorperiodische Stellen da sind.

### 3. Näherungswerthe.

169. Die letzte Ziffer eines abgekürzten Decimalbruchs wird um 1 vergrössert, wenn die erste Ziffer des weggelassenen Theils $\geq 5$ ist.

**Näherungsweise Bestimmung der Wurzel einer Gleichung.**

Beispiel:

$$A = x^3 + x - 5 = 0;$$

$$\begin{cases} x = \ \ 1,\ 2 \\ A = -3, +5 \end{cases};\quad x = 1 + \frac{1}{y}$$

$$\frac{3}{y} + \frac{3}{y^2} + \frac{1}{y^3} + 1 + \frac{1}{y} - 5 = 0;$$

$$-3 + \frac{4}{y} + \frac{3}{y^2} + \frac{1}{y^3} = 0;$$

$$A \ \ = -3y^3 + 4y^2 + 3y + 1 = 0.$$

$$\begin{cases} y = 1,\ 2 \\ A_1 = 5, -1 \end{cases};\quad y = 1 + \frac{1}{z}$$

$$-3 - \frac{9}{z} - \frac{9}{z^2} - \frac{3}{z^3} + 4 + \frac{8}{z} + \frac{4}{z^2} + 3 + \frac{3}{z} + 1 = 0;$$

$$5 + \frac{2}{z} - \frac{5}{z^2} - \frac{3}{z^3} = 0;$$

$$A_2 = 5z^3 + 2z^2 - 5z - 3 = 0$$

$$\begin{cases} z = \ \ 1,\ 2 \\ A_2 = -1, +35 \end{cases};\quad z = 1 + \frac{1}{u};\ \text{u.s.w.}$$

$$x = 1 + 1/\overline{1} + 1/\overline{1} + \ldots = \frac{3}{2}.$$

**Näherungsweise Bestimmung eines Logarithmus.**

Beispiel ${}^{10}l2$ zu bestimmen.

| | | |
|---|---|---|
| $10^y = 2$ | $2^{y_1} = 10$ | $\left(\frac{5}{4}\right)^{y_2} = 2$ |
| $\begin{cases} 10^0 = 1 \\ 10^1 = 10 \end{cases}$ | $\begin{cases} 2^3 = 8 \\ 2^4 = 16 \end{cases}$ | $\begin{cases} \left(\frac{5}{4}\right)^3 = \frac{125}{64} \\ \left(\frac{5}{4}\right)^4 = \frac{625}{256} \end{cases}$ |
| $y = 0 + \frac{1}{y_1}$ | $y_1 = 3 + \frac{1}{y_2}$ | $y_2 = 3 + \frac{1}{y_3}$ |
| $10^y = 10^{\frac{1}{y_1}}$ | $2^{y_1} = 8 . 2^{\frac{1}{y_2}}$ | u. s. w. |
| $2 = 10^{\frac{1}{y_1}}$ | $10 = 8 . 2^{\frac{1}{y_2}}$ | |
| $2^{y_1} = 10$ | $\left(\frac{5}{4}\right)^{y_2} = 2$ | |

$$\text{Also } y = \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{3 + \ldots}} = \frac{3}{10}.$$

170. **Gemeines Logarithmensystem.** — Der Logarithmus einer Potenz von 10 ist gleich ihrem Exponenten.

171. Die grössere von zwei Zahlen hat den grösseren Logarithmus.

172. Die Kennziffer eines Logarithmus ist um 1 kleiner als die Stellenzahl des Numerus.

173. Die Logarithmen solcher ganzen Zahlen, die sich nur durch angehängte Nullen von einander unterscheiden, haben dieselbe Mantisse und unterscheiden sich nur durch die Kennziffer.

174. In einem Decimalbruch hat die Stellung des Kommas keinen Einfluss auf die Mantisse.

175. Die Kennziffer des Logarithmus eines Decimalbruches ist um Eins kleiner als die Anzahl seiner ganzen Stellen.

176. Die Kennziffer des Logarithmus eines Decimalbruches, welcher mit Nullen beginnt, ist gleich der negativ genommenen Anzahl aller dieser Nullen.

### *II. Die Zinsrechnung.*

#### 1. Einfache Zinsrechnung.

177. $z_1 = \frac{pc}{100}$.

178. $z_n = \frac{npc}{100}$.

179. $n = \frac{100 z_n}{pc}$; $p = \frac{100 z_n}{nc}$; $c = \frac{100 z_n}{np}$.

180. Ist $s_n$ Summe von Capital und Zinsen, so ist

$$c = \frac{100 s_n}{100 \pm np}.$$

#### 2. Zinseszins-Rechnung.

181. $1 + \frac{p}{100} = q$.

182. $s_n = c \cdot q^n$.

183. $s = c \cdot q^n + b \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$.

184. Für $s = 0$ und negatives $b$ ist

$$cq^n = b \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

---

## Reine Combinatorik.

#### 1. Das Permutiren.

185. Permutationszahl für lauter verschiedene Elemente:

$$P_n = n!$$

186. Dgl., wenn $p$ gleiche Elemente da sind:

$$P_{np} = \frac{n!}{p!}.$$

187. Dgl., wenn $p$ gleiche, $q$ gleiche, $r$ gleiche Elemente da sind:

$$P_{npqr..} = \frac{n!}{p!\,q!\,r!\,..}.$$

187a. $P_{np(n-p)} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!} = n^{\cdot p}$.

#### 2. Das Combiniren.

188. Combinationszahl ohne Wiederholung

$${}^pC_n = n^{\cdot p}.$$

189. Dgl. mit Wiederholung

$${}^pC^n = (n + p - 1)^{\cdot p}.$$

#### 3. Das Variiren.

190. Variationszahl ohne Wiederholung:

$${}^pV_n = n^{\cdot p} \cdot p!$$

191. Dgl. mit Wiederholung:

$${}^pV^n = n^p.$$

---

# Angewandte Combinatorik.

## I. Die Binomialreihe.

192. $(x+a)^n = x^n + n^{\cdot 1} a x^{n-1} + n^{\cdot 2} a^2 x^{n-2} + \dots + n^{\cdot (n-1)} a^{n-1} x + n^{\cdot n} a^n.$

193. $(x+1)^n = 1 + n^{\cdot 1} x + n^{\cdot 2} x^2 + \dots$

193a. $\frac{1}{(1-x)^n} = 1 + n^{\cdot 1} x + (n+1)^{\cdot 2} x^2 + (n+2)^{\cdot 3} x^3 + \dots$

## II. Die Wahrscheinlichkeitsrechnung.

### A. Wahrscheinlichkeit für einen Fall.

#### a. Einfache Wahrscheinlichkeit.

194. W., aus $n$ gegebenen Elementen ein bestimmtes zu wählen.

$$w = \frac{1}{n}.$$

195. W., aus $n$ gegebenen Elementen $k$ vorher bestimmte zu wählen.

$$w = \frac{1}{n^{\cdot k}}.$$

196. Dgl. in bestimmter Reihenfolge.

$$w = \frac{1}{n^{\cdot k} \,.\, k!}.$$

197. W., dass, wenn von $n$ Elementen $k$ gewählt werden, $h$ vorher bestimmte dabei sind.

$$w = \frac{(n-h)^{\cdot (k-h)}}{n^{\cdot k}}.$$

198. Dgl., wenn $h$ der gewählten $k$ Elemente einer bestimmt[illegible] Sorte angehören sollen, von der $p$ vorhanden sind.

$$w = \frac{(n-p)^{\cdot (k-h)} \,.\, p^{\cdot h}}{n^{\cdot k}}.$$

[illegible]. W., dass, wenn unter $n$ Elementen $p_1$ der $1^{\text{ten}}$, $p_2$ der $2^{\text{ten}}$ … $p_r$ der $r^{\text{ten}}$ Sorte angehören, und $k$ gewählt werden, alsdann $h_1$ von der $1^{\text{ten}}$, $h_2$ von der $2^{\text{ten}}$, … $h_r$ von der $r^{\text{ten}}$ Sorte dabei sind.

$$w = \frac{p_1^{\cdot h_1} \,.\, p_2^{\cdot h_2} \dots p_r^{\cdot h_r}}{n^{\cdot k}}.$$

200. W., mit einem Würfel die Summe $s$ zu werfen:

$$w = \frac{1}{6}.$$

201. W., mit $n$ Würfeln die Summe $s$ zu werfen:

$$w = \frac{1}{6^n}\left[(s-1)^{\cdot (s-n)} + n^{\cdot 1}(s-7)^{\cdot (s-n-6)} + n^{\cdot 2}.(s-13)^{\cdot (s-n-12)} + \dots\right].$$

202. Dgl., wenn jeder Würfel $k$ Felder hat:

$$w = \frac{1}{k^n}\left[(s-1)^{\cdot (s-n)} + n^{\cdot 1}(s-1-k)^{\cdot (s-n-k)} + n^{\cdot 2}(s-1-2k)^{\cdot (s-n-2k)} + \dots\right].$$

#### b. Combinirte Wahrscheinlichkeit.

203. W., dass von $n$ Ereignissen, deren einzelne W. $w_1, w_2, \dots w_n$ sind, eins eintreffe.

$$w = w_1 + w_2 + \dots + w_n.$$

204. Dgl., dass alle $n$ Ereignisse eintreffen (in bestimmter Reihenfolge)

$$w = w_1 w_2 \dots w_n.$$

205. W., dass ein Ereigniss, dessen W. $\frac{a}{b}$ ist, $n$mal nach einander eintreffe.

$$w = \frac{a^n}{b^n}.$$

206. Dgl., wenn nach jedesmaligem Eintreffen die Zahl der möglichen und die der günstigen Fälle um 1 abnimmt.

$$w = \frac{a^{\cdot n}}{b^{\cdot n}}.$$

207. Dgl. für mehrere Ereignisse im ersten Falle:

$$w = \frac{a_1^{n_1}}{b_1^{n_1}} \cdot \frac{a_2^{n_2}}{b_2^{n_2}} \dots$$

208. Im zweiten Falle:

$$w = \frac{a_1^{\cdot n_1}}{b_1^{\cdot n_1}} \cdot \frac{a_2^{\cdot n_2}}{b_2^{\cdot n_2}} \dots$$

**B. Wahrscheinlichkeit für mehrere Fälle.**

209. W., dass ein Ereigniss, dessen W. $w_1$ ist, spätestens beim $n^{\text{ten}}$ Versuch eintrifft.

$$w = 1 - (1 - w_1)^n.$$

210. Dgl., dass es bei $n$ Versuchen $k$mal eintrifft.

$$w = n^{\cdot k} \cdot w_1^k (1 - w_1)^{n-k}.$$

# Register.


Nr.

Abhängige Gleichungen . . 97
Addend (num. addendus) . . 6
Addiren (addere) . . . . . 6
Addition . . . . . . . 5
„ fortschreitende . . 8
Additionsmethode . . . . 97
Algebraische*) Ausdrücke . . 74
„ Gleichungen . . 91
Anfangsglied der Reihe . 121. 140
Arithmetik (ἀριϑμετικὴ τέχνη) . 1
Arithmet. Mittel . . . . 82. 83
„ Reihe . . . . 121
Auflösung d. Gleichungen . 89. 90. 94
Augend (num. augendus) . . 6

Baarzahlung . . . . . . 172
Bedingungsgleichung . . . 96
Bestimmungsgleichung . . . 12
Binom (bis, νέμω) . . . 74
Binomialcoefficient . . . 189
Binomialreihe . . . . . 189
Biquadratische Gleichung . . 113
Biquadratwurzel der Einheit . 113
Bruch . . . . . . . . 24
Bruchpotenz . . . . . 45
Buchstabengrösse . . . . . 76

Capital . . . . . . . 171
Cardanische Formel . . . . 110
Cirkuläre Vertauschung . . 97
Coefficient (num. coefficiens) . 75
Combination . . . . . 177
C[…]nbinatorik . . . . . 177
C[…]nbiniren (combinare) . . 181
C[…]nparationsmethode (comparare) 97
C[…]nplexe Zahl (complexus) . 104
C[…]njugirte Zahl (conjugare) . 104
C[…]bikwurzel der Einheit . . 108
C[…]bische Gleichung . . . 108

Nr.

Decimalbruch (decem) . . . 159
Decimalstelle . . . . . 159
Decimalzahl . . . . . . 155
Determinante (num. determinans) 97
Determinanten-Methode . . 97
Differenz (differre) . . . . 11
„ der Reihe . . . 121
Differenzreihe . . . . . 136
Diophantische Gleichung . . 150
Disconto*) . . . . . . 172
Dividend (num. dividendus) . 24
Dividiren (dividere) . . . 24
Division . . . . . . 23
Divisor . . . . . . . 24

Einheit . . . . . . . 1
„ imaginäre . . . . 102
Einkaufspreis . . . . . 172
Eins . . . . . . . . 64
Element . . . . . . . 177
Elimination (eliminare) . . 96
Endglied der Reihe . . 121. 140
Erweiterung des Quotienten . 29
Exponent (num. exponens) . . 32
„ der Binomialreihe . 189
„ der Factorielle . . 126
„ der Wurzel . . 39
Exponentialgleichung . . 91. 119

Factor . . . . . . . 18
Factorielle . . . . . . 126
Factoriellengebiet . . . . 128
Facultät (facultas) . . . . 126
Form . . . . . . . . 177
Formel . . . . . . . 2
Funktion (fungi) . . . . 96

Ganzes . . . . . . . 6
Geometrisches Mittel (Geometrie) 87


*) Al gebr (arabisch) die Ergänzung.

*) Richtiger Sconto, von scontare (ital.) abrechr[…]

| | Nr. |
|---|---|
| Geometrische Reihe | 140 |
| Gewinn | 172 |
| Gleichung | 2 |
| „ abhängige | 97 |
| „ algebraische | 91 |
| „ auf Null gebrachte | 92 |
| „ biquadratische | 113 |
| „ cubische | 108 |
| „ diophantische | 150 |
| „ gemischte | 93 |
| „ geordnete | 92 |
| „ homogene | 97 |
| „ lineare | 95 |
| „ quadratische | 98 |
| „ reine | 93 |
| „ symmetrische | 99 |
| „ transcendente | 91 |
| „ widersprechende | 94. 97 |
| Glied der Determinante | 97 |
| „ des Polynoms | 74 |
| „ „ gleichnamiges | 76 |
| „ der Proportion | 78 |
| „ der Reihe | 121 |
| „ „ allgemeines | 121 |
| Grad der Gleichung | 92 |
| „ „ Potenz | 32 |
| „ „ Wurzel | 39 |
| Grundzahl der Binomialreihe | 189 |
| „ der Factorielle | 126 |
| „ des Logarithmus | 48 |
| „ der Potenz | 32 |
| Heraussetzung d. gem. Factors | 21 |
| Homogene Gleichung (ὁμογενής) | 97 |
| Imaginäre Einheit (imaginaire) | 102 |
| „ Zahl | 104 |
| Irrationale Zahl (ratio, Verhältniss) | 71 |
| Irreductibler Fall (casus irreductibilis) | 111 |
| Kennziffer | 168 |
| Kettenbruch | 145 |
| Kettenrest | 148 |
| Kürzung des Quotienten | 29 |
| Lineare Gleichung (linea) | 95 |
| Logarithmiren | 48 |
| Logarithmus (λογαριθμός) | 48 |
| Logarithmisches System | 168 |
| „ Tafel | 169 |

| | Nr. |
|---|---|
| Mantisse (mantissa, Zugabe) | 168 |
| Messung | 25 |
| Minuend (num. minuendus) | 11 |
| Minusklammer | 15 |
| Mittel, arithmetisches | 82 |
| „ geometrisches | 87 |
| Multiplicand (num. multiplicandus) | 18 |
| Multiplication | 17 |
| „ fortschreitende | 20 |
| Multiplicator | 18 |
| Multipliciren (multiplicare) | 18 |
| Näherungsbruch | 148 |
| Näherungswerth des Kettenbr. | 148 |
| „ des Decimalbr. | 164 |
| Negative Zahl (negare) | 61 |
| Nenner | 24 |
| „ des Kettenbruchs | 145 |
| Normalform des Polynoms | 75 |
| „ der Gleichung | 92 |
| Null | 58 |
| Numerus | 48 |
| Ordnen der Elemente | 179 |
| „ der Gleichung | 92 |
| „ der Permutationen | 179 |
| „ des Polynoms | 75 |
| Periode des Decimalbruchs | 162 |
| „ des Kettenbruchs | 152 |
| Permutation | 178 |
| Permutiren (permutare) | 178 |
| Plusklammer | 15 |
| Polygonalzahl (Polygon) | 136 |
| Polynom (πολύς, νέμω) | 74 |
| Positive Zahl (ponere) | 61 |
| Potenz (potentia) | 32 |
| „ fallende | 75 |
| „ gerade | 62 |
| „ steigende | 75 |
| „ ungerade | 62 |
| Potenziren | 32 |
| Potenzirung | 31 |
| Potenzreihe | 120 |
| Procente (pro centum) | 171 |
| Product (productum) | 18 |
| Productreihe | 120 |
| Proportion | 78 |
| „ arithmetische | 79 |
| „ fortleitende | 88 |
| „ geometrische | 84 |
| „ stetige | 82. 87 |

| | Nr. |
|---|---|
| Proportion, zusammengesetzte | 88 |
| Proportionale, vierte | 78 |
| „ mittlere arithm. | 82 |
| „ „ geom. | 87 |
| Pyramidalzahl (Pyramide) | 136 |
| Quadrat | 35 |
| Quadratische Gleichung | 98 |
| Quadratwurzel | 76 |
| „ der Einheit | 98 |
| Quotient (quotiens) | 24 |
| „ der Reihe | 140 |
| Rabatt (rabattre) | 172 |
| Radicand (num. radicandus) | 39 |
| Radiciren | 39 |
| Radicirung (radix) | 38 |
| Rechenlineal | 169 |
| Reduction der Gleichung | 92. 99 |
| Reelle Zahl | 104 |
| Reihe | 120 |
| Rente | 176 |
| Resultante (num. resultans) | 97 |
| Seite der Gleichung | 2 |
| Statistik | 190 |
| Stelle | 155 |
| „ ganze | 159 |
| Substitutionsmethode (substituere) | 97 |
| Subtraction | 10 |
| Subtrahend (num. subtrahendus) | 11 |
| Subtrahiren (subtrahere) | 11 |
| Summand (num. summandus) | 6 |
| Summe (summa) | 6 |
| Summenreihe | 120 |
| „ der arithm. Reihe | 135 |
| Symmetrische Gleichung | 99 |
| System, logarithmisches | 168 |
| Theil | 6 |
| Theilung | 25 |
| Transcendenter Ausdruck (transcendere) | 74 |
| „ Gleichung | 91 |
| mgekehrte Zahl | 67 |
| nbekannte der Gleichung | 90 |
| nendlich grosse Zahl | 124 |
| Unendlicher Decimalbruch | 162 |
| „ Kettenbruch | 151 |
| „ Reihe | 120 |
| Unterdeterminante | 97 |
| Variation | 184 |
| Variiren (variare) | 184 |
| Verkaufspreis | 172 |
| Verlust | 172 |
| Vertauschung, cirkuläre | 97 |
| Vorzeichen | 61 |
| Wahrscheinlichkeit | 190. 192 |
| Wahrscheinlichkeitsrechnung | 191 |
| Werth des Kettenbruchs | 145 |
| Widersprechende Gleichung | 94. 97 |
| Wurzel | 39 |
| „ der Gleichung | 90 |
| Zähler | 24 |
| „ des Kettenbruches | 145 |
| Zahl | 1 |
| „ absolute | 56 |
| „ allgemeine | 1 |
| „ complexe | 104 |
| „ conjugirte | 104 |
| „ einfache | 1 |
| „ entgegengesetzte | 61 |
| „ ganze | 67 |
| „ gleichstimmige | 61 |
| „ imaginäre | 104 |
| „ irrationale | 71 |
| „ natürliche | 1 |
| „ negative | 61 |
| „ positive | 61 |
| „ rationale | 71 |
| „ reelle | 104 |
| „ relative | 56 |
| „ specielle | 1 |
| „ umgekehrte | 67 |
| „ unendlich grosse | 124 |
| „ zusammengesetzte | 1 |
| Zahlsystem | 154 |
| Ziffer | 154. 155 |
| Zinsen | 171 |
| Zinseszins | 173 |
| Zinsfuss | 171 |

# Berichtigungen.

Seite 101 Zeile 12 v. u. lies $0^{\cdot 0}$ statt $0^0$.

„ 119 „ 9 v. o. füge nach 159 hinzu: nachdem darin $p+1$ für $p$ gesetzt ist.

„ „ „ 14 v. u. lies $y = \pm a_1$ statt $y = \pm a$.

„ 131 „ 18 v. o. lies $ax^{-1}$ statt $a - x^{-1}$.

# Lehrbuch

der

# elementaren Mathematik

von

**Victor Schlegel,**
Oberlehrer am Gymnasium in Waren.

## Zweiter Theil.
## Geometrie.

---

**Wolfenbüttel.**
Druck und Verlag von Julius Zwissler.
**1879.**

# Vorrede.

Die für die Abfassung des gegenwärtigen Lehrbuches massgebenden Grundsätze, welche in der Vorrede zum ersten Theile desselben auseinandergesetzt wurden, haben, soweit mir bekannt geworden, die entschiedene Billigung der competenten Fachmänner gefunden. Ich kann mich daher an dieser Stelle auf specielle Bemerkungen zu dem vorliegenden zweiten Theile beschränken, umsomehr da gerade über die Gestaltung des in ihm enthaltenen Lehrstoffes mehreres zu sagen ist, weil hierüber die Ansichten weit auseinandergehen. Denn wie lebhaft und einstimmig auch von den Kennern der modernen Geometrie eine theilweise Verschmelzung ihrer Lehren mit denen der gewöhnlichen Schulgeometrie und eine Reform der letzteren gewünscht wird, es giebt noch, namentlich unter den älteren Lehrern der Mathematik, gar viele unbedingte Verfechter der unveränderten euclidischen Geometrie. Diese freilich werden das vorliegende Buch mit Kopfschütteln betrachten. Sie werden in ihm, wie in mehreren anderen neueren geometrischen Lehrbüchern, vergeblich die Eintheilung des Lehrstoffes in Lehrsätze, Voraussetzungen, Behauptungen, Beweise suchen. Um zunächst bei dieser Aeusserlichkeit stehen zu bleiben, so bemerke ich, dass ich die in jener Eintheilung liegende Bequemlichkeit für Lehrer und Lernende nicht verkenne. Jeder Satz bildet mit dem zugehörigen Beweismaterial ein kleines in sich abgeschlossenes Ganze, welches leicht zu überblicken und im Gedächtnisse festzuhalten ist. Und in der That, für eine gedächtnissmässige Aneignung der geometrischen Wahrheiten wüsste ich keine bessere Form der Darstellung zu empfehlen, als die althergebrachte. Allein in neuerer Zeit legt man doch gerade mehr als früher Werth auf das Verständniss nicht nur der einzelnen Sätze, sondern ihres inneren ...mmenhanges, verlangt als Resultat des Unterrichtes nicht nur mathematisches ...en, bestehend in einer Summe von Einzelkenntnissen, und mathematisches ...nen, bestehend in der Fähigkeit, eine Anzahl von Methoden auf mathema...e Aufgaben anzuwenden, sondern mathematische Bildung, bestehend in klarer ...nntniss des inneren Zusammenhanges und der Bedeutung der mathematischen ...rheiten, in Uebersicht über das Ganze und Einsicht in die einzelnen Theile, ...Bildung, wie sie überhaupt das euclidische System nach seinen inneren und

äusseren Eigenthümlichkeiten nimmermehr gewähren kann.*) — Von diesem Standpunkte aber findet man, dass das Zerreissen des Stoffes in lauter für sich bestehende Einzelartikel, in welchen jeder Beweis mit einem besonderen, neuen Ausgangspunkte einer Gedankenreihe anhebt, das Verständniss des Zusammenhanges erschwert. Ich meine nun, dass die Form der Darstellung eines modernen Lehrbuches diesem Zusammenhange in erster Linie Rechnung tragen muss. Daher gebe ich überall zuerst die Ableitung des Satzes aus früheren Sätzen, und spreche dann erst das Resultat in Form eines neuen Satzes aus. Ich denke, dass ernstlich nicht leicht Jemand daran Anstoss nehmen wird, auf diese Weise das Material, welches sonst zum Beweise eines Satzes dient, vor diesem Satze, statt hinter demselben zu finden, obwohl eine ähnliche Eigenthümlichkeit des ersten Theils, nämlich dass in einer arithmetischen Formel bald die rechte, bald die linke Seite als Aufgabe erscheint, thatsächlich das naive Erstaunen eines Recensenten hervorgerufen hat. — Will der Lehrer einen Satz mit seiner Ableitung in die althergebrachte Form bringen, oder durch die Schüler bringen lassen, so halte ich das für eine sehr nützliche dialectische Uebung; aber für die Form der Darstellung des Lehrbuches darf nach meiner Ansicht diese doch mehr nebensächliche Uebung heutzutage nicht mehr bestimmend sein.

Wie die äussere Form, so sind auch die Prinzipien der hergebrachten Darstellung ungenügend, den modernen Anforderungen zu entsprechen. Die alte Geometrie ist wesentlich eine Geometrie des Masses. Das der neueren Geometrie eigenthümliche, so äusserst fruchtbare Prinzip der Verwandtschaft spielt in der älteren eine durchaus untergeordnete Rolle. Zwar pflegen bei Betrachtung der Eigenschaften der Figuren auch in ihr die Verwandtschaften der Congruenz, Aehnlichkeit und Inhaltsgleichheit zur Eintheilung des Stoffes benutzt zu werden. Allein abgesehen davon, dass sie von den allgemeineren Verwandtschaften überhaupt keine Notiz nimmt, so ist die Verwandtschaft der Congruenz durch das Beweisprinzip des Aufeinanderlegens der Figuren ihres ursprünglichen Charakters als einer Lagenbeziehung vollständig entkleidet, um auf eine künstliche und gezwungene Weise aus Massbeziehungen abgeleitet zu werden, die naturgemässer Weise aus ihr fliessen sollen, anstatt zu ihrer Begründung zu dienen. Ganz ebenso verhält es sich mit der Aehnlichkeit, deren Eigenthümlichkeiten nur dann

---

*) Wem diese Behauptung übertrieben erscheinen sollte, der möge beachten, was eine anerkannte Autorität, der verstorbene Prof. Hankel, über diesen Gegenstand sagt: „So opfert die antike Geometrie zu Gunsten einer scheinbaren Einfachheit und Anschaulichkeit die wahre Einfac[h]heit auf, welche in der Allgemeinheit der Principien, und die wahre Anschaulichkeit, welche i[n] der Erkenntniss des Zusammenhanges geometrischer Gestalten in allem Wechsel und in all[er] Veränderlichkeit ihrer sinnlich verstellbaren Lage beruht.“ (Die Entwickelung der Mathemati[k] in den letzten Jahrhunderten. Tübingen 1869, S. 9.) — S. auch den Aufsatz von Fiedle[r] „Zur Reform des geometrischen Unterrichts“ (Züricher Vierteljahrsschrift XXII, 1, 1877). — Meine eigene Ansicht über diesen Gegenstand ist ausführlicher dargelegt in dem Aufsatz[e] „Ueber Ziele und Methoden der Schulgeometrie“. (Hoffmann's Ztschr. f. math. u. naturw. Unter[r.] Bd. 7, S. 179 ff.)

einfach und ungezwungen sich ergeben, wenn man die ähnlichen Gebilde zuerst in ähnlicher Lage betrachtet. — Wenn nun doch, was wohl allgemein anerkannt werden dürfte, das Prinzip der Verwandtschaft oberster Gesichtspunkt bleiben soll, so fragt es sich: Wie sind die einzelnen, von der euclidischen Geometrie ungenügend aufgefassten und behandelten Verwandtschaften zu begründen und durchzuführen? Vor allem die Congruenz, und die mit ihr zusammenhängende Betrachtung einzelner Gebilde. Lässt man sich nicht durch vorgefasste Meinungen, sondern durch die Natur dieser Verwandtschaft selbst leiten, vermöge deren ein bewegtes Gebilde (durch Drehung um einen endlich oder unendlich fernen Punkt) sich selbst congruent bleibt, so kommt man leicht zu dem Resultat, dass das Prinzip der Bewegung nothwendig ist zur Begründung dieser Verwandtschaft und hinreichend zur Ableitung der meisten aus ihr fliessenden Resultate. Der Gedanke, dieses Prinzip zur Ableitung einzelner geometrischer Sätze zu verwenden, ist bekanntlich nicht neu. Auf ihm beruht u. A. der Thibaut'sche Beweis für das 11. Axiom des Euclid. In der Ausdehnungslehre Grassmann's ist seine Wichtigkeit verschiedentlich hervorgehoben. Angeregt durch das Studium dieses Werkes habe ich eine ausführliche und zusammenhängende Verwendung dieses Prinzipes an Stelle der Congruenzsätze zuerst im Jahre 1872 in meinem „System der Raumlehre. 1. Theil" (Leipzig bei Teubner) gegeben. Bald darauf betrat J. C. V. Hoffmann in seiner „Vorschule der Geometrie" denselben Weg. Man hat hie und da die pädagogische Brauchbarkeit dieses Prinzipes geringer gefunden als desjenigen des Aufeinanderlegens der Figuren. Die Sache steht aber so: Die ältere Methode erspart sich durch das Aufeinanderlegen der Dreiecke in den Beweisen der Congruenzsätze jede weitere Bewegung, und ist danach im Stande, alle Gebilde in starrer Lage zu betrachten. Diese Starrheit der Gebilde wird nun als Vorzug gepriesen, und dem Verfahren der Bewegung Mangel an Anschaulichkeit vorgeworfen. Wie aber, wenn die wesentlichen Eigenschaften eines Gebildes nur dadurch zur Anschauung kommen, dass man dasselbe als ein durch Bewegung entstandenes betrachtet? Woher rührt die noch heut in manchen Köpfen existirende Verwirrung hinsichtlich des Winkelbegriffs, wenn nicht davon, dass man den starren Winkel bald als Flächenstück, bald als Richtungsunterschied betrachtete? Hier, wie in vielen anderen Fällen, kann nur der Begriff der Bewegung Klarheit verschaffen. Der Vortheil, welchen die ältere Methode erreicht, ist also nur ein scheinbarer, er kommt der Bequemlichkeit zu Gute und [illegible]det dem Verständniss. — Die Methode des Aufeinanderlegens der Dreiecke [illegible]t aber entbehrt, indem sie an die Stelle der in jedem Momente bestimmten [illegible] zu verfolgenden continuirlichen Bewegung einen Sprung des Gebildes setzt, [illegible] welchem nur Anfangs- und Endstellung bestimmt sind, und indem sie ferner [illegible] Phantasie zumuthet, sich zwei Gebilde an demselben Orte zu denken, selbst [illegible]ehr der Anschaulichkeit, dass die herkömmlichen Beweise der Congruenzsätze, [illegible] denen obendrein das geometrische Anfangspensum belastet werden muss, zu [illegible]m schwierigsten zu begreifenden im Gebiete der ganzen Elementar-Geometrie

gehören.*) Endlich involvirt die Anwendung der Congruenzsätze zum Beweisen anderer Sätze einen Umweg, dessen Beseitigung entschieden geboten erscheint. — In der ersten Abtheilung der vorliegenden Bearbeitung der reinen Geometrie ist nun der Versuch gemacht, unter Zuhilfenahme der die wesentlichen Eigenschaften der Ebene und des Raumes ausdrückenden Sätze die herkömmlich in das Gebiet der Congruenz fallenden Sätze abzuleiten, ohne auf die Congruenzsätze selbst zurückzugehen. Wenn gleichwohl an einer Stelle (Satz 133) dieser Abtheilung, sowie später einigemale hiervon eine Ausnahme gemacht wird, so hat dies folgenden Grund.

Zur einfachen und naturgemässen Ableitung aller ein einzelnes Gebilde betreffenden Sätze reicht auch das Prinzip der Bewegung noch nicht aus. Die darauf gegründete Methode findet vielmehr ihre wesentliche Ergänzung in den geometrischen Operationen, wie sie von Grassmann in seiner „Ausdehnungslehre" aufgestellt, und in meinem „System der Raumlehre" Th. I, S. 12—18, 70—133 angewendet sind. Dass ich diesen so fruchtbaren und einzig adäquaten geometrischen Calkül im vorliegenden Lehrbuche ganz bei Seite gelassen habe (wodurch auch manche Beschränkung bei der Wahl des Stoffes nöthig wurde), erklärt sich aus der gegenwärtigen Verfassung und Eintheilung des geometrischen Unterrichtes an den höheren Schulen, für welche dieses Buch doch wesentlich mit bestimmt ist. Es müssen noch manche Schranken fallen, manche Vorurtheile schwinden, ehe man diesen Calkül, welcher zusammen mit der Methode der Bewegung die einzig mögliche endgiltige Lösung der Aufgabe, die Elementar-Geometrie angemessen darzustellen, enthält, in ein Schulbuch wird aufnehmen können. Wer übrigens die Darstellung des vorliegenden Buches mit derjenigen des „Systems der Raumlehre" vergleicht, wird finden, dass die erstere nur an einer Reihe von Stellen der Ergänzung durch jenen Calkül bedarf, um mit der letzteren in Uebereinstimmung gebracht zu werden. Ueber eine spätere Erweiterung des Buches in diesem Sinne die Ansichten der Fachgenossen zu hören, wird mir erwünscht sein. Immerhin ist es schon bei der gegenwärtigen Arbeit mein Bestreben gewesen, wenigstens den Geist derjenigen Darstellung der Geometrie, welche mir als Ideal vorschwebt, einigermassen zur Anschauung zu bringen, wenn ich auch aus dem oben angeführten Grunde auf die nach meiner Ansicht allein angemessene Form mehrfach verzichten musste.

Von den übrigen Verwandtschaften habe ich nur die Aehnlichkeit und die Collineation ausführlicher behandelt. Die letztere erscheint als natürliche Erweiterung der ersteren, und ihre Darstellung wird auf diese Weise hoffentlich d

*) Ich habe übrigens hier, wie in anderen Fällen, wo meine Darstellung eine von der g wöhnlichen wesentlich abweichende ist, den Anhängern der älteren Methode durch Aufnahme (auch historisch immerhin interessanten) früheren Beweismethoden in die Anmerkungen eine billig scheinende Concession gemacht. Ausserdem sind die dem gewöhnlichen Pensum nicht gehörenden Gegenstände und solche, die meistens erst an späterer Stelle behandelt werden, du Hinzufügung eines Sternes zur Nummer des Abschnittes hervorgehoben.

Anforderung des organischen Zusammenhanges mit dem Vorangehenden entsprechen. (Weit besser, als hier geschehen, lässt sich auch diese Verwandtschaft mit Hilfe des oben erwähnten geometrischen Calküls behandeln. Vgl. „System der Raumlehre“, Th. II, S. 59—104.) Die übrigen speciellen Arten der Collineation finde ich nicht anschaulich und wichtig genug, um sie ausführlicher zu behandeln.

Nun noch ein Wort über die Kegelschnitte. Als Resultate einer zusammengesetzten Bewegung und Linien, die sich nicht mit Lineal und Cirkel construiren lassen, gehören sie eigentlich nicht in den Kreis der Elemente. Aber ihrer physikalischen Anwendungen wegen, und namentlich, weil sich ihre wesentlichen Eigenschaften einzig und allein mit Hilfe der elementaren Geometrie ableiten lassen, verdienen sie eine Stelle im Anhang des Buches und im Pensum der obersten Klasse. — Ueber die Art ihrer Behandlung sollte nach meiner Ansicht keine Uneinigkeit bestehen. Die analytische Geometrie ist, wenn man nicht in den ersten Anfängen stecken bleiben will, untrennbar von der Differentialrechnung. Vor allem aber ist sie viel zu schwerfällig, in ihrer ursprünglichen Gestalt antiquirt, und mit ihrem Hilfsapparat der Coordinaten dem an rein geometrische Betrachtungen Gewöhnten fremdartig. Ich möchte sie daher weder dem Gymnasium noch der Realschule empfehlen. Es bleibt also der rein geometrische Weg. Dieser nun wird ungemein erleichtert durch die gleichzeitige Betrachtung der Curve und eines festen Kreises, welchen ich den Leitkreis genannt habe. Die hierauf beruhende Darstellung findet sich bereits in meinem „System der Raumlehre“, Th. II, S. 27 ff., wo ich sie zur Vervollständigung des Ganzen gegeben habe, obwohl sie mit den Grassmann'schen Methoden ihrem Wesen nach nichts gemein hat.

Ich schliesse diese Erörterungen mit dem Wunsche, dass das vorliegende Buch dazu beitragen möge, die noch schwebende Frage nach einer den Bedürfnissen der Gegenwart entsprechenden Darstellung der elementaren Geometrie ihrer Entscheidung näher zu führen.

Waren im April 1879.

**V. Schlegel.**

# Inhalt des zweiten Theils.

---

## Einleitung (1—14).


Seite

1. Ableitung der geometrischen Grundgebilde (1—4) 1

a. Ableitung aus der Erfahrung mittelst des Begriffs der Grenze (1. 2) . 1

1. Der Körper. — 2. Gebilde als Grenzen am Körper.

b. Ableitung durch Ueberlegung mittelst des Begriffs der Bewegung (3. 4) 3

3. Der Punkt. — 4. Gebilde als Resultate der Bewegung des Punktes.

2. Eigenschaften der geometr. Grundgebilde (5—11) 5

5. Ausdehnung. — 6. Grösse — 7. Zusammensetzung und Theilung. — 8. Einfache und zusammengesetzte Bewegung. — 9. Gestalt. — 10. Begrenzte und unbegrenzte Bewegung. — 11. Endliche und unendliche Bewegung.

3. Die geometr. Gebiete und ihre Eigenschaften (12—14) 9

12. Eintheilung der Gebiete — 13. Merkmale der einfachen Gebiete. — 14. Eintheilung der Raumwissenschaft.


## Reine Geometrie.

### Erste Abtheilung: Geometrie der bewegten Gebilde (15—106).

#### I. Geometrie der Geraden (15—25).


Der Punkt und seine Bewegung auf der Geraden (15—25) 12

α) Einmalige Bewegung des Punktes (15. 16) . . . . 12

15. Bestimmung des Punktes. — 16. Bestimmung der Geraden.

β) Mehrmalige Bewegung des Punktes (17—25) . . . 13

Die Strecke und ihre Bewegung auf der Geraden (17—25) 13

1) Die geometrischen Operationen mit Strecken (17—20) 1[illegible]

17. Addition. — 18. Subtraction. — 19.* Multiplication. Theilung. — 20.* Messung.

2) Entgegengesetzte Richtungen einer Geraden (21—23) [illegible]

21. Entgegengesetzte Richtungen. — 22.* Positive und negative Strecken. — 23.* Erweiterung.

3) Bewegung der Strecke auf der Geraden (24. 25) .

24.* Bewegung der Strecke. — 25.* Erweiterung.

Seite

**II. Geometrie der Ebene (26—106).**

**a.** Die Gerade und ihre Bewegungen in der Ebene (26—78) 19

$\alpha$) Einmalige Bewegung der Geraden (26—35) . . . 19

26. Bestimmung der Geraden.

1) Lagenänderung der Geraden (27. 28) . . . . . 19

27. Bewegung der Geraden. — 28.* Bewegung eines auf der Geraden liegenden Punktes.

2) Richtungsänderung d. Geraden. — Der Winkel (29-35) 22

29. Drehung. — 30. Beziehungen zwischen zwei Geraden.

**Der Winkel.**

31. Vorbemerkung. — 32. Definition des Winkels. — 33. Eintheilung der Winkel nach ihrer Grösse. — 34.* Darstellung der Drehung durch Multiplication. — 35. Bewegung eines auf der Geraden liegenden Punktes.

$\beta$) Zweimalige Bewegung der Geraden (36—76) . . . 29

36. Uebersicht.

$a_1$. Der Winkel und seine Bewegung in der Ebene (37—51) 30

1) Die geometr. Operationen mit Winkeln (37—40) . 30

37. Addition. — 38. Subtraction. — 39.* Multiplication. Theilung. — 40.* Messung.

2) Entgegengesetzte Seiten einer Ebene (41—44) . 32

41. Vorbemerkung. — 42. Entgegengesetzte Drehungen. — 43.* Positive und negative Winkel. — 44.* Erweiterung.

3) Bewegung des Winkels in der Ebene (45. 46) . 35

45. Vorbemerkung. — 46.* Bewegung des Winkels.

4) Nebenwinkel und Scheitelwinkel (47—51) . . . 36

47. Vorbemerkung. — 48. Nebenwinkel. — 49. Beziehung zwischen zwei Nebenwinkeln. — 50. Scheitelwinkel. — 51. Beziehung zwischen zwei Scheitelwinkeln.

$b_1$. Zwei von einer dritten Geraden geschnittene Parallelen (52—58) . . . . . . . . . . . . 39

52. Vorbemerkung. — 53. Erklärungen. — 54. Lagenbeziehungen der Winkelpaare an Parallelen. — 55. Grössenbeziehungen der Winkelpaare an Parallelen. — 56. Specieller Fall. — 57. Erweiterung. — 58.* Der unendlich ferne Punkt einer Geraden.

$c_1$. Drei Geraden, die sich in drei Punkten schneiden. — Das Dreieck (59—76) . . . . . . . . . . 44

59. Vorbemerkungen.

1) Sinn des Dreiecks (60) . . . . . . . . . . 45

60.* Entgegengesetzte Seiten des Dreiecks.

2) Beziehungen zwischen den Winkeln eines Dreiecks (61—64) . . . . . . . . . . 46

61 Innere Winkel — 62. Aussenwinkel. — 63. Erweiterungen. — Fortsetzung.

Seite

3) Bestimmung des Dreiecks durch seine Stücke (65–68) 49

65. Vorbemerkung. — 66. Bestimmung durch 1, 2, 3 Stücke. — 67. Die einzelnen Fälle der Bestimmung eines Dreiecks durch drei Stücke. — 68.* Erweiterung.

4) Beziehungen zwischen den Winkeln und Seiten eines Dreiecks (69—76) . . . . . . . . . . 55

69. Das gleichschenklige Dreieck. — 70. Zwei gleichschenklige Dreiecke. — 71. Das ungleichseitige Dreieck. — 72. Fortsetzung. — 73. Erweiterungen. — 74. Entfernung. — 75. Zwei ungleichseitige Dreiecke. — 76.* Rückblick.

γ) Dreimalige Bewegung der Geraden (77. 78) . . . 65

77.* Uebersicht. — 78. Das Viereck.

b. Die Strecke und ihre Bewegungen in der Ebene (79—106) 67

1) Lagenänderung der Strecke. — Das Parallelogramm (79—87) . . . . . . . . . . 67

α) Einmalige Bewegung der Strecke (79. 80) . . . . 67

79. Das Parallelogramm. — 80. Eigenschaften der Diagonalen.

β) Mehrmalige Bewegung der Strecke (81—87) . . . 70

1. Die geometrischen Operationen mit Parallelogrammen (81—84) 70

81.* Addition. — 82.* Subtraction. — 83.* Multiplication. Theilung. — 84.* Messung.

2. Entgegengesetzte Seiten eines Parallelogramms (85—87) . . 74

85.* Entgegengesetzte Seiten. — 86.* Positive und negative Parallelogramme. — 87.* Erweiterungen.

2) Richtungsänderung der Strecke. — Die Kreisfläche (88—106) . . . . . . . . . . 76

88. Die Kreisfläche. — 89. Kreis und Punkt. — 90. Kreis und Gerade. α) Secanten. — 91. Peripheriewinkel. — 92. β) Tangenten. — 93.* Drehung einer Geraden um einen ausserhalb liegenden Punkt. — 94.* Drehung einer Strecke um einen ausserhalb liegenden Punkt. — 95. Construction eines Kreises aus gegebenen Bedingungen. Vorbemerkung. — 96. Sätze über den geometrischen Ort des Mittelpunktes eines Kreises. — 97. Sätze von drei Linien, die durch denselben Punkt gehen. — 98. Kreis und Figur. — 99. Dreieck. — 100. Viereck. — 101. Regelmässiges Vieleck. — 102.* Fortsetzung. — 103.* Fortsetzung. — 104. Zwei Kreislinien. — 105. Rückblick. — 106. Sätze über den geometrischen Ort des Mittelpunktes eines Kreises.

**Zweite Abtheilung.**

**Geometrie der ruhenden Gebilde (107—140).** . . 1[illegible]

107.* Vorbemerkung.

**I. Die Aehnlichkeit (108—126)** . . . . . . 1[illegible]

1) Dreiecke (108—116) . . . . . . . . . . 1[illegible]

a. Aehnlichkeit bei perspectivischer Lage (108—113) . . 1[illegible]

108. Definition ähnlicher Dreiecke. — 109. Eigenschaften ähnlicher Dreiecke. — 110. Bestimmung der Gestalt eines Dreiecks durch Winkel

Seite

und Seitenverhältnisse. — 111. Vierte Proportionale. — 112. Harmonische Punktepaare. — 113. Specieller Fall.

b. Aehnlichkeit bei verkehrt-perspectivischer Lage (114—116) 110

114. Verkehrt-perspectivische Lage. — 115. Specielle Fälle. — 116.* Erweiterung.

2) Polygone (117—122) . . . . . . . . . . . 115

117. Aehnliche Polygone. — 118. Eigenschaften ähnlicher Polygone. — 119. Erweiterung. — 120.* Bestimmung der Gestalt eines Polygons durch Winkel und Seitenverhältnisse. — 121.* Homologe Punkte und Geraden. — 122.* Erweiterung.

3) Kreise (123—126) . . . . . . . . . . . . 120

123. Zwei Kreise. — 124. Eine gemeinsame Secante. — 125.* Zwei gemeinsame Secanten. — 126.* Drei Kreise.

II. Die Collineation (127—140) . . . . . 124

1) Das vollständige Viereck (127—134) . . . . . 124

127.* Vorbemerkung. — 128.* Das Doppelverhältniss. — 129.* Das Tripelverhältniss. — 130.* Das Quadrupelverhältniss. — 131.* Collineare Punktreihen. — 132.* Collineare Strahlenbüschel. — 133.* Involutorische Punktreihen. — 134.* Involutorische Strahlenbüschel.

2) Das Brianchon'sche Sechseck und das Pascal'sche Sechsseit (135. 136) . . . . . . . . 135

135.* Vorbemerkung. — 136.* Eigenschaften beider Figuren.

3) Die Kreislinie. — Pol und Polare (137—139). . 137

137.* Eine Kreislinie. — 138.* Mehrere Kreislinien. — 139.* Aehnlichkeitspolaren.

4) Die Projection als specieller Fall d. Collineation (140) 142

140.* Die Projection.

## Rechnende Geometrie.

141. Vorbemerkung.

1) Der Flächenraum als Streckenproduct (142—147) 144

142. Masseinheit. — 143. Das Rechteck. — 144. Das Parallelogramm. — 145. Das Dreieck. — 146. Das Trapez. — 147. Polygone.

2) Vergleichung der Flächenräume mehrerer Figuren (148. 149) . . . . . . . . . . . 147

148. Quotient von Flächenräumen. — 149. Summe von Flächenräumen.

3) Construction der Wurzeln einer Gleichung (150—153) 151

150. Vorbemerkung. — 151. Die Gleichung vom ersten Grade. — 152. Die rein quadratische Gleichung. — 153. Die gemischt quadratische Gleichung.

4) Das regelmässige Polygon und der Kreis (154—164) 154

a. Allgemeine Polygone (154. 155) . . . . . 154

154. Das einbeschriebene $n$-Eck und $2n$-Eck. — 155. Das einbeschriebene und umbeschriebene $n$-Eck.

Seite

b. Specielle Polygone (156—161) . . . . . . 155

156. Das Sechseck. — 157. Das Viereck. — 158. Das Zehneck. — 159. Theilung einer Strecke nach dem goldnen Schnitt. — 160. Das Fünfzehneck. — 161. Abgeleitete Polygone.

c. Der Kreis (162—164) . . . . . . . . . 157

162. Die Zahl $\pi$. — 163. Umfang des Kreises. — 164. Flächenraum des Kreises.

## Anhang: Die Curven zweiter Ordnung.

165. Vorbemerkung. — 166. Allgemeines Bewegungsgesetz der Curven zweiter Ordnung.

1) Bewegungsgesetz $r_1 + r_2 = r$. — Die Ellipse (167–171) 162

167. Entstehung der Ellipse. — 168. Secanten. — 169. Eine Tangente. — 170. Zwei Tangenten. — 171. Specielle Fälle der Ellipse.

2) Bewegungsgesetz $r_1 - r_2 = r$. — Die Hyperbel (172–176) 170

172. Entstehung der Hyperbel. — 173. Secanten. — 174. Eine Tangente. — 175. Zwei Tangenten. — 176. Specielle Fälle der Hyperbel.

3) Bewegungsgesetz $r_1 \pm r_2 = \infty$. — Die Parabel (177–180) 180

177. Entstehung der Parabel. — 178. Eine Tangente. — 179. Zwei Tangenten. — 180. Krümmung und Krümmungskreis.

---

Uebungssätze und Aufgaben . . . . . . . . . 186

Register . . . . . . . . . . . . . . . . . 219

Berichtigungen . . . . . . . . . . . . . . 222

---

## Uebersicht der Fundamental-Aufgaben.

1. Antragung eines Winkels an eine Gerade . . . . . . . . . . 54
2. Halbirung einer Strecke . . . . . . . . . . . . . . . . . 57
3. Halbirung eines Winkels . . . . . . . . . . . . . . . . . 58
4. Construction der Senkrechten in einem Punkte einer Geraden . . 58
5. Construction der Senkrechten aus einem Punkte auf die Gerade . . 58
6. Construction der Parallelen zu einer Geraden durch einen Punkt . 68
7. Verwandlung eines $n$-Ecks in ein $(n-1)$-Eck . . . . . . . . 71
8. Verwandlung eines Parallelogramms in ein Rechteck . . . . . 72
9. Verwandlung eines Dreiecks in ein Parallelogramm . . . . . . 72
10. Construction der vierten Proportionale zu drei Strecken . . . . 106
11. Theilung einer Strecke nach gegebenem Verhältniss . . . . . . 107
12. Construction harmonischer Punktepaare . . . . . . . . . . . 107
13. Construction der mittleren Proportionale zu zwei Strecken . . . 115
14. Theilung einer Strecke nach dem goldnen Schnitt . . . . . . . 156

# Einleitung.

## 1. Ableitung der geometrischen Grundgebilde.

### a. Ableitung aus der Erfahrung mittelst des Begriffs der Grenze.

**1.** *Der Körper.* — Durch die Sinne des Gesichts und Gefühls gelangen wir zu der Vorstellung von Gegenständen, die erstens ausser uns für sich existiren und zweitens ihre Stellung zu einander und zu uns selbst ändern können. Alle diese Gegenstände können wir ohne Unterschied Körper nennen. (Beispiele.)

Das Gebiet, innerhalb dessen ein Körper existirt und seine Stellung zu einem andern verändern kann, nennen wir den Raum. Jeder Körper nimmt einen Theil des Raumes so vollständig ein, dass innerhalb dieses Raumtheiles kein zweiter Körper existiren kann. (Scheinbar widersprechendes Beispiel eines hohlen Körpers.)

Sehen wir von allen anderen Eigenschaften ab, durch welche sich ein Körper von einem anderen unterscheiden kann (z. B. Grösse, Gestalt, Stoff, Farbe, Gewicht, Temperatur), so bleibt die Ausfüllung eines bestimmten Raumtheiles als gemeinsame Eigenschaft aller Körper übrig, und wir können sagen, ein Körper sei ein Theil des Raumes.

Anm. Hiernach ist auch z. B. der Raum eines Zimmers, der Raum innerhalb eines Kastens ein Körper.

**2.** *Gebilde als Grenzen am Körper.* — Von dem umgebend Raume wird der Körper getrennt durch eine Fläche
(ne Oberfläche), welche den Körper vollständig begrenzt
u . gewöhnlich aus mehreren gleichartigen Theilen besteht,
w :che Figuren heissen. — Demnach ist schliesslich der 1.
K :rper ein vollständig begrenzter Theil des Rau-
n ·, und die Fläche ist die Grenze des Körpers. —

Umgekehrt: Jedes durch Figuren vollständig begrenzte Gebilde ist ein Körper.

Anm. Die vollständige Begrenzung gegen den umgebenden Raum ist ein wesentliches Merkmal des Körpers. So ist z. B. der Raum innerhalb eines geschlossenen Kastens ein Körper, nicht aber der Raum innerhalb eines offenen, weil in diesem Falle ein Theil der Fläche zur vollständigen Begrenzung fehlt. — In wieviel Figuren zerfällt die Fläche eines Würfels, eines Zimmers, der Wandtafel, einer Halbkugel, einer Kugel? — Will man die Zugehörigkeit der Figuren zum Körper hervorheben, so nennt man sie Seiten des Körpers.

Von der umgebenden Fläche wird jede einzelne Figur getrennt durch eine Linie (ihren Umfang), welche die Figur vollständig begrenzt, und gewöhnlich aus mehreren gleichartigen Theilen besteht, welche Strecken heissen. — Demnach ist
2. die Figur ein vollständig begrenzter Theil der Fläche, und die Linie ist die Grenze der Figur. — Umgekehrt: Jedes durch Strecken vollständig begrenzte Gebilde ist eine Figur.

Anm. Wieviele Strecken dienen zur Begrenzung jeder Figur am Würfel, im Zimmer? Wieviele Strecken kommen überhaupt an jedem dieser Körper vor? In wieviel Strecken zerfällt der Umfang eines Halbkreises, eines Kreises? — Will man die Zugehörigkeit der Strecken zum Körper hervorheben, so nennt man sie Kanten des Körpers; hebt man aber ihre Zugehörigkeit zur Figur hervor, so nennt man sie Seiten der Figur.

Von den benachbarten Strecken wird jede einzelne Strecke getrennt durch zwei Punkte, welche die Strecke vollständig
3. begrenzen. — Demnach ist die Strecke ein vollständig begrenzter Theil der Linie, und der Punkt ist eine Grenze der Strecke. — Umgekehrt: Jedes durch Punkte vollständig begrenzte Gebilde ist eine Strecke.

Anm. Wieviele Punkte kommen an jeder Fläche des Würfels, des Zimmers, sowie überhaupt an jedem dieser Körper vor? — Wann reicht ein einziger Punkt zur vollständigen Begrenzung einer Strecke aus? (Kreislinie.) — Jenachdem man die Zugehörigkeit eines Punktes zu einem Körper, einer Figur oder einer Strecke hervorheben will, nennt man ihn Ecke des Körpers, Eckpunkt (Ecke) der Figur, Endpunkt der Strecke.

Bezeichnet man die gegenüberliegenden Seitenpaare eines Würfe mit den Zahlen 1, 6; 2, 5; 3, 4, jede Kante durch die zwei und jede Ec durch die drei Ziffern der in ihr zusammenstossenden Seiten: wie heiss dann die Kanten- und Ecken, und welches sind die in einer gegebene Ecke (Kante) zusammenstossenden Flächen und Kanten (Flächen)?

Wir erhalten also mittelst des Begriffs der Grenze, a den Raum anknüpfend, folgende erste Reihe von Erklärunge für die geometrischen Grundgebilde:

1. Der **Körper** ist ein vollständig begrenzter Theil des Raumes.
2. Die **Fläche** ist die Grenze des Körpers.
3. Die **Figur** ist ein vollständig begrenzter Theil der Fläche.
4. Die **Linie** ist die Grenze der Fläche.
5. Die **Strecke** ist ein vollständig begrenzter Theil der Linie.
6. Der **Punkt** ist die Grenze der Linie.

Aus den obigen Erklärungen folgt, dass Punkte, Linien (Strecken) und Flächen (Figuren) nicht für sich ausser uns existiren, sondern nur an Körpern. Wir können aber in unserer Vorstellung diese Gebilde von den Körpern loslösen und diese gedachten Punkte, Linien und Flächen für sich allein betrachten.

Anm. So sprechen wir auch im gewöhnlichen Leben von Punkten auf der Erdoberfläche, am Horizont, von Linien (Strassen), welche zwei solcher Punkte (Orte) verbinden, von Flächen (Grundstücken), indem wir durchaus nicht an die Verbindung dieser Gebilde mit der Erdkugel denken. Begrenzte Flächen auf der Erdoberfläche werden ebenso gekauft und verkauft, wie körperliche Gegenstände; ebenso haben Strassen, für deren Benutzung eine Abgabe erhoben wird (Eisenbahnlinien, Chausseen), verschiedenen Werth, je nach ihrer Länge; selbst Punkte der Erdoberfläche haben verschiedenen Werth, je nach ihrer Lage.

**b. Ableitung durch Ueberlegung mittelst des Begriffs der Bewegung.**

**3.** *Der Punkt.* — Die Aenderung, durch welche ein Körper in eine neue Stellung zu einem anderen Körper übergeht, nennen wir **Bewegung**. Wenn ein Körper sich bewegt, so bewegen sich die an ihm befindlichen Grenzgebilde, Flächen, Linien und Punkte mit ihm. Wir können daher auch die Bewegung dieser einzelnen Gebilde betrachten. Der Inbegriff der von einem Gebilde bei seiner Bewegung durchlaufenen Zustände heisst sein **Weg**.

Denken wir uns die Grösse eines Körpers ins Unendliche
nehmend, so verschwinden allmälig auch alle seine übrigen
genschaften. Nur der Ort, welchen er im Raume einnimmt,
ibt ihm erhalten. Er schrumpft alsdann zu einem Punkte
sammen. Dem Raume gegenüber ist also der Punkt nichts
iter als ein Ort, und wir können sagen: **Der Punkt ist** 4.
**ı Ort im Raume.**

Anm. Schon im gewöhnlichen Sprachgebrauche nennen wir Dinge
r Art Punkte, entweder, wenn wir sie in so grosser Entfernung sehen,

dass ihre Grösse verschwindend klein erscheint (Punkt am Horizonte), oder, sobald es sich um keine ihrer sonstigen Eigenschaften handelt, sondern nur um den Ort, welchen sie im Raume, auf einer Fläche, oder Linie einnehmen. In diesem Sinne werden z. B. Städte auf einer Landkarte, die Sterne am Himmel, Menschen, die wir aus grösserer horizontaler oder verticaler Entfernung erblicken, ja selbst Landflächen, sobald nur ihre Oertlichkeit hervorgehoben wird, als Punkte aufgefasst und bezeichnet. — Dieselbe Abstraction aber, welche uns von dem als Einheit aufgefassten Dinge zum Begriff der Zahl Eins führt, leitet uns auch von dem als Punkt aufgefassten Dinge zum Begriff des Punktes selbst.

**4.** *Gebilde als Resultate der Bewegung des Punktes.* — Bewegt sich ein Punkt ein Stück vorwärts, so ist die Reihe seiner Zustände durch den Anfangspunkt und den Endpunkt der Bewegung vollständig begrenzt, also nach 3*) eine begrenzte
5. Linie oder Strecke; d. h.: Der Weg eines Punktes ist eine (begrenzte) Linie.

Anm. So ist der Weg eines als Punkt aufgefassten Fussgängers der als Linie betrachtete Fusspfad, der Weg der Bleistift- oder Federspitze auf Papier, der der Kreide auf der Tafel ein Strich. Andere Beispiele: Sternschnuppe; Flintenkugel, in einen Balken eindringend; Spitze der Nadel, einen weichen Gegenstand durchbohrend, u. s. w.

Bewegt sich eine Strecke ein Stück vorwärts, so ist die Reihe ihrer Zustände durch die Anfangsstrecke und die Endstrecke der Bewegung, sowie durch die von ihren Begrenzungspunkten beschriebenen Strecken vollständig begrenzt, also nach
6. 2 eine begrenzte Fläche oder Figur; d. h.: Der Weg einer Strecke ist eine (begrenzte) Fläche.

Anm. So ist der Weg einer sich vorwärts bewegenden Truppenlinie eine Fläche, der Weg der Messerschneide beim Durchschneiden eines Körpers die Schnittfläche, u. s. w.

Bewegt sich eine Figur ein Stück vorwärts, so ist die Reihe ihrer Zustände durch die Anfangsfigur und die Endfigur, sowie durch die von ihren Begrenzungsstrecken beschriebenen Figuren vollständig begrenzt, also nach 1 ein Körper oder be-
7. grenzter Raum; d. h.: Der Weg einer Figur ist ein (begrenzter) Raum.

Anm. So ist der Weg, den die vordere Fläche eines Hammers beim Schlag auf einen weichen Gegenstand beschreibt, ein vollständig begrenzter Raum, nämlich die hervorgebrachte Vertiefung. Der Weg, den die Oberfläche einer in einer Röhre sinkenden oder steigenden Flüssigkeit zurücklegt, ist der innere Raum der Röhre selbst.

Wir haben hiernach mittelst des Begriffs der Bewegung,

---

*) Die einfachen Zahlen beziehen sich im ganzen Buche auf die am Rande stehenden Nummern der Sätze. Die Nummern der Abschnitte sind durch Nr. bezeichnet.

vom Punkte ausgehend, folgende zweite Reihe von Erklärungen für die geometrischen Grundgebilde erhalten:

1. Der Weg eines Punktes ist eine (begrenzte) Linie (Strecke).
2. Der Weg einer Strecke ist eine (begrenzte) Fläche (Figur).
3. Der Weg einer Figur ist ein (begrenzter) Raum (Körper).

Raum und Punkt sind verbunden durch die Erklärung: Der Punkt ist ein Ort im Raume.

## 2. Eigenschaften der geometrischen Grundgebilde.

### a. Ausdehnung.

**5.** Die Bewegung, durch welche ein Gebilde entstanden ist, haftet an ihm als eine Eigenschaft, die man Ausdehnung (Dimension) nennt.

Hiernach hat der Punkt, welcher nicht durch Bewegung entstanden ist, auch keine Ausdehnung; die Strecke hat eine Ausdehnung; die Figur, zu deren Entstehung zwei Bewegungen, die des Punktes und die der Strecke nöthig waren, zwei Ausdehnungen; der Körper aus ähnlichem Grunde drei Ausdehnungen.

Die Ausdehnung der Strecke heisst Länge; die beiden Ausdehnungen der Figur: Länge und Breite; die drei Ausdehnungen des Körpers: Länge, Breite und Dicke.

Anm. Bei manchen Körpern heisst die dritte Dimension Höhe, bei anderen Tiefe. Beispiele! (Würfel, Zimmer, Grube). Wie heisst in besonderen Fällen die Ausdehnung eines Körpers nach rechts und links, nach vorn und hinten, nach oben und unten?

### b. Grösse.

**6.** Durch die längere oder kürzere Dauer der Bewegung eines Gebildes erlangt sowohl die durch diese Bewegung entstehende Ausdehnung, wie das neu entstehende Gebilde selbst die Eigenschaft einer bestimmten Grösse.

Der Punkt hat hiernach keine Grösse. — Die Grösse der Strecke fällt zusammen mit derjenigen ihrer Länge, so dass für die Strecke die Ausdrücke „Grösse" und „Länge" dasselbe bedeuten. — Die Grösse der Figur richtet sich nach derjenigen ihrer Länge und Breite, die des Körpers nach derjenigen seiner Länge, Breite und Dicke.

Gebilde von gleicher Grösse heissen gleich (=).

Anm. Da nur Körper, nicht aber Punkte, Strecken und Figuren für sich existiren, so kann man solche Körper, bei denen eine oder mehrere Dimensionen im Vergleich mit den anderen sehr geringe Grösse haben,

als Bilder von wirklichen Flächen, Linien und Punkten ansehen, und dadurch der Anschauung zu Hilfe kommen. So sind Bilder von begrenzten Flächen: Ein Blatt Papier, eine Eierschale, der schwarze Ueberzug der Wandtafel; von begrenzten Linien: Ein Faden, ein Haar, der durch Bleistift, Feder oder Kreide hervorgebrachte Strich; von Punkten: Ein Sandkorn, der mit Bleistift, Feder oder Kreide hervorgebrachte Punkt. — Wie kann man zeigen, dass alle diese Dinge in Wahrheit Körper sind?

### c. Zusammensetzung und Theilung.

7. Haben zwei Strecken einen gemeinsamen Grenzpunkt, so kann man dieselben als eine einzige Strecke betrachten (Beispiele!) — Umgekehrt kann man den auf der Strecke sich bewegenden Grenzpunkt in jeder seiner Stellungen festhalten und als gemeinsamen Grenzpunkt zweier Strecken betrachten. Man kann also auf einer Strecke beliebig Punkte setzen, und jeder dieser Punkte theilt die Strecke in zwei Theile.

Anm. Bei Fortsetzung dieses Theilungsverfahrens durch Setzen neuer Punkte nimmt die Länge der Theile der Strecke allmälig ab und nähert sich schliesslich der Grenze Null. Da aber durch die Theilung die Grösse einer Strecke zwar beständig vermindert, aber nicht gänzlich aufgehoben werden kann, so kann man auch eine Strecke nicht in Punkte theilen, und ebensowenig durch Nebeneinanderlegen von Punkten eine Strecke zusammensetzen, da von den Punkten, welche selbst keine Länge haben, auch keiner zur Bildung der Länge der Strecke etwas beitragen kann. — Der Punkt selbst kann, da er keine Grösse hat, auch nicht getheilt werden.

Haben zwei Figuren eine gemeinsame Grenzstrecke, so kann man dieselben als eine einzige Figur betrachten (Beispiele!). — Umgekehrt kann man die auf der Figur sich bewegende Grenzstrecke in jeder ihrer Stellungen festhalten und als gemeinsame Grenzstrecke zweier Figuren betrachten. Man kann also in einer Figur beliebige Linien ziehen, und jede derselben theilt, gehörig verlängert, die Figur in zwei Theile.

Anm. Theilung der Figur durch Fortsetzung dieses Verfahrens in Stücke von immer geringerer Breite. Man kann eine Figur nicht in Strecken theilen, und nicht durch Nebeneinanderlegen von Strecken eine Figur zusammensetzen. Warum?

Haben zwei Körper eine gemeinsame Grenzfigur, so kann man dieselben als einen einzigen Körper betrachten (Beispiele!). — Umgekehrt kann man die in dem begrenzten Raum sich bewegende Grenzfigur in jeder ihrer Stellungen festhalten und als gemeinsame Grenzfigur zweier Körper betrachten. Man kann also durch einen begrenzten Raum beliebige Flächen legen und jede derselben theilt, gehörig erweitert, den Körper in zwei Theile.

Anm. Theilung des Körpers durch Fortsetzung dieses Verfahrens in Stücke von immer geringerer Dicke. Man kann einen Körper nicht

Flächenstücke theilen, und nicht durch Aufeinanderlegen von Flächentheilen einen Körper zusammensetzen.

### d. Einfache und zusammengesetzte Bewegung.

**8.** Ein Punkt hat im Anfange seiner Ortsänderung die Auswahl unter einer unbeschränkten Menge von Bewegungen; das Unterscheidende dieser Bewegungen heisst ihre Richtung.

Behält der Punkt die zuerst gewählte Richtung bei, so heisst seine Bewegung einfach, und die von ihm beschriebene Strecke gerade. — Das besondere Merkmal einer einfachen Bewegung eines Punktes ist also ihre Richtung.

Bewegt eine gerade Strecke sich so, dass jeder ihrer Punkte eine einfache Bewegung ausführt, d. h. eine gerade Strecke beschreibt, so ist die ganze Bewegung der Strecke eine einfache, und die entstehende Figur heisst eben.

Anm. In ähnlicher Weise würde man durch einfache Bewegung ebener Figuren zu einer besonderen Art von Körpern gelangen, die man „räumliche Körper“ nennen könnte. Nun kennen wir jedoch zwar verschiedene Arten von Linien und Flächen, also dem entsprechend verschiedene Arten von Strecken und Figuren; aber wir kennen nur einen einzigen Raum, den einfachen Weltraum, demnach auch nur eine einzige Art von Körpern.

Aendert ein sich bewegender Punkt in jedem Augenblicke seine Richtung, so heisst seine Bewegung zusammengesetzt, und die von ihm beschriebene Strecke krumm (Beispiel: Die Kreislinie). — Das besondere Merkmal einer zusammengesetzten Bewegung eines Punktes ist ein Gesetz, nach welchem die Aenderung der Richtung in jedem Augenblicke erfolgt.

Alle nicht ebenen Flächen und Figuren heissen ebenfalls krumm (Beispiel: Die Kugelfläche).

Durch einfache Bewegung kann ein Gebilde nur auf 8.
einem Wege von der Stelle, die es einnimmt, in eine bestimmte neue Stellung gelangen, durch zusammengesetzte Bewegung dagegen auf viele Arten.

### e. Gestalt.

**9.** Durch das besondere Gesetz der Bewegung eines Ge-…ldes erlangt das entstehende Gebilde die Eigenschaft einer …timmten Gestalt.

Hiernach hat der Punkt keine Gestalt, alle geraden Linien, auch alle ebenen Flächen haben gleiche Gestalt; ebenso … Linien und alle Flächen, welche durch dasselbe Bewegungs-…etz entstanden sind.

Anm. Für verschiedene Figuren auf derselben Fläche bildet die …alt der ihren Umfang bildenden Linie ein weiteres Unterscheidungs-

merkmal der Gestalt; ebenso für die Körper die Gestalt der sie begrenzenden Oberfläche.

Gebilde von gleicher Gestalt heissen **ähnlich** (∼), von gleicher Gestalt und Grösse: **congruent** (≅).

### f. Begrenzte und unbegrenzte Bewegung.

**10.** Jede Bewegung eines Gebildes kann nicht nur **begrenzt** (wie bisher angenommen wurde), sondern auch **unbegrenzt** gedacht werden.

Soll ein Gebilde sich unbegrenzt bewegen, so muss seine Bewegung nicht nur ohne Ende, sondern auch ohne Anfang gedacht werden; sonst würde das Anfangsgebilde eine Grenze der Bewegung bilden.

Anm. Als Beispiel einer solchen Bewegung kann man sich die Bewegung der Erde um die Sonne vorstellen.

Betrachten wir nur **einfache** unbegrenzte Bewegungen, so gelangen wir zu folgenden Resultaten und Erklärungen:

1. Durch unbegrenzte Bewegung eines **Punktes** entsteht eine unbegrenzte gerade Linie, welche einfach eine **Gerade** genannt wird.

2. Durch unbegrenzte Bewegung einer **Geraden** entsteht eine unbegrenzte ebene Fläche, welche einfach eine **Ebene** genannt wird.

3. Durch unbegrenzte Bewegung einer **Ebene** entsteht ein unbegrenzter Raum, welcher einfach **der Raum** genannt wird.

Anm. Ausser der Geraden und der Ebene giebt es noch andere unbegrenzte Linien und Flächen, die durch zusammengesetzte Bewegung entstehen.

Da die Anzahl der Ausdehnungen eines Gebildes nicht von der Dauer, sondern nur von der Anzahl der einzelnen Bewegungen abhängt, durch die es entstanden, so hat die unbegrenzte Linie mit der begrenzten, die unbegrenzte Fläche mit der begrenzten, der unbegrenzte Raum mit dem begrenzten gleichviele Ausdehnungen. Wir können also die Gebilde nach Begrenzung und Anzahl ihrer Dimensionen in folgender Weise übersichtlich zusammenstellen, wobei die Gerade als specieller Fall unter der Linie, die Ebene als specieller Fall unter der Fläche begriffen ist.

| | | Begrenzt | Unbegrenzt |
|---|---|---|---|
| Anzahl der Dimensionen | 0 | Punkt | |
| | 1 | Strecke | Linie |
| | 2 | Figur | Fläche |
| | 3 | Körper | Raum. |

### g. Endliche und unendliche Bewegung.

**11.** Die Vorwärtsbewegung eines Punktes auf einer Strecke ist beendet, sobald er den Endpunkt der Strecke erreicht hat. Ebenso kann eine Strecke innerhalb einer Figur, und eine Figur in einem begrenzten Raume ihre Bewegung nicht beliebig fortsetzen. Innerhalb eines begrenzten Gebildes ist also nur eine Vorwärtsbewegung von endlicher Dauer möglich.

Dagegen kann ein Punkt auf einer unbegrenzten Linie sich ohne Aufhören vorwärts bewegen, ebenso eine Linie auf einer unbegrenzten Fläche, und eine Fläche im unbegrenzten Raume. Innerhalb eines unbegrenzten Gebildes ist also eine Vorwärtsbewegung von unendlicher Dauer möglich.

Eine unbegrenzte Linie hat endliche oder unendliche Grösse, (ist endlich oder unendlich) je nachdem der sie erzeugende Punkt bei endloser Vorwärtsbewegung wieder an einen früher eingenommenen Ort zurückkehrt oder nicht.

Anm. Jede in sich selbst zurückkehrende Linie, z. B. die Kreislinie, ist endlich, jede andere, z. B. die Gerade, unendlich. — Es giebt also 1) begrenzte, 2) unbegrenzte endliche, 3) unbegrenzte unendliche Linien. — Die begrenzten Linien sind selbstverständlich immer endlich.

Eine unbegrenzte Fläche hat endliche Grösse, wenn die sie erzeugende Linie selbst endliche Grösse hat und bei Fortsetzung ihrer Bewegung wieder in die frühere Lage zurückkehrt; andernfalls hat die Fläche unendliche Grösse.

Anm. Beispiel einer begrenzten Fläche: jede Figur; einer unbegrenzten endlichen: die Kugelfläche; einer unbegrenzten unendlichen: die Ebene

Was den Raum betrifft, so kennen wir nur den durch unendliche Bewegung der Ebene entstehenden unendlichen Raum, weil sich unsere Vorstellung aus dem reellen Abbilde dieses Raumes, dem Weltraume, nicht entfernen kann.

## 3. Die geometrischen Gebiete und ihre Eigenschaften.

**12.** *Eintheilung der Gebiete.* — Jedes unbegrenzte Gebilde kann als ein Gebiet betrachtet werden, in welchem begrenzte Gebilde von gleicher und geringerer, sowie unbegrenzte Gebilde on geringerer Anzahl der Dimensionen enthalten sein können.

Anm. So können auf einer Linie beliebige Punkte und Strecken genommen werden, auf einer Fläche: Punkte, Linien, Strecken und guren, im Raume: Punkte, Linien, Strecken, Flächen, Figuren und orper.

Ein Gebiet kann einfach genannt werden, wenn es durch uter einfache Bewegungen entstanden ist. Die einfachen

Gebiete (zu denen man auch den Punkt rechnen kann) sind hiernach: 1) die Gerade, 2) die Ebene, 3) der Raum.

Ein Gebiet kann frei genannt werden, wenn es sich beliebig in sich selber bewegen kann, d. h. so, dass es bei der Bewegung nirgends aus sich selbst herauskommt. — Dazu ist erforderlich, dass die Bewegungen, durch welche das Gebiet entstand, solche waren, die sich stets gleich blieben. Dies leistet aber unter allen Bewegungen nur die einfache, und von den zusammengesetzten diejenige, welche eben durch das Gesetz bestimmt ist, dass sie sich stets gleich bleiben soll. Hiernach sind freie einfache Gebiete 1) die Gerade, 2) die Ebene, 3) der Raum. Von den nicht einfachen Gebieten sind es nur 1) die Kreislinie, 2) die Schraubenlinie, 3) die Kugelfläche.

Anm. Zur Erläuterung können folgende Beispiele dienen: Wird ein Blatt Papier durch einen kreisförmigen oder geradlinigen Schnitt in zwei Theile getheilt, so kann man jeden Theil beliebig an dem andern entlang schieben, sodass die Ränder zusammenfallen. Dies entspricht der Beweglichkeit der Geraden und der Kreislinie in sich selbst, und ist bei keinem anderen Schnitt möglich. — Eine ebene Tafel kann auf einer anderen, und eine Kugel in einer gleich grossen Hohlkugel beliebig so bewegt werden, dass alle Punkte der einen Oberfläche die der anderen berühren. Unter allen Flächen haben nur die Ebene und die Kugelfläche diese Eigenschaft der Beweglichkeit in sich selbst. (Anwendungen: Prüfung des Lineals, die kreisförmige Scheibe im Roulette-Spiel, die Schraube, Kugelgelenke im Körper der Wirbelthiere und an Instrumenten.) Auf allen anderen Linien können keine, auf anderen Flächen (z. B. der Kegel- und Cylinderfläche) höchstens besondere Arten der Bewegung des Gebildes in sich stattfinden. Die Freiheit des Raumes wird gewöhnlich durch den Satz ausgedrückt, dass der Raum überall gleich beschaffen sei.

Aus der Eigenschaft der Freiheit folgt noch, dass auch alle in einem solchen Gebiete enthaltenen Gebilde sich frei darin bewegen können, ohne ihre Gestalt zu ändern.

Statt ein Gebilde durch Bewegung an einen anderen Ort zu versetzen, kann man auch annehmen, es sei an diesem Orte ein mit dem ersten an Gestalt und Grösse vollständig übereinstimmendes (congruentes) Gebilde hergestellt (construirt). — Man kann daher sagen, dass in einem freien Gebiete überall beliebig Gebilde construirt werden können die unter sich congruent sind.

Ein Gebilde, welches sich in einem freien Gebiete beliebig bewegt, hat in Bezug auf dieses Gebiet stets dieselbe Lage; d. h. die Beziehungen des Gebildes zu dem Gebiete, in welchem es sich bewegt, ändern sich nicht durch die Bewegung.

Wenn in einem freien einfachen Gebiete zwei Gebilde

gleichgrosse und gleichgerichtete Bewegungen ausführen, so bleibt die Beziehung ihrer Lagen ungeändert.

**13.** Hiernach sind die wesentlichen Merkmale der einfachen geometrischen Gebiete folgende:

a) Der Punkt ist ein Ort im Raume, ohne Ausdehnung. 9.

b) Die Gerade ist 1. einmal ausgedehnt, 2. einfach, 10.
3. unbegrenzt, [4. unendlich (folgt aus 2. und 3.), 5. in sich beweglich (folgt aus 2.)].

c) Die Ebene ist 1. zweimal ausgedehnt, 2. einfach, 11.
3. unbegrenzt, [4. unendlich, 5. in sich beweglich (aus gleichen Gründen wie in b)].

d) Der Raum ist 1. dreimal ausgedehnt, 2. einfach, 3. un- 12.
begrenzt, [4. unendlich, 5. in sich beweglich (wie oben)].

Anm Insofern man die hier angegebenen Merkmale des Raumbegriffes auf den Weltraum überträgt, sind dieselben Axiome, deren wirkliche Geltung im Weltraum nicht bewiesen, sondern nur aus der Erfahrung geschöpft werden kann.

**14.** *Eintheilung der Raumwissenschaft.* — Die Lehre von den Gebilden, welche in den Gebieten der Geraden und der Ebene vorkommen, heisst Geometrie (speciell Longimetrie für die Gerade, Planimetrie für die Ebene), die Lehre von den Gebilden im Raume: Stereometrie.

Anm. Die Gebilde auf der Kreislinie stimmen in ihren Eigenschaften mit Gebilden der Ebene (Winkel), die Gebilde auf der Kugelfläche mit solchen des Raumes (Ecken) überein, und brauchen daher nicht für sich allein betrachtet zu werden.

Wir unterscheiden reine Geometrie und Stereometrie, in der die Gebilde an sich betrachtet, und rechnende Geometrie und Stereometrie, in der sie durch Zahlen dargestellt werden. Die rechnende Wissenschaft ist eine Anwendung der Arithmetik auf die reine Wissenschaft. — Derjenige Theil der rechnenden Geometrie, in welchem ausser den Grundgebilden noch die (später zu erklärenden) Winkel durch Zahlen dargestellt werden, heisst ebene Trigonometrie, und ein entsprechender Theil der Stereometrie: sphärische Trigonometrie.

Insofern es sich in der Trigonometrie um Funktionen von inkeln handelt, ist dieselbe eine Anwendung der Funktionsıre auf die Raumwissenschaft.

Uebersicht über die Zweige der Raumwissenschaft:

| Geometrie. | Stereometrie. |
|---|---|
| 1. Reine Geometrie. | 1. Reine Stereometrie. |
| 2. Rechnende Geometrie. | 2. Rechnende Stereometrie. |
| 3. Ebene Trigonometrie. | 3. Sphärische Trigonometrie. |

# Reine Geometrie.

## Erste Abtheilung: Geometrie der bewegten Gebilde.

## I. Geometrie der Geraden.

### Der Punkt und seine Bewegung auf der Geraden.

$\alpha$) Einmalige Bewegung des Punktes.

**15.** *Bestimmung des Punktes.* — Ein Punkt hat nur das Merkmal der Lage. Ein Punkt, der sich bewegt, kann hiernach nur seine Lage ändern. Zwei verschiedene feste Punkte unterscheiden sich nur durch ihre Lage. (Zwei Punkte mit derselben Lage fallen zusammen.)

Ein Punkt wird durch einen grossen lateinischen Buchstaben bezeichnet.

Die verschiedenen Zustände eines bewegten Punktes können
13. selbst als feste Punkte betrachtet werden, d. h.: Ein bestimmter bewegter Punkt ist gleichbedeutend mit einer Reihe beliebiger fester Punkte.

**16.** *Bestimmung der Geraden.* — Beschreibt ein Punkt $A$ eine Gerade, so ist die Gerade bestimmt erstens durch die Lage des bewegten Punktes, zweitens durch die Richtung seiner Bewegung. Die Merkmale einer Geraden sind also Lage und Richtung. (Zwei Geraden mit derselben Lage und Richtung fallen zusammen.)

Durch die Richtung, welche ein Punkt $A$ im Anfang seiner einfachen Bewegung einschlägt, sind alle Punkte, die er künftig durchlaufen wird, von vornherein mitbestimmt. Umgekehrt reicht jeder einzelne dieser Punkte ($B$) im Verein mit $A$ dazu aus, diese Richtung zu bestimmen (8). Da jeder Punkt einer Geraden als erzeugender Punkt angesehen werden kann, so ist hiernach durch einen beliebigen Punkt auf einer Geraden ihre Lage, durch zwei beliebige Punkte der Geraden ihre Lage und Richtung, d. h. die Gerade selbst, vollkommen bestimmt. Anders ausgedrückt:

14. Durch zwei Punkte kann man nur *eine* Gerade ziehen.

Anm. Construction der Geraden, welche durch 2 gegebene Punkte gehen soll, mittelst des Lineals. (Zur Herstellung des Lineals ist bereits das Vorhandensein einer Geraden nöthig.) Andere Construction mittelst eines gespannten Fadens. (Wie unterscheidet sich diese Construction wesentlich von der vorigen? Wo wird sie angewendet?) Die zwischen zwei Punkten gezogene (sie verbindende) Strecke heisst die Verbindungslinie der Punkte.

Eine Gerade wird durch zwei an beliebige ihrer Punkte gesetzte grosse, oder durch einen kleinen lateinischen Buchstaben bezeichnet. Ebenso eine Strecke, bei welcher man jedoch die Endpunkte zur Bezeichnung wählt.

Aus 14 folgt: Bewegt eine Gerade sich so, dass sie beständig durch zwei feste Punkte geht, so bewegt sie sich in sich selbst.

Anm. Prüfung der Richtigkeit des Lineals durch Verschiebung an einer Geraden.

Eine Gerade und ein Punkt haben dieselbe Lage, wenn der Punkt auf der Geraden liegt (anders ausgedrückt: wenn die Gerade durch den Punkt geht); sonst verschiedene Lage.

Die Grösse der Bewegung eines Punktes auf einer Geraden wird durch die Länge der von ihm zurückgelegten Strecke veranschaulicht und gemessen.

β) Mehrmalige Bewegung des Punktes.

## Die Strecke und ihre Bewegung auf der Geraden.

### 1) Die geometrischen Operationen mit Strecken.

**17.** *Addition.* — Bewegt sich ein Punkt $A$ auf einer Geraden erst nach $B$ und dann weiter nach $C$, so hat er im Ganzen die Strecke $AC$ zurückgelegt. Da die Strecke $AC$ eben so lang ist, als die beiden Strecken $AB$ und $BC$ zusammengenommen, so kann man $AC$ als Summe*) von $AB$ und $BC$ betrachten. Demnach ist

1) $AB + BC = AC.$ Fig. 1. A B C

Anm. Es wird also der Begriff der Summe von Zahlen auf Strecken …rtragen. Die Addition der Strecken ist aber keine Rechnungs- sondern … geometrische Operation, welche sich, wie sogleich gezeigt wird, durch …structionen bewerkstelligen lässt. Wie umgekehrt Constructionen sich …rch Rechnungen ersetzen lassen, wird in dem Abschnitt über rechnende …metrie gezeigt werden.

Aus der gegenseitigen Stellung der Strecken $AB$, $BC$ und … ergiebt sich die Regel:

*) Vgl. Theil I, Nr. 6.

15. Soll man zwei Strecken addiren, so legt man sie so *hinter* einander, dass ihre einen Endpunkte zusammenfallen. Dann ist ihre Summe die Strecke zwischen ihren anderen Endpunkten.

Anm. Addition mehrerer Strecken durch wiederholte Anwendung von 15.

**18.** *Subtraction.* — Aus 1) folgt:

2) $AC - BC = AB$.

Demnach ist $AB$ die Differenz zwischen $AC$ und $BC$, und Fig. 1 liefert die Regel:

16. Soll man eine Strecke von einer andern subtrahiren, so legt man sie so *auf* einander, dass ihre einen Endpunkte zusammenfallen. Dann ist ihre Differenz die Strecke zwischen ihren anderen Endpunkten.

Sind die durch Subtraction zu vereinigenden Strecken einander gleich, so fallen auch ihre zweiten Endpunkte zusammen; also:

17. Legt man zwei gleiche Strecken so auf einander, dass ihre ersten Endpunkte zusammenfallen, so fallen auch ihre zweiten Endpunkte zusammen.

Umgekehrt ist das Aufeinanderfallen der beiderseitigen Endpunkte ein Zeichen für die Gleichheit der Strecken; also:

18. Kann man zwei Strecken so auf einander legen, dass ihre beiderseitigen Endpunkte zusammenfallen, so sind die Strecken gleich.

Anm. Zwei Strecken werden in die zum Addiren oder Subtrahiren erforderliche Lage gebracht, indem man sie (am bequemsten mittelst des Cirkels) auf der Geraden hinter oder auf einander abträgt.

Regel 16 dient auch in der Praxis zur Vergleichung der Länge zweier Strecken (Gegenstände). Beispiele!

**19.*** *Multiplication.**) — Trägt man dieselbe Strecke ($a$) $n$-mal hinter einander auf einer Geraden ab, so erhält man eine Strecke ($b$), welche $n$-mal so lang ist als die gegebene. Durch diese Construction ist also die gegebene Strecke ($a$) mit der Zahl $n$ multiplicirt worden, und man hat

3) $n \, . \, a = b$.

*Theilung.***) — Aus 3) folgt

4) $\frac{b}{n} = a$.

---

*) Die mit einem Stern bezeichneten Abschnitte können bei der erst Durchnahme übergangen werden.

**) Vgl. Theil I, Nr. 25, Anm.

Die in dieser Gleichung enthaltene Aufgabe, eine Strecke $b$ in $n$ gleiche Theile zu theilen, ist ohne eine aus dem Gebiete der Geraden heraustretende Construction nicht lösbar und wird später behandelt werden (Anm. zu 33).

**20.*** ***Messung.*** — Aus 3) folgt ferner:

$$5)\quad \frac{b}{a} = n;$$

d. h.: Der Quotient zweier Strecken ist eine Zahl. Die 19.
Strecke $b$ wird durch die Strecke $a$ gemessen, indem man $a$ so oft als möglich auf $b$ abträgt.

Bleibt hierbei kein Rest, so ist der Quotient der Strecken eine ganze Zahl.

Bleibt ein Rest, so hat man das grösste gemeinsame Mass zwischen $a$ und $b$ zu suchen, d. h. die grösste Strecke, durch welche sich sowohl $a$ wie $b$ ohne Rest messen lässt. Wenn in diesem Falle das gemeinsame Mass $p$-mal in $a$ und $q$-mal in $b$ enthalten ist, so ist der Quotient der beiden Strecken $\frac{q}{p}$, d. h. ein Bruch.

Das grösste gemeinsame Mass zwischen zwei Strecken $a$ und $b$ wird bestimmt,*) indem man die kleinere so oft als möglich auf der grösseren abträgt, dann ebenso den Rest auf der kleineren, u. s. w., bis kein Rest mehr bleibt. Die zuletzt abgetragene Strecke ist das gesuchte grösste gemeinsame Mass.

Anm. Obwohl bei der eben beschriebenen Construction die Reste immer kleiner werden, ist es doch nicht nöthig, dass schliesslich einer derselben gleich Null ist; vielmehr kann es vorkommen, dass die Reste nur beständig abnehmen, ohne den Werth Null wirklich zu erreichen. In diesem Falle ist der Quotient der beiden Strecken eine irrationale Zahl, und ein gemeinsames Mass existirt nicht. — Die praktische Ausführung der Construction wird freilich, da sie nicht vollkommen genau sein kann, stets ein gemeinsames Mass liefern. Der durch dasselbe erhaltene Quotient hat dann die Genauigkeit eines Näherungswerthes.

Setzt man in 5) $a = 1$, so wird $b = n$, d. h. auch eine Zahl. Setzt man also irgend eine bestimmte Strecke $= 1$, so on man alle Strecken als Zahlen darstellen. Weiteres hier-r s. in dem Abschnitt über rechnende Geometrie.

### 2) Entgegengesetzte Richtungen einer Geraden.

**21.** Eine Strecke $AB$ auf einer Geraden kann sowohl durch vegung des Punktes $A$ nach $B$, wie durch Bewegung von

*) Vgl. Theil I, Nr. 157, 1).

$B$ nach $A$ entstehen. Die Richtungen dieser beiden Bewegungen heissen einander entgegengesetzt. Die erste Bewegung kann über $B$, die zweite über $A$ hinaus beliebig fortgesetzt werden.

20. Fig. 2. $A \longrightarrow B$ $AB$, $B \longleftarrow A$ $BA$. Demnach hat auch jede Gerade zwei entgegengesetzte Richtungen, die in der Zeichnung (Fig. 2) durch einen Pfeil, in der Benennung durch die Aufeinanderfolge der Buchstaben unterschieden werden können ($AB$ und $BA$).

Aus 20 folgt: Jeder Punkt auf einer Geraden kann sich nach zwei entgegengesetzten Richtungen bewegen. Von einem Punkte aus kann man eine Strecke auf einer Geraden auf zweifache Weise abtragen. — Ueberhaupt kann man von einem Punkte aus auf einer Geraden jede Construction auf zwei entgegengesetzte Arten ausführen.

21. Gleiche Constructionen von einem Punkt aus nach entgegengesetzten Richtungen einer Geraden geben gleiche aber entgegengesetzte (*symmetrische*) Resultate. (In Fig. 3 z. B. sind die an Länge gleichen Strecken $AB$ und $AB_1$ symmetrisch, und die Punkte $B$ und $B_1$ liegen symmetrisch zu $A$.)

Fig. 3. $B_1 \longleftarrow A \longrightarrow B$ ($-$ $+$)

**22.*** *Positive und negative Strecken.* — Man kann den Gegensatz zwischen positiven und negativen Zahlen dadurch auf Strecken übertragen, dass man die eine der beiden Richtungen einer Geraden, sowie alle nach dieser Richtung genommenen Strecken als positiv, die andere Richtung und die nach derselben genommenen Strecken als negativ betrachtet.*) —

Wird in Fig. 3 die Richtung $AB$ als positiv betrachtet, so ist $AB_1$ negativ, und es ist

$$AB_1 = -AB.$$

Da ferner $$AB_1 = BA$$

(weil beide Strecken gleich lang und gleich gerichtet sind), so ist auch

22. $$BA = -AB; \text{ oder } AB + BA = 0.$$

Anm. Die letzte Formel sagt, dass die Bewegung von $A$ nach $B$ und nach $A$ zurück die Lage des Punktes $A$ um die Strecke 0, d. h. gar nicht geändert hat; die vorletzte, dass eine Strecke ihr Vorzeichen ändert wenn man ihre beiden Endpunkte mit einander vertauscht.

---

*) Vgl. Theil I, Nr. 61 am Ende.

**23.*** *Erweiterung.* — Sind auf einer Geraden drei Punkte $A$, $B$, $C$ gegeben, so ist (nach 15)

1) wenn $B$ zwischen $A$ und $C$ liegt: $AB + BC = AC$,

2) wenn $C$ zwischen $B$ und $A$ liegt: $BC + CA = BA$,

oder:

$$BC - AC = -AB \quad (22)$$

oder:

$$AB + BC = AC \quad \text{(Th. I, 110)},$$

Fig. 4.



3) wenn $A$ zwischen $C$ und $B$ liegt: $CA + AB = CB$,

oder:

$$-AC + AB = -BC,$$

oder:

$$AB + BC = AC.$$

Hieraus folgt: Sind auf einer Geraden drei Punkte $A$, $B$, $C$ in beliebiger Lage gegeben, so ist stets 23.

$$AB + BC = AC, \text{ oder } AB + BC + CA = 0.$$

Sind zwei anstossende Strecken (Fig. 3) $B_1A$ und $AB$ gleich lang, so heisst $A$ die Mitte zwischen den Punkten $B_1$ und $B$. Die Mitte zwischen zwei Punkten halbirt also die Verbindungsstrecke der beiden Punkte, und heisst daher Halbirungspunkt der Strecke.

### 3) Bewegung der Strecke auf der Geraden.

**24.*** Bewegt sich eine Strecke $AB$ auf einer Geraden bis $A_1B_1$, so bleibt der Lagenunterschied ihrer Endpunkte ungeändert; d. h.: der eine Endpunkt hat sich ebensoweit bewegt als der andere. Ist also

1) $AB = A_1B_1$,

so ist auch

2) $AA_1 = BB_1$

Fig. 5.



und umgekehrt. (Dasselbe Resultat folgt, wenn man auf beiden Seiten von 1) die Strecke $BA_1$ addirt.)

Ist $M$ die Mitte zwischen $B$ und $A_1$, so ist

3) $BM = MA_1$;

ner 1) $AB = A_1B_1$;

o durch Addition:

4) $AM = MB_1$;

h.: $M$ ist auch die Mitte zwischen $A$ und $B_1$. Oder:

Sind zwei Strecken auf einer Geraden einander 24.
ich, so haben die Strecken zwischen dem Anfangs-

punkte der einen und dem Endpunkte der andern denselben Halbirungspunkt.

Statt die Strecke $AB$ nach $A_1B_1$ zu bewegen, kann man auch von $A_1$ aus eine mit $AB$ gleiche und gleich gerichtete Strecke $A_1B_1$ construiren. (Vgl. Nr. 12.) Und allgemein:

25. Gleiche Constructionen von verschiedenen Punkten aus nach derselben Richtung einer Geraden geben gleiche und gleichstimmige (*congruente*) Resultate. (In Fig. 5 z. B. sind die an Länge gleichen Strecken $AB$ und $A_1B_1$ congruent.)

**25.*** *Erweiterung.* — Ist $M$ die Mitte zwischen zwei Punkten $A$ und $B$, so ist $AM = MB$, oder $MB - AM = 0$, oder

$$MB + MA = 0.$$

Ebenso nennt man $M$ die Mitte (den Schwerpunkt) zwischen $n$ Punkten $A, B, C, \dots N$, wenn

$$MA + MB + \dots + MN = 0$$

ist.

Wenn auf einer Geraden die Summe einer Reihe von Strecken gleich Null ist, also

$$AA_1 + BB_1 + CC_1 + \dots = 0,$$

so kann man (nach 23), wenn $R$ ein beliebiger Punkt der Geraden ist, schreiben:

$$AA_1 = RA_1 - RA; \; BB_1 = RB_1 - RB; \dots$$

Dies eingesetzt giebt:

$$RA + RB + RC + \dots = RA_1 + RB_1 + RC_1 + \dots$$

26. d. h.: Ist die Summe von $n$ Strecken auf einer Geraden gleich Null, so ist für jeden Punkt der Geraden die Summe seiner Verbindungsstrecken mit den Anfangspunkten gleich der Summe seiner Verbindungsstrecken mit den Endpunkten.

Wenn insbesondere die Punkte $A_1, B_1, C_1 \dots$ alle mit dem Schwerpunkte $M$ der Punkte $A, B, C \dots$ zusammenfallen, so ist

$$RA_1 = RB_1 = RC_1 = \dots = RM,$$

und

$$RA + RB + RC + \dots = n \, . \, RM;$$

27. d. h.: Die Summe der Verbindungsstrecken eines beliebigen Punktes einer Geraden mit $n$ andern Punkten ist gleich der $n$-fachen Verbindungsstrecke mit dem Schwerpunkte derselben.

Anm. Hierdurch ist die Aufgabe, den Schwerpunkt zwischen $n$ Punkten einer Geraden zu construiren, zurückgeführt auf die Aufgabe, eine gegebene Strecke in $n$ gleiche Theile zu theilen.

# II. Geometrie der Ebene.

## a. Die Gerade und ihre Bewegungen in der Ebene.

### α) Einmalige Bewegung der Geraden.

**26.** ***Bestimmung der Geraden.*** — Eine Gerade hat die Merkmale der Lage und Richtung. Eine Gerade, die sich bewegt, kann hiernach entweder ihre Lage oder ihre Richtung ändern. Zwei Geraden können sich entweder durch ihre Lage oder durch ihre Richtung unterscheiden. (Zwei Geraden mit derselben Lage und Richtung fallen zusammen.)

Die verschiedenen Zustände einer bewegten Geraden können
selbst als feste Geraden betrachtet werden, d. h.: Eine 28.
bestimmte bewegte Gerade ist gleichbedeutend mit einer Reihe beliebiger fester Geraden.

### 1) Lagenänderung der Geraden.

**27.** *Bewegung der Geraden.* — Ist eine Gerade *a* durch Aenderung ihrer Lage (ohne ihre Richtung zu ändern) in *b* übergegangen, so darf kein Punkt zugleich auf *a* und *b* liegen; denn sonst könnte dieser Punkt durch seine Bewegung jede der beiden Geraden erzeugen, und da die Lage einer Geraden durch einen beliebigen ihrer Punkte bestimmt wird (Nr. 16), so hätten beide Geraden dieselbe Lage, gegen die Annahme. — Wir nennen diese Art der Bewegung einer Geraden Verschiebung.

Verschiebung einer Geraden ist also Aenderung ihrer Lage mit Beibehaltung ihrer Richtung. — Zwei Geraden (*a*, *b*) mit verschiedener Lage aber gleicher Richtung heissen parallel. (In Zeichen $a \parallel b$.)

Anm. Diesen Namen führen die Geraden auch dann noch, wenn eine von ihnen in entgegengesetzter Richtung genommen wird. Ist es nöthig, diesen Fall besonders zu bezeichnen, so kann man zwei Geraden mit verschiedener Lage und entgegengesetzter Richtung antiparallel nennen.

Zwei parallele (bezw. antiparallele) Geraden entstehen, nn zwei verschiedene Punkte sich nach gleichen (bezw. entgengesetzten) Richtungen bewegen.

Hat eine Gerade ihre Lage 29.
ändert, so hat auch jeder
ınkt auf ihr seine Lage um
eselbe Strecke geändert. Denn alle ihre Punkte haben eichgrosse und gleichgerichtete Bewegungen (Lagenänderun-

Fig. 6.

gen) gemacht. — Wie die Lage einer Geraden durch einen beliebigen Punkt auf ihr vollkommen bestimmt ist, so auch ihre Lagenänderung durch diejenige eines beliebigen Punktes auf ihr.

Eine Gerade kann aus der Lage $a$ auf unzählige Arten in die Lage $b$ kommen. — Die Lagenänderung der Geraden ist einfach, wenn diejenige eines beliebigen Punktes auf ihr eine einfache ist, d. h. wenn ein beliebiger Punkt auf ihr eine beliebige Gerade beschreibt, oder, anders gesagt, wenn ein beliebiger Punkt auf ihr die Richtung auf einen beliebigen festen Punkt der zweiten Geraden innehält. Das von der Geraden beschriebene Gebilde ist in diesem Falle (nach 8) eine Ebene.

Anm. Die Bestimmung der Ebene durch Punkte und Linien wird in der Stereometrie gegeben werden.

Hiernach kann man in einer Ebene zu einer in ihr gegebenen Geraden beliebige Parallelen ziehen.

30. Durch einen ausserhalb einer Geraden gegebenen Punkt kann man nur *eine* Parallele zu der Geraden ziehen. Denn die Lage derselben ist durch den gegebenen Punkt, und ihre Richtung durch die gegebene Gerade vollkommen bestimmt; also ist die Parallele selbst vollkommen bestimmt.

Aus dem Begriff der Gleichheit folgt, dass zwei Richtungen, die einer dritten gleich sind, auch unter einander gleich
31. sind. Folglich: Sind zwei Geraden einer dritten parallel, so sind sie auch unter einander parallel.

**28.*** *Bewegung eines auf der Geraden liegenden Punktes.* — Wie die Lage einer Geraden durch einen beliebigen Punkt auf ihr vollkommen bestimmt ist, so auch ihre Lagenänderung (Verschiebung) durch diejenige eines beliebigen ihrer Punkte. Bewegt sich nun eine Gerade so, dass einer ihrer Punkte selbst eine Gerade beschreibt, so ist die Lagenänderung des Punktes, mithin auch diejenige der Geraden, durch die von dem Punkte zurückgelegte Strecke bestimmt. Gleichen Lagenänderungen entsprechen also gleiche von dem Punkte auf der Geraden zurückgelegte Strecken. Verschiedene Lagenänderungen verhalten sich an Grösse wie die entsprechenden von dem Punkte auf der Geraden zurückgelegten Strecken. — Da ein Punkt $A$ der Geraden $a$ (Fig. 7) durch geradlinige Bewegung jeden Punkt ($B$) der parallelen Geraden $b$ erreichen kann, so kann auch die Gerade $a$ auf unendlich viele Arten in die Lage $b$

kommen. Die auf einander folgenden Lagenänderungen von *a* verhalten sich also wie die entsprechenden von dem Punkte *A* auf einer beliebigen Geraden zurückgelegten Strecken. Da überdies der Punkt *A* beliebig ist, so folgt der Satz:

Werden zwei sich schneidende oder parallele 32. Geraden von einer Anzahl Parallelen geschnitten, so verhalten sich die Strecken auf der einen Geraden ebenso wie die auf der anderen.

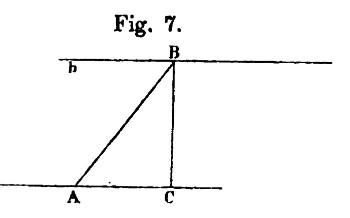
Aus 32 folgt weiter:

Werden auf *einer* Geraden durch eine Anzahl von 33. Parallelen gleiche Stücke abgeschnitten, so werden auch auf jeder anderen Geraden durch diese Parallelen gleiche Stücke abgeschnitten.

Anm. Hiernach kann eine Strecke *AB* dadurch in *n* gleiche Theile getheilt werden, dass man auf einer beliebigen durch *A* gezogenen Geraden von *A* aus *n* beliebige, aber unter sich gleiche Theile abträgt, den letzten Theilpunkt $B_1$ mit *B* verbindet, und durch die übrigen Theilpunkte die Parallelen zu $BB_1$ zieht.

Wenn eine Gerade ihre Lage ändert, so ist mit dieser Bewegung im Allgemeinen noch ein Fortrücken in ihrer eigenen Richtung (eine Bewegung der Geraden in sich selbst) verbunden. Verschiebt sich nun die Gerade *a* (Fig. 7) nach *b* so, dass Punkt *A* in gerader Linie nach *B* rückt, so hat *A* ebenso wie die Gerade *a* sich nicht nur seitwärts bewegt, sondern ist auch in der Richtung der Geraden um ein Stück vorwärts gekommen. Die Bewegung eines Punktes der Geraden wird aber nur dann die Grösse ihrer reinen Verschiebung bestimmen, wenn die Gerade nur ihre Lage ändert, ohne in ihrer Richtung fortzurücken. Man kann nun die doppelte Bewegung der Geraden (wenn *A* nach *B* rückt) durch zwei nach einander folgende einzelne Bewegungen ersetzen, nämlich durch ein blosses Fortrücken der Geraden in ihrer Richtung, wobei bis *C* geht, und eine blosse Lagenänderung, wobei *C* bis *B* eht. Dann also stellt die Strecke *AB* die doppelte Bewegung ar, welche die Gerade ausführt, wenn *A* nach *B* rückt; die trecke *AC* ist diejenige, um welche die Gerade in ihrer eignen ichtung fortrückt, und die Strecke *CB* ist diejenige, welche ie blosse Lagenänderung der Geraden bestimmt. Damit ein unkt (*C*) der Geraden (*a*) durch seine Bewegung die Grösse

Fig. 7.

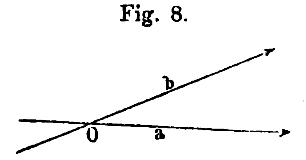


der reinen Verschiebung der Geraden bestimme, muss seine Bewegungsrichtung (*CB*) von den beiden Richtungen der Geraden um gleich viel verschieden sein. (Vgl. Fig. 12.)

**2) Richtungsänderung der Geraden. — Der Winkel.**

**29.** *Drehung.* — Ist eine Gerade *a* durch Aenderung ihrer Richtung (ohne ihre Lage zu ändern) in *b* übergegangen, so giebt es jedenfalls einen einzigen Punkt auf ihr, welcher an der Bewegung nicht theilnahm, den also *b* mit *a* gemeinsam hat. — Denn gäbe es keinen solchen Punkt, so hätten beide Geraden nicht dieselbe Lage; gäbe es aber darin mehr als einen, so wären beide Geraden in derselben Weise bestimmt (nach 14); also könnte keine Richtungsänderung stattgefunden haben. — Wir nennen diese Art der Bewegung einer Geraden Drehung, den ruhenden Punkt *O* den Drehungspunkt, und sagen, *a* habe sich um *O* bis *b* gedreht.

Fig. 8.




Drehung einer Geraden ist also Aenderung ihrer Richtung mit Beibehaltung ihrer Lage. Von zwei Geraden mit verschiedener Richtung aber derselben Lage sagt man, sie schneiden sich.

Zwei sich schneidende Geraden entstehen, wenn zwei zusammenfallende Punkte *O* sich nach verschiedenen Richtungen bewegen.

Auf zwei sich schneidenden Geraden bewegen sich zwei Punkte in convergenten Richtungen, wenn sie sich beide dem Schnittpunkte nähern; in divergenten Richtungen, wenn sie sich beide von ihm entfernen. Demnach heissen auch je zwei zum Schnittpunkt hinführende Richtungen convergent, je zwei vom Schnittpunkt wegführende divergent.

34. Zwei Geraden können sich nur in *einem* Punkte schneiden. Denn nach 14 müssen zwei Geraden, die zwei Punkte gemeinsam haben, zusammenfallen.

Eine Gerade kann aus der Richtung *a* auf unzählige Arten in die Richtung *b* kommen. Die Bewegung der Geraden *a* wird einfach sein, wenn ein beliebiger Punkt auf ihr in jedem Augenblicke die Richtung auf einen bestimmten beweglichen Punkt der Geraden *b* innehält.*) Das von der Geraden be-

*) Denn da ein beliebiger fester Punkt mit einem bestimmten beweglichen Punkte gleichbedeutend ist (13), so ist die Bewegung der

schriebene Gebilde ist also in diesem Falle wiederum eine Ebene.

Hiernach kann man in einer Ebene durch einen in ihr gegebenen Punkt beliebige sich schneidende Geraden ziehen. — Man kann also auch zwei beliebige Punkte einer Ebene 35. durch eine ganz in ihr liegende Gerade verbinden.

**30.** *Beziehungen zwischen zwei Geraden.* — Verschiebung und Drehung sind hiernach zwei verschiedene Arten einfacher Bewegung, die von einer Geraden ausgeführt werden können.*)

Aus den obigen Betrachtungen geht hervor, dass allgemein die Gesetze gelten:

Zwei Geraden mit derselben Lage haben stets ungleiche Richtung.

Zwei Geraden mit gleicher Richtung haben stets verschiedene Lage

Da aber eine Gerade durch zwei aufeinanderfolgende Bewegungen Lage und Richtung ändern kann (wobei sie durch die zweite Bewegung das Gebiet der durch die erste bestimmten Ebene verlässt), so gelten nur für zwei in derselben Ebene liegende Geraden die beiden umgekehrten Gesetze:

Zwei Geraden mit verschiedener Lage haben gleiche Richtung.

Zwei Geraden mit ungleicher Richtung haben dieselbe Lage.

Zwei Parallelen theilen die Ebene in drei, zwei sich schneidende Geraden in vier unvollständig begrenzte Theile.

## Der Winkel.

**31.** *Vorbemerkung.* — Wenn ein Punkt auf einer Geraden seine Lage ändert, so wird die Grösse der Bewegung durch die von dem Punkte zurückgelegte Strecke veranschaulicht und gemessen (wie schon oben bemerkt). — Wenn dagegen eine Gerade in einer Ebene sich bewegt, so kann die Grösse der Bewegung nicht durch die Grösse des Flächenstückes be-

---

Geraden in diesem zweiten Falle im Wesentlichen ebenso bestimmt wie im ersten, nämlich als einfache. — Die Bewegung eines ihrer Punkte kann aber diesmal natürlich keine einfache sein; denn nur dann, wenn die Gerade jenes Merkmal ändert, welches sie mit dem Punkte gemeinsam hat, nämlich die Lage, können beide Gebilde in der Einfachheit der Bewegung übereinstimmen.

*) Wie die Verschiebung als specieller Fall der Drehung betrachtet werden kann, wird später gezeigt werden. (Nr. 58.)

stimmt werden, welches von der Geraden beschrieben wird. Denn dieses Flächenstück ist, wie die Gerade selbst, von unbestimmter (unendlicher) Grösse. — Während aber die Grösse der Verschiebung einer Geraden wenigstens durch die von einem ihrer Punkte zurückgelegte Strecke veranschaulicht und gemessen werden kann (wie oben bemerkt), findet für die Grösse der Drehung einer Geraden nichts ähnliches statt. In ihrer Beurtheilung muss das Auge sich ebenso üben, wie in derjenigen der Bewegungsgrösse eines Punktes, wenn nur Anfangs- und Endstellung desselben, nicht aber die verbindende gerade Strecke gegeben ist.

Anm. Da hiernach die Grösse der Drehung einer Geraden durch kein geometrisches Gebilde dargestellt wird, so ist eine besondere Benennung dafür erforderlich. — Uebrigens wird später gezeigt werden, wie wenigstens zum Zweck der Vergleichung mehrere solche Grössen durch Linienstücke dargestellt werden können (Nr. 35).

Damit die Drehungsgrösse zwischen zwei Geraden nicht eine vieldeutige Grösse sei, ist es vor allem nöthig, auf jeder der beiden Geraden eine ihrer beiden Richtungen festzuhalten.

Anm. Dies kann entweder dadurch geschehen, dass man die Richtungen durch Pfeile bezeichnet, oder dadurch, dass man die Geraden nur von ihrem Schnittpunkt aus zeichnet und nur diejenigen Richtungen gelten lässt, nach welchen sich dann der Schnittpunkt bewegen kann.

**32.** *Definition des Winkels.* — Unter der eben gemachten Voraussetzung kann nun die Erklärung aufgestellt werden:

Die Drehungsgrösse zwischen zwei Geraden heisst ihr *Winkel.*

Der Schnittpunkt der Geraden heisst Scheitel des Winkels, die Geraden selbst, vom Scheitel an gerechnet, heissen Schenkel des Winkels.

Anm. Ein Schenkel des Winkels beschreibt bei seiner Drehung einen Theil der Ebene. Dieser wird von den beiden Schenkeln unvollständig begrenzt. — Unter der Lage eines Winkels versteht man die Lage dieses von seinen Schenkeln eingeschlossenen Ebenenstückes.

Die Strecke hatte eine doppelte Bedeutung. Sie war erstens das Mass für die Bewegung eines Punktes auf einer Geraden, zweitens ein Theil der Geraden selbst. Man konnte die Grösse dieses Theiles angeben, indem man ihn durch eine Längeneinheit, d. h. durch eine Strecke von bestimmter Grösse, mass; man konnte aber nicht angeben, der wievielte Theil der Geraden eine Strecke sei, weil die Strecke endlich, die Gerade unendlich gross ist. — Ebenso hat nun auch der Winkel eine doppelte Bedeutung. Er ist erstens das Mass für die Drehung einer Strecke in einer Ebene, zweitens, insofern man darunter das von seinen Schenkeln eingeschlossene Ebenenstück versteht, ein Theil der Ebene selbst. Man kann die Grösse dieses Theiles nicht angeben, indem man ihn durch eine Flächeneinheit, d. h. durch eine ebene Figur von bestimmter Grösse, misst

weil der Winkel, als Ebenenstück betrachtet, unendlich, dagegen die Figur endlich gross ist; man kann aber angeben, der wievielte Theil der Ebene dieses Ebenenstück ist; das Ebenenstück ist nämlich in der Ebene so oft enthalten, als der zugehörige Winkel in einem geschlossenen Winkel (s. u.). Da die Strecke in jeder ihrer beiden Bedeutungen eine endliche Grösse hat, so pflegt man die beiden Bedeutungen nicht durch besondere Ausdrücke zu unterscheiden (als Theil der Geraden kann man sie Geradentheil nennen). Der Winkel jedoch hat, als Drehungsgrösse betrachtet, endliche, als Theil der Ebene unendliche Grösse (als Theil der Ebene kann man ihn Ebenentheil nennen). Handelt es sich also um die Grösse eines Winkels, so bedeutet das Wort „Winkel“ stets „Drehungsgrösse“; handelt es sich um die Lage eines Winkels, so bedeutet es stets „Ebenentheil“. Dieser Unterschied ist im Folgenden stets festzuhalten.

Ein Winkel kann bezeichnet werden 1) durch 3 grosse lateinische Buchstaben, von denen einer (der mittelste) an den Scheitel, die beiden andern an beliebige Punkte der beiden Schenkel (an die Endpunkte, wenn die Schenkel Strecken sind) gesetzt werden ($AOB$); 2) durch 2 kleine lateinische Buchstaben, welche die Schenkel bedeuten ($ab$); 3) durch einen kleinen griechischen Buchstaben ($\alpha$). (Fig. 9.)

Fig. 9.

**33.** *Eintheilung der Winkel nach ihrer Grösse.* — Die 36.
Grösse einer Drehung, also auch eines Winkels, ist von der Lage des Drehungspunktes und von der Länge der sich drehenden Linie unabhängig.

Bei fortgesetzter Umdrehung um den Punkt $O$ (Fig. 8) muss die Gerade $a$ allmälig alle durch $O$ möglichen Richtungen annehmen; d. h. alle Richtungen, welche der Punkt $O$ selbst einschlagen könnte, wenn er sich bewegte. Schliesslich muss sie in die ursprüngliche Richtung $a$ zurückkehren. Die Gerade hat alsdann eine ganze Umdrehung gemacht. Der durch eine ganze Umdrehung einer Geraden entstehende Winkel heisst ein geschlossener Winkel. Die Schenkel eines geschlossenen Winkels haben also gleiche Richtung. (Fig. 10.)

Fig. 10.

Anm. Haben zwei Geraden, $a$ und $b$ (Fig. 10) gleiche Lage und iche Richtung, so giebt die Zeichnung keine Auskunft darüber, ob und rch wieviele ganze Umdrehungen um $O$ die Gerade $b$ in ihre gegenrtige Richtung gekommen ist. Ueberhaupt wird die Zeichnung eines nkels nicht verändert, wenn man annimmt, dass der eine Schenkel eine iebige Anzahl ganzer Umdrehungen mehr oder weniger gemacht habe. ın nimmt daher für gewöhnlich an, dass die den Winkel erzeugende ehung weniger als eine ganze Umdrehung betragen habe; anders ge-

sagt: man betrachtet nur Winkel, die kleiner sind als ein geschlossener.

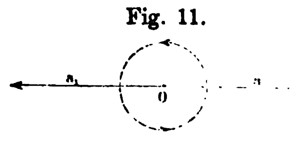
Da alle Winkel, welche durch Drehungen entstanden sind, die sich um ein Vielfaches des geschlossenen Winkels unterscheiden, durch dieselbe Zeichnung ausgedrückt sind (dieselbe Gestalt haben), so ist auch der durch gar keine Drehung entstandene Winkel von der Grösse Null von derselben Gestalt wie der geschlossene Winkel (Fig. 10).

Beispiele für alle diese Bewegungen liefert die Betrachtung der Zeiger einer Uhr. — In welcher Zeit beschreibt der grosse, in welcher der kleine Zeiger einen geschlossenen Winkel? (Aehnliche Fragen sind auch weiter unten zu stellen.)

37. Aus 36 folgt: Alle geschlossenen Winkel sind einander gleich.

Bei ihrer Umdrehung um den Punkt $O$ muss die Gerade $a$ einmal auch in die entgegengesetzte Richtung $a_1$ kommen (Fig. 11). Da die Beziehung einer Geraden zu einer Ebene sich nicht ändert, wenn man die Gerade in entgegengesetzter Richtung nimmt, so ist die Drehung, welche $a$ nach $a_1$ bringt, eben so gross wie diejenige, welche $a_1$ nach $a$ bringt; d. h.: Eine Gerade muss, um in die entgegengesetzte Richtung zu gelangen, eine halbe Umdrehung machen. Der durch eine halbe Umdrehung einer Geraden entstehende Winkel heisst ein gestreckter Winkel. Die Schenkel eines gestreckten Winkels haben also entgegengesetzte Richtung (Fig. 11).

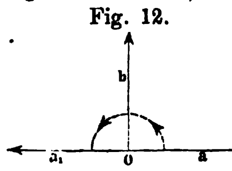
Fig. 11.




Da der gestreckte Winkel die Hälfte eines geschlossenen
38. ist, so folgt aus 37: Alle gestreckten Winkel sind einander gleich.

Anm. Winkel, die grösser sind als ein gestreckter (aber kleiner als ein geschlossener), heissen convex; solche, die kleiner sind: concav. (Man zeichne verschiedene concave und convexe Winkel mit Angabe der Richtungen wie in Fig. 11. Was für Winkel können durch eine Strecke dargestellt werden?)

Fig. 12.




Der Winkel, welcher durch eine viertel Umdrehung entsteht, heisst ein rechter Winkel. Von seinen Schenkeln $a$ und $b$ (Fig. 12) sagt man, dass sie zu einander senkrechte Richtung haben. (In Zeichen: $a \perp b$ oder $b \perp a$ *)

Da der rechte Winkel die Hälfte eines gestreckten ist, so
39. folgt aus 38: Alle rechten Winkel sind einander gleich.

*) Andere Ausdrucksweisen: Sie stehen auf einander senkrecht, und normal zu einander.

Anm. Winkel, die grösser sind als ein rechter (aber kleiner als ein gestreckter), heissen stumpf; solche, die kleiner sind: spitz; beide zusammen: schief. (Man zeichne verschiedene spitze und stumpfe Winkel.) Was für Winkel bildet eine sich drehende Gerade der Reihe nach mit ihrer Anfangsrichtung?

Durch einen gegebenen Punkt lässt sich zu einer 40.
gegebenen Geraden nur *eine* Senkrechte ziehen. Denn die Lage derselben ist durch den gegebenen Punkt, und ihre Richtung durch die gegebene Gerade vollkommen bestimmt; also ist die Senkrechte selbst vollkommen bestimmt.

Anm. Man sagt, die Senkrechte werde in einem Punkte auf einer Geraden errichtet, wenn der Punkt auf der Geraden liegt; sie werde von einem Punkte auf eine Gerade gefällt, wenn der Punkt ausserhalb der Geraden liegt.

Ein rechter Winkel wird durch $R$ bezeichnet. Der 90ste Theil eines rechten Winkels heisst ein Grad ($1\,R = 90^0$), der 60ste Theil eines Grades eine Minute ($1^0 = 60'$), der 60ste Theil einer Minute eine Secunde ($1' = 60''$).

**34.*** *Darstellung der Drehung durch Multiplication.* — Die Richtung einer Strecke $a$ bleibt ungeändert, wenn $a$ $n$ ganze Umdrehungen macht (wo $n$ eine beliebige ganze positive Zahl ist). Eine Zahl $a$ bleibt ungeändert, wenn man sie mit $(+1)^n$ multiplicirt (Th. I, 77, 79). Da, wie oben (Nr. 20 am Ende) gefunden, jede Strecke als Zahl dargestellt werden kann, so bedeutet die Multiplication einer Strecke mit $(+1)^n$ eine Drehung der Strecke um $n$ geschlossene Winkel.

Die Richtung einer Strecke $a$ geht in die entgegengesetzte ($-a$, nach 22) über, wenn $a$ eine halbe Umdrehung macht. Eine Zahl $a$ verwandelt sich in $(-a)$, wenn man sie mit $(-1)$ multiplicirt. Demnach bedeutet die Multiplication einer Strecke mit $(-1)$ eine Drehung der Strecke um einen gestreckten Winkel.

Anm. Welche geometrische Bedeutung hat die Formel $a.(-1)^2 = a$?

Sei $x$ der Factor, welcher einer viertel Umdrehung entspricht. Dann ist (Fig. 12)

$$ax = b;\ bx = -a\ (= a_1),$$

ılso

$$x = \frac{b}{a};\ x = -\frac{a}{b};$$

ıultiplicirt:

$$x^2 = -\frac{ab}{ab} = -1;\ x = \sqrt{-1} = i.\ \text{(Vgl. Th. I, Nr. 102).}$$

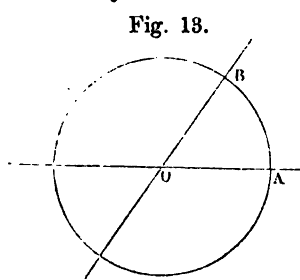
'emnach bedeutet die Multiplication einer Strecke mit

*i* eine Drehung der Strecke um einen rechten Winkel. Und Multiplication einer Strecke mit $i^n$ bedeutet Drehung der Strecke um *n* rechte Winkel.

Anm. Welches ist hiernach die geometrische Bedeutung der Formeln 118 in Th. I? — Man untersuche die Bedeutung der Factoren $(+1)^n$ und $i^n$, wenn *n* ein Bruch ist.

**35.** *Bewegung eines auf der Geraden liegenden Punktes.* — Dreht eine Gerade sich um einen ihrer Punkte ($O$), so beschreibt jeder ihrer Punkte ($A$) eine krumme Linie, die man Kreislinie nennt, wenn die Gerade eine ganze Umdrehung macht; Kreisbogen, wenn die Drehung diese Grösse nicht erreicht. In Bezug auf diese Linie heisst der Drehungspunkt ($O$) Mittelpunkt (Centrum); die Strecke $OA$ in jeder ihrer verschiedenen Richtungen Radius; jeder von der Geraden beschriebene Winkel (z. B. $AOB$) Centriwinkel.

Fig. 13.




Der Mittelpunkt einer Kreislinie ist also derjenige Punkt, dessen Verbindungsstrecken mit beliebigen Punkten der Kreislinie gleich gross sind; Radius jede Strecke, welche einen Punkt der Kreislinie mit dem Mittelpunkte verbindet; Centriwinkel jeder Winkel, dessen Scheitel der Mittelpunkt des Kreises ist (dessen Schenkel also Radien sind).

Anm. Construction der Kreislinie mittelst des Cirkels oder eines in einem Punkte befestigten gespannten Fadens.

Wenn ein Punkt $A$ der Geraden $OA$ den Bogen $\widehat{AB}$ beschreibt, während gleichzeitig die Gerade selbst den Centriwinkel $AOB$ beschreibt, so sagt man, der Centriwinkel $AOB$ gehöre zum Bogen $\widehat{AB}$.

Anm. Ebenso, wie durch 2 von einem Punkt $O$ ausgehende Strecken $OA$ und $OB$ zwei verschiedene Winkel $AOB$, ein concaver und ein convexer, gebildet werden, so entstehen auch durch Annahme zweier Punkte $A$ und $B$ auf der Kreislinie zwei verschiedene Bogen $\widehat{AB}$, von denen jeder zu einem bestimmten der beiden Centriwinkel gehört. Und zwar liegt jed Bogen in dem Ebenenstück des zugehörigen Winkels.

Die beiden Bogen $\widehat{AB}$, welche zusammen den Umfang de Kreislinie bilden, heissen einander entgegengesetzt.

Da der Bogen durch dieselbe Bewegung entsteht wie d Centriwinkel, so kann er ebenso wie dieser als Mass für di Drehung der Geraden betrachtet werden. Da aber verschie

dene Punkte der sich drehenden Geraden auch verschiedene Bogen beschreiben, so können zwei Centriwinkel, die mit einander verglichen werden sollen, nur durch solche Bogen ersetzt werden, die von demselben Punkte beschrieben wurden, also derselben Kreislinie angehören.

Hiernach können alle Sätze, welche von Winkeln mit demselben Scheitel gelten, ohne Weiteres auf Bogen derselben Kreislinie übertragen werden, indem man statt der Schenkel Punkte auf derselben Kreislinie, statt der Winkel die Bogen zwischen diesen Punkten setzt.

Anm. So wird z. B. der Winkel, den die von zwei Punkten (*A* u. *B*) der Erdkugel oder der scheinbaren Himmelskugel nach dem Erdmittelpunkte (*O*) gezogenen Strecken bilden, durch den Bogen $\widehat{AB}$ ersetzt.

Da Bogen und Centriwinkel in gleicher Weise die Drehung einer Geraden messen, so sind die beiden Bogen, welche ein Punkt der Geraden beschreibt, wenn die Gerade zwei Drehungen von gleicher Grösse macht, einander gleich; d. h.:

Zu gleichen Centriwinkeln einer Kreislinie ge- 41.
hören gleiche Bogen (und umgekehrt). — Zu dem grösseren von zwei Centriwinkeln einer Kreislinie gehört der grössere Bogen (und umgekehrt).

Aus 41 folgt:

Jede durch den Mittelpunkt eines Kreises gehende 42.
Gerade halbirt die Kreislinie. — Zwei solche Linien, die auf einander senkrecht stehen, theilen die Kreislinie in vier gleiche Theile.

Anm. Die Hälfte der Kreislinie heisst Halbkreis (linie), der vierte Theil: Quadrant. Was für Bogen (mit Halbkreis und Quadrant verglichen) gehören zu einem concaven, convexen, spitzen, stumpfen Centriwinkel? Wieviel *R* betragen zusammen die beiden zu entgegengesetzten Bogen gehörigen Centriwinkel?

Da man aus einem Punkte einer Ebene mit demselben Radius nur eine Kreislinie beschreiben kann, so ist die Kreislinie durch ihren Radius nach Gestalt und Grösse vollständig bestimmt. Daraus folgt:

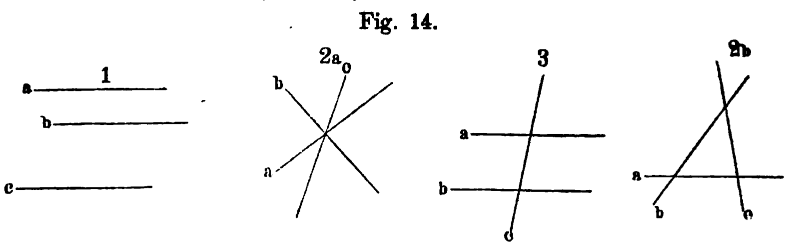
Kreislinien mit gleichem Radius sind congruent. 43.

*β*) Zweimalige Bewegung der Geraden.

**36.** *Uebersicht.* — Ist eine Gerade *a* durch zwei auf einander folgende Bewegungen erst in *b* und dann in *c* übergangen, so können die beiden Bewegungen sein: 1) zwei Verschiebungen, 2) zwei Drehungen, 3) eine Verschiebung und

eine Drehung. Im zweiten Falle können die beiden Drehungen entweder 2a) um denselben Punkt oder 2b) um verschiedene Punkte stattfinden (Fig. 14).

Fig. 14.




Man hat alsdann 1) drei Geraden mit gleicher Richtung; 2a) drei Geraden mit derselben Lage; 3) zwei von einer dritten Geraden geschnittene Parallelen; 2b) drei Geraden mit verschiedener Richtung, welche paarweise dieselbe Lage haben (sich in 3 Punkten schneiden).

Anm. In wieviel Theile wird die Ebene in jedem der vier Fälle getheilt? Inwiefern ist 2a) ein specieller Fall von 2b)? — Wieviel Schnittpunkte, Strecken und Figuren entstehen in jedem Falle? — Wie ordnen sich die 4 Fälle nach der Anzahl dieser Schnittpunkte, Strecken und Figuren?

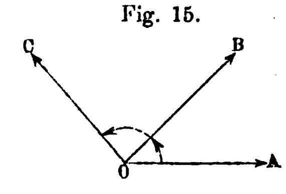
Da der Fall 1) zu keiner besonderen Bemerkung Anlass giebt, so betrachten wir nun der Reihe nach die Fälle 2a), 3), 2b).

## $a_1$. Der Winkel und seine Bewegung in der Ebene.

### 1) Die geometrischen Operationen mit Winkeln.

**37.** *Addition.* — Dreht sich eine Strecke $OA$ in einer Ebene erst nach $OB$ und dann weiter nach $OC$, so hat sie im Ganzen den Winkel $AOC$ beschrieben. Da der Winkel $AOC$ eben so gross ist, als die beiden Winkel $AOB$ und $BOC$ zusammengenommen, so kann man $AOC$ als Summe von $AOB$ und $BOC$ betrachten. Demnach ist

Fig. 15.




1) $AOB + BOC = AOC.$

Aus der gegenseitigen Lage der Winkel $AOB$, $BOC$ und $AOC$ ergiebt sich die Regel:

44. Soll man zwei Winkel addiren, so legt man sie so *an* einander, dass ihre Scheitel und einen Schenkel zusammenfallen. Dann ist ihre Summe der Winkel zwischen ihren anderen Schenkeln.

Zwei Winkel, welche so an einander liegen, dass sie den Scheitel und einen Schenkel gemeinsam haben, heissen anstossende Winkel.

Anm. Addition mehrerer Winkel durch wiederholte Anwendung von 44. Wie man zwei Winkel in die zum Addiren (und Subtrahiren) erforderliche Lage bringt, wird später gezeigt werden. (Aufgabe 1, Nr. 67.)

**38.** *Subtraction.* — Aus 1) folgt:

$$2)\ AOC - BOC = AOB.$$

Demnach ist $AOB$ die Differenz zwischen $AOC$ und $BOC$, und Fig. 15 liefert die Regel:

Soll man einen Winkel von einem andern subtrahiren, so legt man sie so *auf* einander, dass ihre Scheitel und einen Schenkel zusammenfallen. Dann ist ihre Differenz der Winkel zwischen ihren andern Schenkeln. 45.

Sind die durch Subtraction zu vereinigenden Winkel einander gleich, so fallen auch ihre zweiten Schenkel zusammen; also:

Legt man zwei gleiche Winkel so auf einander, dass ihre Scheitel und ersten Schenkel zusammenfallen, so fallen auch ihre zweiten Schenkel zusammen. 46.

Umgekehrt ist das Aufeinanderfallen der beiderseitigen Schenkel*) ein Zeichen für die Gleichheit der Winkel (vorausgesetzt, dass beide concav oder beide convex sind; vergl. Nr. 33); also:

Kann man zwei concave oder zwei convexe Winkel so auf einander legen, dass ihre beiderseitigen Schenkel zusammenfallen, so sind die Winkel gleich. 47.

**39.*** *Multiplication.* — Trägt man denselben Winkel ($\alpha$) $n$-mal hinter einander um einen Punkt $O$ herum an, so erhält man einen Winkel $\beta$, welcher $n$-mal so gross ist als der gegebene. Durch diese Construction ist also der gegebene Winkel ($\alpha$) mit der Zahl $n$ multiplicirt worden, und man hat

$$3)\ n \,.\, \alpha = \beta.$$

*Theilung.* — Aus 3) folgt:

$$4)\ \frac{\beta}{n} = \alpha.$$

Di in dieser Gleichung enthaltene Aufgabe, einen Winkel $\beta$

---

*) Das Zusammenfallen der Scheitel folgt dann von selbst aus 34.

in $n$ gleiche Theile zu theilen, ist nur in einzelnen, später zu betrachtenden Fällen lösbar. (Aufgabe 3, Nr. 70.)

**40.*** *Messung.* — Aus 3) folgt ferner:

$$5)\ \frac{\beta}{\alpha} = n;$$

48. d. h.: Der Quotient zweier Winkel ist eine Zahl. Der Winkel $\beta$ wird durch den Winkel $\alpha$ gemessen, indem man $\alpha$ so oft als möglich von $\beta$ abträgt. (Hierbei können dieselben Fälle unterschieden werden, wie bei Messung einer Strecke.)

Setzt man in 5) $\alpha = 1$, so wird $\beta = n$, d. h. auch eine Zahl. Setzt man also irgend einen bestimmten Winkel (z. B. den rechten Winkel) $= 1$, so kann man alle Winkel als Zahlen darstellen. Weiteres hierüber s. in der Trigonometrie.

### 2) Entgegengesetzte Seiten einer Ebene.

**41.** *Vorbemerkung.* — Ein Punkt hat (Nr. 8) im Anfange seiner Verschiebung die Auswahl unter einer unbeschränkten Menge von Bewegungen; das Unterscheidende dieser Bewegungen nannten wir ihre Richtung. Behielt der Punkt die zuerst gewählte Richtung der Verschiebung bei, so entstand eine Gerade, welche hierdurch das Merkmal einer bestimmten Richtung erhielt. Wir sahen aber später, dass die Gerade eigentlich zwei einander entgegengesetzte Richtungen hat. — Ebenso hat nun auch eine Gerade, die sich um einen ihrer Punkte drehen soll, die Auswahl unter einer unbeschränkten Menge von Bewegungen. Das Unterscheidende dieser Bewegungen nennen wir ihre Seite. Behält die Gerade die zuerst gewählte Seite der Drehung bei (dreht sie sich fortwährend nach derselben Seite), so entsteht eine Ebene, welche hierdurch das Merkmal einer bestimmten Seite erhält.

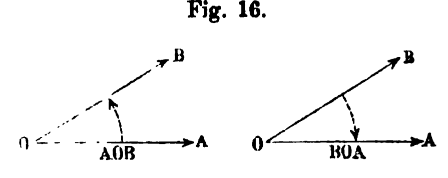
Anm. Wie durch eine Richtung eine einfach unendliche Menge von Lagen dargestellt ist, so durch eine Seite (im obigen Sinne) eine einfach unendliche Menge von Richtungen und eine zweifach unendliche ($\infty^2$) Menge von Lagen.

Wir werden nun im Folgenden sehen, dass auch die Ebene zwei einander entgegengesetzte Seiten hat, und dass eine Gerade in einer Ebene sich ebenso nach zwei entgegengesetzten Seiten drehen kann, wie ein Punkt auf einer Geraden sich nach zwei entgegengesetzten Richtungen verschieben konnte.

**42.** *Entgegengesetzte Drehungen.* — Ein Winkel $AOB$ in einer Ebene kann sowohl durch Drehung der Strecke $OA$ nach $OB$, wie durch Drehung von $OB$ nach $OA$ entstehen. Die Sei-

ten dieser beiden Bewegungen heissen einander **entgegengesetzt.** Die erste Drehung kann über *OB*, die zweite über *OA* hinaus beliebig fortgesetzt werden.

Fig. 16.




Demnach hat auch jede Ebene zwei entgegengesetzte Seiten. Ebenso hat jeder Winkel (als Ebenenstück betrachtet) zwei entgegengesetzte Seiten, die in der Zeichnung (Fig. 16) durch einen Pfeil, in der Benennung durch die Aufeinanderfolge der Buchstaben unterschieden werden können (*AOB* und *BOA*). 49.

Anm. Wie die Bewegung eines Punktes auf einer Geraden für das Auge in die entgegengesetzte übergeht, wenn man die Gerade in der entgegengesetzten Richtung betrachtet, so geht auch die Drehung einer Geraden in einer Ebene in die entgegengesetzte über, wenn man die Ebene von der entgegengesetzten Seite betrachtet. (Beispiele: ad 1. Bewegung eines Fussgängers auf einer Strasse, der sich, so lange er uns entgegenkommt, uns nähert, und sich, wenn wir ihm nach der Begegnung nachblicken, also die Strasse in entgegengesetzter Richtung betrachten, von uns entfernt; ad 2. Drehung der Flügel einer Windmühle, die für unser Auge nach derselben oder nach entgegengesetzter Seite wie die Drehung des Zeigers der Uhr stattfindet, je nachdem wir auf der einen oder andern Seite der Ebene stehen, in welcher die Flügel liegen.)

Aus 49 folgt: Jede Gerade in einer Ebene kann sich nach zwei entgegengesetzten Seiten drehen. — In der Ebene kann man an eine Gerade in einem ihrer Punkte einen Winkel nach zwei Seiten hin antragen. — Ueberhaupt kann man von einer Geraden aus in einer Ebene jede Construction auf zwei entgegengesetzte Arten so ausführen, dass die construirten Gebilde gleiche Grösse und Gestalt haben.

Gleiche Constructionen von einer (oder verschiedenen) Geraden aus nach entgegengesetzten Seiten einer Ebene geben gleiche aber entgegengesetzte (*symmetrische*) Resultate. (In Fig. 17 z. B. sind die an Grösse gleichen Winkel *AOB* und *AOB*$_1$ symmetrisch, und die Geraden *OB* und *OB*$_1$ liegen symmetrisch zu *OA*.) 50.

**43.*** *Positive und negative Winkel.* — Man kann den Gegensatz zwischen positiven und negativen Zahlen dadurch auf Winkel übertragen, dass man die eine der beiden Seiten einer Ebene, sowie alle durch Drehung nach dieser Seite entstandenen Winkel als positiv, die andere Seite und die durch

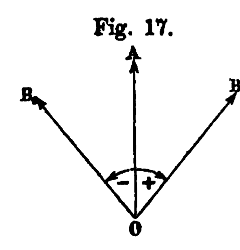


Fig. 17.

Drehung nach derselben entstandenen Winkel als **negativ** betrachtet.

Wird in Fig. 17 die Drehung von $OA$ nach $OB$ als positiv betrachtet, so ist $AOB_1$ negativ, und es ist

$$AOB_1 = -AOB.$$

Da ferner

$$AOB_1 = BOA$$

(weil beide Winkel gleich gross und durch Drehung nach derselben Seite entstanden sind), so ist auch

51. $$BOA = -AOB, \text{ oder } AOB + BOA = 0.$$

Anm. Die letzte Formel sagt, dass die Drehung von $OA$ nach $OB$, und nach $OA$ zurück die Richtung der Strecke $OA$ um den Winkel 0, d. h. gar nicht geändert hat; die vorletzte, dass ein Winkel sein Vorzeichen ändert, wenn man seine beiden Schenkel mit einander vertauscht.

**44.*** *Erweiterung.* — Sind in einer Ebene drei von einem Punkt ausgehende Strecken $OA$, $OB$, $OC$ gegeben, so ist (nach 44)

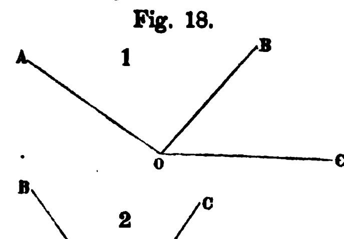


Fig. 18.

1) wenn $OB$ zwischen $OA$ und $OC$ liegt:

$$AOB + BOC = AOC,$$

2) wenn $OC$ zwischen $OB$ und $OA$ liegt:

$$BOC + COA = BOA,$$

oder:

$$BOC - AOC = -AOB \quad (51)$$

oder:

$$AOB + BOC = AOC,$$

3) wenn $OA$ zwischen $OC$ und $OB$ liegt:

$$COA + AOB = COB,$$

oder:

$$-AOC + AOB = -BOC,$$

oder:

$$AOB + BOC = AOC.$$

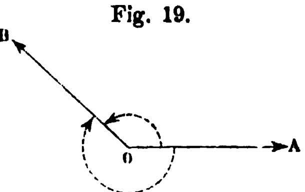
52. Hieraus folgt: Sind in einer Ebene drei von einem Punkt ausgehende Strecken $OA$, $OB$, $OC$ in beliebiger Richtung gegeben, so ist stets

$$AOB + BOC = AOC, \text{ oder: } AOB + BOC + COA = 0.$$

Sind zwei anstossende Winkel (Fig. 17) $B_1OA$ und $AOB_1$ gleich gross, so heisst $OA$ die Mittelrichtung zwischen den Richtungen $OB_1$ und $OB$. Die Mittelrichtung zwischen zwei

Geraden halbirt also, wenn sie durch ihren Schnittpunkt geht, den Winkel der beiden Geraden, und heisst daher **Halbirungslinie** des Winkels.

Fig. 19.




Anm. Gehen von einem Punkte $O$ zwei Strecken aus, $OA$ und $OB$, so bleibt, auch wenn man den Winkel der beiden Strecken durch $AOB$ bezeichnet, und dadurch sagt, dass er durch Drehung von $OA$ nach $OB$ entstanden sei, noch eine Zweideutigkeit übrig. Es kann nämlich (Fig. 19) $OA$ sowohl durch Drehung nach der linken, wie durch Drehung nach der rechten Seite in die Richtung $OB$ gelangen. Das eine Mal entsteht ein concaver, das andere Mal ein convexer Winkel $AOB$. Um diese Zweideutigkeit zu vermeiden, nimmt man für gewöhnlich an, dass die den Winkel erzeugende Drehung weniger als eine halbe Umdrehung betragen habe; anders gesagt: Man versteht unter dem Winkel zweier Strecken, wenn keine andere Bestimmung getroffen ist, den *concaven* Winkel. — Wie der Lagenunterschied zweier Punkte durch ihre gerade Verbindungsstrecke, so wird der Richtungsunterschied zweier Geraden durch den concaven Winkel ihrer Richtungen bestimmt; man kann daher einen concaven Winkel auch als den Richtungsunterschied zweier Geraden erklären.

### 8) Bewegung des Winkels in der Ebene.

**45.** *Vorbemerkung.* — Ein Winkel kann sich, ohne seine Grösse zu verändern, entweder so bewegen, dass seine Schenkel sich verschieben, oder so, dass sie sich drehen.

Im ersten Falle sind die Schenkel des ersten Winkels paarweise gleichgerichtet mit denen des zweiten, haben also auch denselben Richtungsunterschied wie diese, und man hat den Satz:

Winkel mit paarweise gleichgerichteten Schen- 53.
keln sind einander gleich.

Im zweiten Falle können entweder beide Schenkel, oder einer, oder keiner um den Scheitelpunkt des Winkels sich drehen. Diese 3 Fälle sind aber nach 36 nicht wesentlich von einander verschieden; wir betrachten also nur den ersten davon.

**46.*** Dreht sich ein Winkel $AOB$ in einer Ebene bis $A_1OB_1$, s bleibt der Richtungsunterschied seiner Schenkel ungeändert; d h.: der eine Schenkel hat sich ebensoweit gedreht als der a lere. Ist also

$$1)\ AOB = A_1OB_1,$$

s ist auch

$$2)\ AOA_1 = BOB_1$$

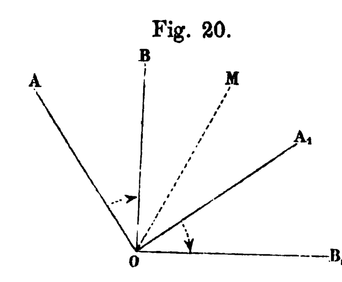


Fig. 20.

und umgekehrt. (Dasselbe Resultat folgt, wenn man auf beiden Seiten von 1) den Winkel $BOA_1$ addirt.)

Ist $OM$ die Mittelrichtung zwischen $OB$ und $OA_1$, so ist

3) $BOM = MOA_1$;

ferner

1) $AOB = A_1OB_1$;

folglich durch Addition:

4) $AOM = MOB_1$;

d. h.: $OM$ ist auch die Mittelrichtung zwischen $OA$ und $OB_1$. Oder:

54. Sind zwei Winkel in einer Ebene einander gleich, so haben die Winkel zwischen dem Anfangsschenkel des einen und dem Endschenkel des andern dieselbe Mittelrichtung.

Statt den Winkel $AOB$ nach $A_1OB_1$ zu bewegen, kann man auch an $OA_1$ in $O$ einen mit $AOB$ gleichen und nach derselben Seite gedrehten Winkel $A_1OB_1$ antragen. Und allgemein:

55. Gleiche Constructionen von verschiedenen Geraden aus nach derselben Seite einer Ebene geben gleiche und gleichstimmige (*congruente*) Resultate. (In Fig. 20 z. B. sind die gleichgrossen Winkel $AOB$ und $A_1OB_1$ congruent.)

Anm. Diese Betrachtungen lassen sich in ähnlicher Weise erweitern, wie es in Nr. 25 bei Strecken auf einer Geraden geschehen ist.

### 4) Nebenwinkel und Scheitelwinkel.

**47.** *Vorbemerkung.* — Bisher haben wir auf jeder der beiden Geraden ($a$, $b$), welche einen Winkel bildeten, nur eine Richtung berücksichtigt. Aber auch die entgegengesetzten Richtungen auf $a$ und $b$ bilden unter sich und mit den ursprünglichen Richtungen Winkel, sodass im Ganzen überall, wo zwei Geraden sich schneiden, vier concave Winkel entstehen.

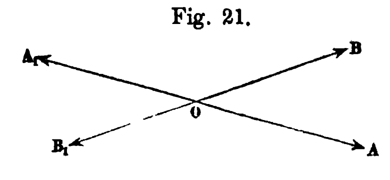


Fig. 21.

**48.** *Nebenwinkel.* — Die Winkel, welche eine Gerade mit den beiden entgegengesetzten Richtungen einer anderen bildet, heissen Nebenwinkel. (Z. B. $AOB$ und $A_1OB$.)

Nebenwinkel sind also solche anstossende Winkel, deren nicht gemeinsame Schenkel entgegengesetzte Richtung haben.

Anm. Wie construirt man zu einem gegebenen Winkel (*AOB*) einen Nebenwinkel? — Wieviele Nebenwinkel kann man zu jedem Winkel construiren? — Wieviel Paare von Nebenwinkeln entstehen, wenn, wie in Fig. 21, zwei Geraden sich schneiden? Wie heissen diese Paare? —

**49.** *Beziehung zwischen zwei Nebenwinkeln.* — Es ist

$$AOB + BOA_1 = AOA_1 \quad (44).$$

Aber $AOA_1$ ist ein gestreckter Winkel und als solcher gleich zwei rechten (Nr. 33); also ist, wenn man den rechten Winkel durch $R$ bezeichnet:

$$AOB + BOA_1 = 2R;$$

d. h.: Die Summe zweier Nebenwinkel beträgt 2 rechte. 56.

Anm. Dasselbe Resultat folgt aus der Betrachtung, dass die Strecke $OA$, wenn sie sich erst nach $OB$ und dann nach $OA_1$ dreht, einerseits nach einander die beiden Winkel $AOB$ und $BOA_1$, andrerseits im Ganzen den gestreckten Winkel $AOA_1$ beschreibt.

Wenn zwei Winkel verschiedene Grösse haben, welcher von ihnen hat dann den grösseren Nebenwinkel? — Wenn zwei Nebenwinkel gleich gross sind, wie gross ist dann jeder von ihnen? — Wie ist der Nebenwinkel eines spitzen, rechten, stumpfen Winkels beschaffen? — Wenn ein Winkel $n$mal so gross ist als sein Nebenwinkel, wie gross (in rechten Winkeln ausgedrückt) ist dann jeder von ihnen?

Gleiche Winkel haben gleiche Nebenwinkel. (Denn 57. sind zwei Summen einander gleich, und ebenso ihre ersten Summanden, so sind auch die zweiten Summanden gleich.)

Die Summe aller Winkel über einer Geraden (d. h. 58. aller auf einer Seite einer Geraden liegenden anstossenden Winkel mit gemeinsamem Scheitel) beträgt 2 rechte. (Folgt aus gleichen Gründen wie 56. Der Satz 58 geht in 56 über, wenn die Anzahl der anstossenden Winkel nur 2 beträgt.)

Die Summe aller Winkel um einen Punkt herum 59. (d. h. aller anstossenden Winkel mit gemeinsamem Scheitel) beträgt 4 rechte. (Folgt durch Anwendung von 58 auf die zu beiden Seiten einer Geraden liegenden Winkel, oder auch durch Anwendung des Begriffs der Drehung.)

Beträgt die Summe zweier anstossenden Winkel 60. 2 rechte, so sind sie Nebenwinkel. (Denn da alsdann di: Summe ein gestreckter Winkel ist, so haben die nicht g( neinsamen Schenkel der beiden Winkel entgegengesetzte R :htung.)

Anm. Im Satze 56 wird von zwei Winkeln vorausgesetzt, 1) dass si( anstossende Winkel sind, 2) dass ihre nicht gemeinsamen Schenkel en ;egengesetzte Richtung haben; es wird dann behauptet, dass ihre

Summe 2 rechte beträgt. — Im Satze 60 wird von zwei Winkeln vorausgesetzt, 1) dass sie anstossende Winkel sind, 2) dass ihre Summe 2 rechte beträgt; es wird dann behauptet, dass ihre nicht gemeinsamen Schenkel entgegengesetzte Richtung haben. — Der Satz 60 entsteht also aus 56, indem man eine Voraussetzung mit der Behauptung vertauscht, und heisst daher der Umkehrungssatz (die Umkehrung) von 56.

Jeder eine geometrische Wahrheit enthaltende Satz lässt sich in eine oder mehrere Voraussetzungen und in eine Behauptung zerlegen. Zu jedem Satze lässt sich also auch in der oben angegebenen Weise ein Umkehrungssatz (oder mehrere) aufstellen. Der Umkehrungssatz ist jedoch nur dann ohne weiteres richtig, wenn jede der beiden mit einander vertauschten Aussagen eine nothwendige Folge der andern ist. (Ist dies nur einseitig der Fall, so muss dem Umkehrungssatze noch eine Voraussetzung hinzugefügt werden.) — Unter den früheren Sätzen ist 18 die Umkehrung von 17, 47 die von 46.

Zwei (beliebig liegende) Winkel heissen, wenn sie zusammen zwei rechte betragen, Supplementwinkel, und, wenn sie zusammen einen rechten betragen, Complementwinkel.

Anm. Wann sind Nebenwinkel Supplementwinkel? Wann sind Supplementwinkel Nebenwinkel? Was wissen wir von zwei Winkeln, die zusammen vier rechte betragen? (S. Fig. 19.)

**50.** *Scheitelwinkel.* — Die beiden Nebenwinkel eines gegebenen Winkels heissen zusammen Scheitelwinkel. (Z. B. $AOB$ und $A_1OB_1$, Fig. 21.)

Der Scheitelwinkel eines Winkels ist also der Winkel, welchen die entgegengesetzten Richtungen der Schenkel des ersten bilden.

Anm. Wie construirt man zu einem gegebenen Winkel ($AOB$) den Scheitelwinkel? — Wieviele Scheitelwinkel kann man zu jedem Winkel construiren? — Wieviele Paare von Scheitelwinkeln entstehen, wenn, wie in Fig. 21, zwei Geraden sich schneiden? Wie heissen diese Paare?

**51.** *Beziehung zwischen zwei Scheitelwinkeln.* — Es ist

$$AOB = A_1OB_1,$$

weil nach 57 die beiden Nebenwinkel des (sich selbst gleichen) Winkels $A_1OB$ einander gleich sind. Also:

61. Zwei Scheitelwinkel sind einander gleich.

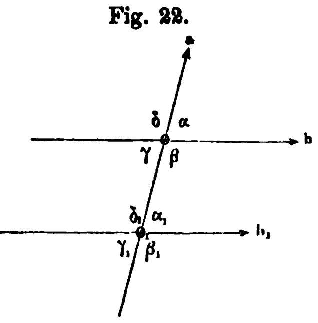
Anm. Dasselbe Resultat folgt aus der Betrachtung, dass die Winkel $BOA$ und $B_1OA_1$ durch ein und dieselbe Drehung (nämlich durch Drehung der Geraden $B_1B$ nach $A_1A$) entstehen, mithin auch gleiche Drehungsgrössen darstellen müssen. — Umkehrung zu 61: Trägt man zwei congruente Winkel in demselben Punkte an eine Gerade nach entgegengesetzten Seiten an, so bilden ihre nicht auf der Geraden liegenden Schenkel eine gerade Linie. Oder: Dreht sich ein Winkel (um seinen Scheitel) so, dass der eine Schenkel entgegengesetzte Richtung erhält, so erhält auch der andere entgegengesetzte Rich-
62. tung. Allgemeiner ausgedrückt lautet 61: Zwei Winkel sind einander gleich, wenn die Schenkel des einen zu denen des andern be[…] entgegengesetzte Richtung haben.

## $b_1$. Zwei von einer dritten Geraden geschnittene Parallelen.

**52.** *Vorbemerkung.* — Wenn eine Gerade $b$ erst durch Lagenänderung in $b_1$ und dann durch Richtungsänderung in $a$ übergegangen ist, so hat $a$ verschiedene Richtung mit $b_1$, und, weil $b$ und $b_1$ gleiche Richtung haben, auch mit $b$. Man hat also zwei von einer dritten Geraden ($a$) geschnittene Parallelen ($b$ und $b_1$). — Unter der Voraussetzung, dass auf jeder der drei Geraden nur eine einzige Richtung gilt, dass also zwei sich schneidende Geraden nur einen Winkel bilden, gelten die

**53.** *Erklärungen.* 1) Die Winkel, welche zwei Parallelen mit einer dritten Geraden bilden, heissen correspondirende Winkel ($\alpha$, $\alpha_1$).

Fig. 22.




Dadurch dass man entweder die schneidende Gerade, oder die Parallelen, oder alle drei Geraden in entgegengesetzter Richtung nimmt, erhält man noch drei Paare correspondirender Winkel, nämlich $\beta$, $\beta_1$; $\delta$, $\delta_1$; $\gamma$, $\gamma_1$.

Anm. Man suche in der Figur zu jedem Winkel seinen correspondirenden.

2) Ein Winkel und der Scheitelwinkel seines correspondirenden heissen zusammen Wechselwinkel ($\alpha$, $\gamma_1$).

Durch die oben erwähnte Einführung der entgegengesetzten Richtungen erhält man noch drei Paar Wechselwinkel, nämlich $\beta$, $\delta_1$; $\delta$, $\beta_1$; $\gamma$, $\alpha_1$.

Anm. Man suche in der Figur zu jedem Winkel seinen Wechselwinkel, anfangs mit Hilfe des correspondirenden, dann direct. — Es ist gleich, ob man den Scheitelwinkel des correspondirenden, oder den correspondirenden des Scheitelwinkels sucht.

3) Ein Winkel und der diesseitige (auf derselben Seite r schneidenden Geraden $a$ liegende) Nebenwinkel seines rrespondirenden heissen zusammen Gegenwinkel ($\alpha$, $\beta_1$).

Drei andere Paare von Gegenwinkeln sind $\beta$, $\alpha_1$; $\delta$, $\gamma_1$; $\gamma$, $\delta_1$.

Anm. Aufsuchung des Gegenwinkels zu einem gegebenen Winkel, e im Falle 2).

4) Ein Winkel und der jenseitige (auf entgegensetzter Seite der schneidenden Geraden $a$ liegende) Ne-

benwinkel seines correspondirenden heissen zusammen verschränkte Winkel ($\alpha$, $\delta_1$).

Drei andere Paare von verschränkten Winkeln sind $\beta$, $\gamma_1$; $\delta$, $\alpha_1$; $\gamma$, $\beta_1$.

Anm. Aufsuchung des verschränkten Winkels zu einem gegebenen Winkel, wie im Falle 2). — Vermischte Uebungen dieser und der vorigen Arten. — Angabe des gemeinsamen Namens für zwei in Fig. 22 beliebig gewählte Winkel.

**54.** *Lagenbeziehungen der Winkelpaare an Parallelen.* — Werden zwei Parallelen von einer dritten Geraden geschnitten, so können je 2 der entstehenden 8 Winkel folgende Lagen haben: 1) zur schneidenden Geraden: beide auf derselben Seite oder auf entgegengesetzter Seite; 2) zu den Parallelen: beide oberhalb (unterhalb) oder innerhalb (ausserhalb). Welche Lage hiernach die vier Arten der Winkelpaare an Parallelen haben, geht aus der Figur, sowie aus der folgenden Zusammenstellung hervor. Es liegen

zur schneidenden Geraden

| zu den Parallelen | | auf derselben S. | auf entgegenges. S. |
|---|---|---|---|
| | oberhalb oder unterhalb | Correspondirende W. | Verschränkte W. |
| | innerhalb oder ausserhalb | Gegenwinkel | Wechselwinkel. |

Anm. Mit Hilfe der Betrachtung der Figur, und dann ohne dieselbe beantworte man folgende Fragen: Welche Lage zur schneidenden Geraden und zu den Parallelen haben (z. B.) correspondirende Winkel? — Wie heissen die Winkel, welche (z. B.) auf derselben Seite der Schneidenden und innerhalb oder ausserhalb der Parallelen liegen? — Welche beiden Arten von Winkeln liegen (z. B.) auf derselben Seite der Schneidenden? — Was haben (z. B.) Gegenwinkel und Wechselwinkel Gemeinsames in ihrer Lage?

**55.** *Grössenbeziehungen der Winkelpaare an Parallelen.* — Da es für die Grösse der Drehung einer Geraden gleichgilti ist, um welchen ihrer Punkte die Gerade sich dreht (36), s gelten die (auch unmittelbar einleuchtenden) Sätze:

63. Haben zwei Geraden gleiche Richtung, so habe sie auch gleichen Richtungsunterschied gegen ein dritte.

Haben zwei Geraden gleichen Richtungsunterschied gegen eine dritte, so haben sie auch gleiche Richtung. 64.

Anm. Hierbei ist vorausgesetzt, dass die beiden Drehungen, durch welche (Fig. 22) $a$ in die Richtungen $b$ und $b_1$ geräth, nach derselben Seite der Ebene hin stattfanden; demnach gilt der zweite der beiden Sätze nur im Gebiete der Ebene; der erste dagegen (als dessen Umkehrung man den zweiten betrachten kann) gilt allgemein.

Aus 63 folgt:

Zwei correspondirende Winkel sind einander gleich. 65.

Zwei Wechselwinkel sind einander gleich. (63 und 61.) 66.

Zwei Gegenwinkel betragen zusammen 2 $R$. (63 und 56.) 67.

Zwei verschränkte Winkel betragen zusammen 2 $R$. (63 und 56.) 68.

Anm. Auf Fig. 22 angewendet, enthält jeder der Sätze 65—68 vier Behauptungen, da jede Art von Winkeln in der Figur viermal vorkommt. Aus jeder dieser 16 Behauptungen (als Voraussetzung betrachtet) kann man mittelst der Sätze 56 und 61 jede der übrigen ableiten. (Uebungen!) — In allgemeinerer Ausdrucksweise lauten die Sätze 67 und 68: Zwei Winkel betragen zusammen 2 $R$, wenn von den Schenkeln des ersten der eine gleiche, der andere entgegengesetzte Richtung mit einem Schenkel des zweiten hat. — Der allgemeinere Ausdruck für 65 ist 53, für 66 ist es 62. 69.

Aus 64 folgt:

Werden zwei Geraden von einer dritten so geschnitten, dass ein Paar correspondirende Winkel gleich sind, so sind die Geraden parallel. (Umkehrung von 65.) 70.

Anm. Da man nach voriger Anm. die Gleichheit zweier correspondirender Winkel aus jeder der 12 übrigen Voraussetzungen ableiten kann, so folgt die Parallelität zweier Geraden auch aus der Gleichheit zweier Wechselwinkel, oder aus der Voraussetzung, dass zwei verschränkte oder Gegenwinkel zusammen 2 $R$ betragen.

**56.** *Specieller Fall.* — Ist von den acht Winkeln der Fig. 22 ıer ein rechter, so sind sie alle rechte (nach 56, 61, 65). .raus folgt:

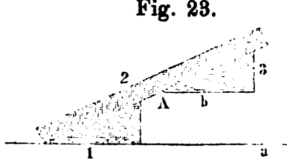
Steht eine Gerade auf einer von zwei Parallelen nkrecht, so steht sie auch auf der anderen senk'cht (65). 71.

Zwei Geraden, welche auf einer dritten senkrecht ;hen, sind parallel (70). 72.

**57.** *Erweiterung.* — Ist 1) $a \parallel b$, 2) $a_1 \perp a$, 3) $b_1 \perp b$, so folgt aus 1) und 2) (nach 71): 4) $a_1 \perp b$, und aus 3) und 4) (nach 72): $a_1 \parallel b_1$; d. h.:

73. Die auf jeder von zwei Parallelen errichteten Senkrechten sind selbst parallel.

Fig. 23.




Anm. Vorläufige Lösung der Aufgabe: Durch einen gegebenen Punkt ($A$) zu einer gegebenen Geraden ($a$) die Parallele ($b$) zu ziehen, mittelst des Lineals und eines rechtwinkligen Dreiecks. — Man lege Dreieck und Lineal in der Stellung 12 zusammen, und schiebe beides an der Geraden $a$ entlang, bis die untere Kante des Lineals durch $A$ geht (Fig. 23). Dann halte man das Lineal fest und schiebe das Dreieck an demselben entlang, bis seine untere Kante ebenfalls durch $A$ geht (Stellung 3). Die untere Kante $b$ ist dann nach 70 mit $a$ parallel. — Eine nur Lineal und Cirkel erfordernde Lösung folgt später. (Nr. 79, Aufgabe 6.)

**58.*** *Der unendlich ferne Punkt einer Geraden.* — Wenn die Gerade $a$ (Fig. 22) sich um den Punkt $O$ dreht, um in die Richtung $b$ zu gelangen, so rückt ihr Schnittpunkt mit $b_1$ (der Punkt $O_1$) auf der Geraden $b_1$ fort (in der Figur nach links) und entfernt sich so immer weiter von seiner ursprünglichen Lage. So lange die Gerade $a$ noch nicht in die mit $b_1$ parallele Richtung $b$ gelangt ist, existirt dieser Schnittpunkt in endlicher, messbarer Entfernung. Ist aber $a$ in $b$ übergegangen, also mit $b_1$ parallel geworden, so sagt man, der Schnittpunkt der Geraden $a$ und $b_1$ sei in unendliche Entfernung gerückt. Statt also zu sagen: zwei Parallelen haben keinen (endlich entfernten) Punkt gemeinsam, kann man auch sagen: sie schneiden sich in einem unendlich fernen Punkte. — Da zwei Parallelen gleiche Richtung haben, so kann man den unendlich fernen Punkt einer Geraden auch als Vertreter ihrer Richtung ansehen. Und da jede Gerade zwei einander entgegengesetzte Richtungen hat, so ist es gleichgiltig, ob man sich den unendlich fernen Schnittpunkt zweier Parallelen durch Verfolgung der einen oder der anderen Richtung auf den Parallelen erreichbar denkt. Es ist also für eine einzige Gerade auch gleichgiltig, nach welcher ihrer beiden Richtungen hinausliegend man sich ihren unendlich fernen Punkt vorstellt.

Dreht sich in Fig. 22 die Gerade $a$, nachdem sie die Richtung $b$ erreicht hat, noch weiter, so kommt ihr Schnittpunkt mit $b_1$, welcher vorher nach links in unendliche Ent-

fernung gerückt war, von rechts her aus unendlicher Entfernung wieder zum Vorschein und nähert sich wieder seiner ursprünglichen Lage in $O_1$.

Hiernach erscheint die Parallelität zweier Geraden als ein specieller Fall des Schneidens, und man kann mit Hilfe der eben festgestellten Ausdrucksweise sagen, dass zwei Geraden in einer Ebene stets einen Punkt gemeinsam haben, nämlich einen endlich entfernten (oder die Lage), wenn sie sich schneiden, einen unendlich fernen (oder die Richtung), wenn sie parallel sind. — Ebenso erscheint die Verschiebung einer Geraden als specieller Fall der Drehung, nämlich als Drehung um den unendlich fernen Punkt der Geraden.

Anm. Von selbst ist klar, dass man die Verschiebung einer Geraden, bei welcher ihre Richtung ungeändert bleibt, als Drehung von der Grösse Null betrachten kann, dass also zwei Parallelen einen Winkel von der Grösse Null bilden, während zwei sich schneidende Geraden einen Winkel bilden, dessen Grösse, durch ein bestimmtes Mass gemessen, durch irgend eine andere Zahl ausgedrückt werden kann. Da nun die Null eine specielle Zahl ist, so fordert schon die Analogie, dass man zwei Geraden, deren Winkel gleich Null ist, als speciellen Fall von zwei sich schneidenden Geraden betrachte, deren Winkel durch eine andere Zahl ausgedrückt wird. — Diese Anschauungsweise bietet den grossen Vortheil, dass Sätze, welche schneidende Geraden betreffen, sofort ohne Weiteres Sätze über Parallelen liefern, sobald man den Schnittpunkt der Geraden in unendliche Ferne rücken lässt. Der Nachtheil, dass der unendlich ferne Punkt, als Punkt vorgestellt, sich der Anschauung entzieht, fällt weg, sobald man seine Identität mit der Richtung festhält. — Es zeigt sich dann u. a. sogleich, dass die Bestimmung einer Geraden durch Lage und Richtung ein specieller Fall von ihrer Bestimmung durch zwei Punkte ist, dass also das Ziehen einer Parallelen zu einer gegebenen Geraden durch einen gegebenen Punkt ein specieller Fall ist von der Verbindung zweier Punkte durch eine Gerade u. s. w.

Betrachtet man in Fig. 22 die Entfernungen des Schnittpunktes der Geraden $a$ und $b_1$ von seiner Anfangslage $O_1$ nach links als negative, nach rechts als positive Zahlen, so ändert sich bei der oben beschriebenen Bewegung von $a$ die Entfernung zwischen dem Schnittpunkte und $O_1$ von 0 bis $-\infty$, springt dann nach $+\infty$ über (sodass im Falle der Parallelität ‑n $a$ und $b_1$ diese Entfernung sowohl durch $+\infty$ wie durch $\infty$ bezeichnet werden kann) und nimmt dann von $+\infty$ bis 0 . Hiernach kann der Uebergang aus dem Positiven ins Ne‑tive sowohl durch 0 wie durch $\infty$ hindurch erfolgen, und ‑ kann $\infty$ ebenso wie 0 ohne Aenderung des Werthes eben‑wohl positiv wie negativ gedacht werden.

Anm. Die oben beschriebene Bewegung des Schnittpunktes der ‑raden $a$ und $b_1$ findet sich verwirklicht in der Bewegung, welche das

Bild eines leuchtenden Punktes im sphärischen Spiegel ausführt, wenn der leuchtende Punkt die Axe des Spiegels durchläuft.

Unter allen Punkten einer sich drehenden Geraden ist der Drehungspunkt der einzige, welcher sich nicht bewegt. Die von diesem Punkte beschriebene Kreislinie fällt also mit dem Punkte selbst, der ihr Mittelpunkt ist, zusammen, und da hiernach ihr Radius die Grösse Null hat, so folgt:

74. Ein Punkt kann als Kreislinie mit einem Radius von der Grösse Null betrachtet werden, deren Mittelpunkt mit dem Punkte selbst zusammenfällt.

Wenn eine Gerade ($a$) (ohne in ihrer eigenen Richtung fortzurücken) sich verschiebt, so kann man diese Verschiebung als Drehung um ihren unendlich fernen Punkt betrachten. Jeder Punkt der Geraden $a$ beschreibt alsdann selbst eine Gerade, welche auf $a$ senkrecht steht (Nr. 28 u. 33). Daraus folgt:

75. Eine Gerade kann als Kreislinie mit unendlich grossem Radius betrachtet werden, deren Mittelpunkt der unendlich ferne Punkt einer zu der Geraden Senkrechten ist.

## $c_1$. Drei Geraden, die sich in drei Punkten schneiden. — Das Dreieck.

**59.** *Vorbemerkungen.* — Drei Geraden, die sich in drei Punkten schneiden, begrenzen vollständig einen Theil der Ebene, bilden also eine Figur, welche Dreieck heisst. Die zwischen je zwei Punkten liegenden Strecken, welche die Grenzen der Dreiecksfläche bilden, heissen Seiten(linien) des Dreiecks, und an jeder Ecke heisst derjenige Winkel, dessen Schenkel Seiten des Dreiecks sind (der also innerhalb der Dreiecksfläche liegt) Winkel des Dreiecks. Ein Dreieck hat also drei Seiten und drei Winkel. — Jeder Winkel eines Dreiecks hat zwei Nebenwinkel, welche Aussenwinkel des Dreiecks heissen, und einen Scheitelwinkel. Von den 12 Winkeln, welche durch drei sich schneidende Geraden gebildet werden, sind also drei die Winkel, sechs die Aussenwinkel des Dreiecks, und die drei letzten die Scheitelwinkel der ersten. — In Bezug auf eine Seite des Dreiecks heissen die beiden Wir kel, deren Scheitel die Endpunkte dieser Seite sind, die de Seite anliegenden Winkel; der dritte heisst der der Sei gegenüberliegende Winkel. — In Bezug auf einen Wink heissen die beiden Seiten, welche seine Schenkel bilden, d den Winkel einschliessenden Seiten, die dritte heisst di

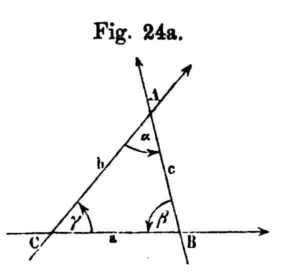
dem Winkel gegenüberliegende Seite. — Es liegen sich also im Dreieck gegenseitig je ein Winkel und eine Seite gegenüber.

Sind $A$, $B$, $C$ die Ecken eines Dreiecks, so bezeichnet man das Dreieck selbst durch $\overline{ABC}$.

Anm. Welches sind hiernach die z. B. der Seite $AB$ anliegenden Winkel, die den Winkel $ABC$ einschliessenden Seiten? Diese und ähnliche Fragen beantworte man erst mit Hilfe der Figur, dann aus dem Kopfe.

Die Bezeichnung der Seiten eines Dreiecks geschieht auch durch kleine lateinische Buchstaben, sodass jede Seite den der gegenüberliegenden Ecke entsprechenden Buchstaben erhält. Also: $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. — Die Bezeichnung der Winkel eines Dreiecks geschieht ebenso durch kleine griechische Buchstaben. Also: $BAC = \alpha$, $CBA = \beta$, $ACB = \gamma$.

Fig. 24a.




1) Sinn des Dreiecks.

**60.*** Wie die Ebene, so kann auch das Dreieck, welches ein Theil derselben ist, von zwei entgegengesetzten Seiten betrachtet werden. — Bewegt sich ein Punkt auf dem Umfange des Dreiecks (Fig. 24) von $A$ über $B$ und $C$ nach $A$ zurück, so hat er die Fläche des Dreiecks beständig zur Rechten oder beständig zur Linken, je nachdem man das Dreieck von der einen oder der andern Seite der Ebene betrachtet. Man sagt, zwei Dreiecke (Figuren) seien in gleichem oder entgegengesetztem Sinne construirt, je nachdem zwei ihre Umfänge durchlaufenden Punkte die Flächen der Figuren auf derselben oder auf entgegengesetzter Seite haben.

Denkt man sich das Dreieck (Fig. 24) entstanden durch Drehung der Geraden $a$ nach $b$ und dann nach $c$, so geht diese Drehung in die entgegengesetzte über, wenn man das eieck von der entgegengesetzten Seite der Ebene betrachtet. n kann also auch sagen, zwei Dreiecke (Figuren) seien in ichem oder entgegengesetztem Sinne construirt, je nachdem Winkel des einen nach derselben oder der entgegengesetz- Seite gedreht sind, wie die Winkel des andern.

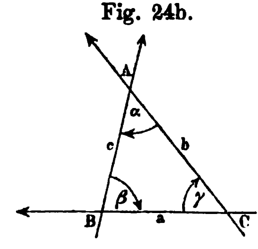
Anm. Nach 50 und 55 sind also congruente Dreiecke in gleichem, ımetrische in entgegengesetztem Sinne construirt.

**2) Beziehungen zwischen den Winkeln eines Dreiecks.**

**61.** *Innere Winkel.* — Dreht sich die Gerade $a$ um $C$ nach $b$, darauf $b$ um $A$ nach $c$, so kann $c$ durch eine Drehung um $B$ in die zu $a$ entgegengesetzte Richtung gelangen. Die Grössen dieser drei Drehungen sind dann der Reihe nach durch die Winkel $\gamma$, $\alpha$, $\beta$ ausgedrückt. Also:

$a$ um $C$ gedreht, beschreibt den Winkel $\gamma$;
$b$ » $A$ » » » » $\alpha$;
$c$ » $B$ » » » » $\beta$;

Fig. 24b.




Da $a$ durch diese drei Drehungen entgegengesetzte Richtung erhält, so hat es im Ganzen einen gestreckten Winkel beschrieben. Und da es für die Grösse der Drehungen gleichgiltig ist, um welchen Punkt die Gerade sich dreht (36), so ist die Summe der Winkel $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ gleich einem gestreckten oder $2R$. Man hat also den Satz:

76. Die Winkel eines Dreiecks betragen zusammen zwei Rechte. — $\alpha + \beta + \gamma = 2R$.

Anm. Anderer Beweis für 76: Die durch $A$ zu $BC$ gezogene Parallele bildet mit der Seite $c$ einen Winkel $\beta_1 = \beta$ (66) und mit Seite $b$ einen Winkel $\gamma_1 = \gamma$ (66). Da nun $\beta_1 + \alpha + \gamma_1 = 2R$ (58), so ist auch $\beta + \alpha + \gamma = 2R$. — Statt $\gamma_1$ kann man auch seinen Scheitelwinkel benutzen, der nach 65 gleich $\gamma$ ist.

Aus 76 folgt:

77. Durch zwei Winkel eines Dreiecks ist der dritte bestimmt.

78. Sind in zwei Dreiecken zwei Winkel gleich, so ist auch der dritte in beiden gleich.

Ein Dreieck kann nicht mehr als einen stumpfen oder einen rechten Winkel enthalten; dagegen kann es drei spitze Winkel enthalten. — Hierauf beruht die Eintheilung der Dreiecke nach der Beschaffenheit ihrer Winkel in stumpfwinklige, rechtwinklige und spitzwinklige. Stumpf- und spitzwinklige Dreiecke führen auch den gemeinsame Namen schiefwinklige.

Anm. In einem Dreieck sei ein Winkel ein stumpfer, rechter, spitze wie gross ist dann (mit $1R$ verglichen) die Summe der beiden anderen? - In einem Dreieck sei ein Winkel gleich der Summe der beiden andere wie gross ist er dann? — Von einem Dreieck, in welchem zwei Wink einander gleich sind, kennt man 1) den ungleichen Winkel $\alpha$; 2) eine der gleichen Winkel $\beta$. Wie findet man die Grösse 1) des gleichen, 2) d

ungleichen Winkels? — In einem Dreieck seien alle drei Winkel einander gleich; wie gross ist jeder?

**62.** *Aussenwinkel.* — In Fig. 24 kann *a* in die Richtung *c* auf zwei Wegen gelangen: 1) durch Drehung um *B*, wobei der Nebenwinkel von $\beta$ beschrieben wird; 2) durch zwei Drehungen um *C* und *A*, wobei die Winkel $\gamma$ und $\alpha$ beschrieben werden. — Demnach ist der Nebenwinkel von $\beta$ (ein Aussenwinkel des Dreiecks) gleich $\alpha + \gamma$, und man hat den Satz:

Jeder Aussenwinkel eines Dreiecks ist gleich 79.
der Summe der beiden an den andern Ecken liegenden Innenwinkel.

Anm. Andere Beweise für 79: Die durch *B* zu *AC* gezogene Parallele theilt den Aussenwinkel in zwei Theile, deren einer (nach 65) gleich $\gamma$, deren anderer (nach 66) gleich $\alpha$ ist. — Der Winkel $\beta$ beträgt mit $\alpha$ und $\gamma$ zusammen (nach 76), ebenso wie mit dem Aussenwinkel (nach 56) $2R$.

Aus 79 folgt:

Ein Aussenwinkel des Dreiecks ist grösser als 80.
jeder der an den andern Ecken liegenden Innenwinkel.

**63.** *Erweiterungen.* — Zieht man in einem Dreieck *ABC* (Fig. 25) eine beliebige Gerade *AD* aus einer Ecke nach der gegenüberliegenden Seite, so ist nach 80 $ADB > ACB$. Ebenso, wenn man im Dreieck *ABD* die Gerade *BE* zieht: $AEB > ADB$. Also:

$$AEB > ACB.$$

Fig. 25.

D. h.: Verbindet man einen Punkt im Innern eines Dreiecks mit zwei Ecken, 81.
so ist der Winkel der Verbindungslinien grösser als der Winkel an der dritten Ecke.

Anm. Anderer Beweis für 81: Man ziehe *CE*, verlängere bis *AB* und benutze 80. — Der Winkel *ACB* wird also grösser oder kleiner, je nachdem der Punkt *C* in gerader Linie irgend einem Punkte der Strecke *AB* sich nähert oder sich von ihm entfernt. Der Winkel *ACB* heisst der Gesichtswinkel, unter welchem ein in *C* befindliches Auge die Strecke ; erblickt. Durch die Grösse des Gesichtswinkels wird die scheinbare ·össe eines Gegenstandes bestimmt. Schluss aus der bekannten Grösse es Gegenstandes auf seine Entfernung, oder aus seiner bekannten Entnung auf seine Grösse. — In welchen beiden Fällen ist der Gesichtsnkel gleich (oder annähernd gleich) Null? — Augenmass. — Täuschung sselben, wenn Grösse und Entfernung unbekannt ist (Entfernung eines rges).

**64.** Nimmt eine Gerade nach *n* (statt nach 3) Drehungen selbe oder entgegengesetzte Richtung an, so erhält man *n*

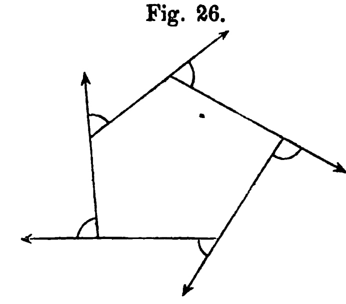
Geraden, die in jeder Aufeinanderfolge eine Figur mit $n$ Ecken (ein $n$-Eck, Vieleck, Polygon) und $n$ Winkeln bilden.

Da von jeder Ecke zwei Seiten ausgehen, so würde die Zahl der Seiten $2n$ sein. Da aber je zwei von diesen Seiten zusammenfallen (z. B. die von $A$ nach $B$ gehende mit der von $B$ nach $A$ gehenden), so beträgt die Zahl der Seiten nur $n$. Man hat also den Satz:

82. Jedes Polygon hat ebensoviele Seiten als Winkel und Ecken.

Die Winkelsumme eines Polygons hängt von der Zahl der ganzen Umdrehungen ab, welche die Gerade machen muss.

Fig. 26.



Um ein $n$-Eck zu beschreiben, in welchem keine Seite von einer anderen anders als in den Eckpunkten geschnitten wird, braucht die Gerade (Fig. 26) nur eine Umdrehung zu machen. Die Summe der Aussenwinkel eines $n$-Ecks beträgt also $4R$. Da nun jeder Winkel der Figur mit seinem Aussenwinkel zusammen $2R$ beträgt (56), so ist die Summe aller Aussen- und Innenwinkel $2nR$, also die Summe der Winkel des $n$-Ecks allein $(2n - 4)R$. Man erhält also den Satz:

83. Die Winkelsumme eines $n$-Ecks, in welchem keine Seite von einer andern geschnitten wird, beträgt $(2n - 4)R$. — Speciell:

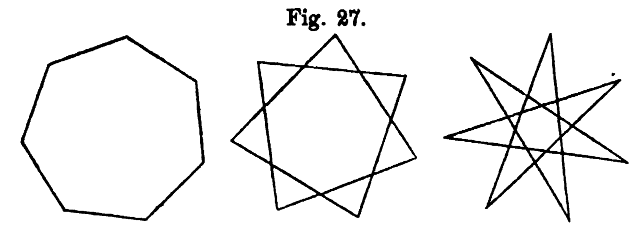
84. Die Winkelsumme eines Vierecks beträgt $4R$.

Anm. Andere Beweise für 83: Verbindet man einen Punkt in einem der Aussenwinkel-Räume des $n$-Ecks mit allen Ecken, so ist die Winkelsumme des $n$-Ecks gleich der Winkelsumme der übrigen $(n-1)$ Dreiecke, vermindert um die Winkelsumme des von den äussersten Verbindungslinien gebildeten Dreiecks, also gleich $2(n-1)-2$ oder $(2n-4)R$, wie oben gefunden. — Verbindet man einen Punkt im Innern des $n$-Ecks mit allen Ecken, und wendet 76 und 59 an, so erhält man dasselbe Resultat.

Erweiterungen: $n$ Geraden schneiden sich in $n \cdot {}^2$ Punkten un bilden $\frac{(n-1)!}{2}$ $n$-Ecke. (Hierbei können Punkte zusammenfallen oder i unendliche Entfernung rücken.) $n$ Punkte können paarweise durch $n \cdot$ Geraden verbunden werden und bilden $\frac{(n-1)!}{2}$ n-Ecke. (Hierbei könne Geraden zusammenfallen oder parallel werden.) — Die Summe der co vexen Winkel eines Dreiecks beträgt $10R$, eines $n$-Ecks $(2n + 4)R$.

Man untersuche die Bildungsgesetze und die Winkelsummen der sogenannten Sternfiguren. Als Beispiel zeigt Fig. 27 die drei Stern-Siebenecke. Welche der drei Figuren enthält 2, welche alle 3 Siebenecke?

Fig. 27.



**3) Bestimmung des Dreiecks durch seine Stücke.**

**65.** *Vorbemerkung.* — Seiten und Winkel eines Dreiecks heissen seine Stücke. Ein Dreieck hat also 6 Stücke. Soll ein Dreieck aus gegebenen Stücken construirt werden, so können sich zunächst nicht alle 3 Winkel darunter befinden; denn nach 77 wäre der dritte Winkel entweder überflüssig oder der Bedingung 76 widersprechend.

**66.** Ist zur Construction des Dreiecks nur ein Stück gegeben, so kann man sich dasselbe in fester Lage denken. Ist es eine Seite, so kann jeder (endlich ferne) Punkt der Ebene (sofern er nicht auf der durch die Seite bestimmten Geraden liegt) die gegenüberliegende Ecke des Dreiecks sein. Ist es ein Winkel, so kann jede (mit keinem der Schenkel parallele) Gerade der Ebene (sofern sie nicht durch den Scheitel des Winkels geht) die gegenüberliegende Seite des Dreiecks sein.

Sind zur Construction des Dreiecks zwei Stücke gegeben, unter denen sich wenigstens eine Seite befindet,*) so kann man sich diese Seite in fester Lage denken. Die gegenüberliegende Ecke ist dann aber nicht mehr ein beliebiger Punkt der Ebene, sondern liegt auf einer bestimmten Linie, welche der geometrische Ort dieser Ecke genannt wird.

Anm. Allgemein heisst eine Linie, auf welcher ein mit einer bestimmten Eigenschaft begabter Punkt liegen muss, der geometrische Ort ses Punktes. So lange der Punkt sich auf dieser Linie bewegt, behält seine Eigenschaft; sobald er die Linie verlässt, verliert er sie. Sind einen Punkt zwei geometrische Oerter gegeben, so muss er auf zwei ien zugleich liegen, d. h. im Schnittpunkte der beiden Linien. (Schneisich die beiden Linien in mehreren Punkten, so besitzt jeder dieser

*) Der Fall, dass 2 Winkel gegeben sind, wird später behandelt 110, 1).

85. Punkte die beiden verlangten Eigenschaften.) **Ein Punkt ist also im Allgemeinen durch zwei geometrische Oerter vollkommen bestimmt.**

Ausser einer Seite ($a$) kann zur Bestimmung des Dreiecks gegeben sein: 1) ein anliegender Winkel ($\beta$ oder $\gamma$); 2) eine zweite Seite ($b$ oder $c$); 3) der gegenüberliegende Winkel ($\alpha$). — Es soll zunächst der geometrische Ort der Ecke $A$ für die beiden ersten Fälle bestimmt werden; der dritte Fall wird später (167) nachgeholt.

1) Ist zu einem Dreieck eine Seite ($a$) und ein anliegender Winkel ($\beta$) gegeben, so muss die der Seite $a$ gegenüberliegende Ecke $A$ auf dem zweiten Schenkel des an $a$ in seinem Endpunkte angetragenen Winkels $\beta$ liegen. Man hat also den Satz:

86. **Ist zu einem Dreieck eine Seite und ein anliegender Winkel gegeben, so ist der geometrische Ort der dritten Ecke der zweite Schenkel des an die Seite in ihrem Endpunkte angetragenen Winkels.** — ($a\beta$)

Anm. Ist die Seite festgelegt, so kann der Winkel auf vier verschiedene Arten angetragen werden.

2) Sind zu einem Dreieck zwei Seiten ($a$, $b$) gegeben, so muss der eine Endpunkt von $a$ ($C$) auch Endpunkt von $b$ sein. Man kennt also die Länge und die Lage der Seite $b$, nur nicht ihre Richtung. Der andere Endpunkt von $b$ ($A$) ist dann die der Seite $a$ gegenüberliegende Ecke. Dreht sich $b$ um $C$, so beschreibt $A$ eine Kreislinie. Man hat also den Satz:

87. **Sind zu einem Dreieck zwei Seiten gegeben, so ist der geometrische Ort der dritten Ecke die mit der zweiten Seite aus einem Endpunkte der ersten beschriebene Kreislinie.** — ($ab$)

Sind zur Construction des Dreiecks **drei** Stücke gegeben, so muss sich unter denselben wenigstens **eine** Seite befinden (da nicht alle drei Stücke Winkel sein dürfen). Ist diese Seite festgelegt, so sind durch sie 2 Ecken des Dreiecks bestimmt. Zur Bestimmung der dritten Ecke hat man aber zwei geometrische Oerter. Den einen liefert $a$ in Verbindung mit dem zweiten, den andern wiederum $a$ in Verbindung mit dem dritten der gegebenen Stücke. Die dritte Ecke ist also ebenfalls vollkommen bestimmt, und dadurch das ganze Dreieck. Man hat also den Satz:

88. **Zur Bestimmung eines Dreiecks sind drei seiner Stücke nothwendig und hinreichend.**

Aus 50 und 55 folgt nun: **Zwei Dreiecke, welche aus denselben drei Stücken in derselben Weise, jedoch an verschiedenen Stellen der Ebene, construirt sind, sind einander congruent oder symmetrisch.** 89.

**67.** ***Die einzelnen Fälle der Bestimmung eines Dreiecks durch drei Stücke.*** — Von den 6 Stücken des Dreiecks können auf folgende Arten drei zur Bestimmung gewählt werden:

1a) Eine Seite und die beiden anliegenden Winkel. ($a\beta\gamma$)

1b) Eine Seite, ein anliegender und der gegenüberliegende Winkel. ($a\beta\alpha$)

2) Zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel. ($ab\gamma$)

3) Zwei Seiten und ein nicht eingeschlossener Winkel. ($ab\beta$)

4) Drei Seiten. ($abc$)

Anm. Der Fall 1b) ist von 1a) nicht verschieden, weil, wenn man $\beta$ und $\alpha$ kennt, nach 77 auch $\gamma$ bekannt, also das Dreieck statt durch $a\beta\alpha$ auch durch $a\beta\gamma$ bestimmt ist.

**Erster Fall. Eine Seite und die beiden anliegenden Winkel** ($a\beta\gamma$). — Ist $a$ festgelegt, so ist nach 86 der **erste** geometrische Ort der Ecke $A$ (aus $a\beta$) der zweite Schenkel des in $B$ an $a$ angetragenen Winkels $\beta$. Der **zweite** geometrische Ort der Ecke $A$ (aus $a\gamma$) ist der zweite Schenkel des in $C$ an $a$ angetragenen Winkels $\gamma$. Da die beiden geometrischen Oerter sich nur in **einem** Punkte schneiden (34), so entsteht nur **ein** Dreieck.

Fig. 28.

Anm. Damit die Schenkel von $\beta$ und $\alpha$ sich schneiden, müssen diese Winkel auf derselben Seite von $a$ angetragen werden. — Vier Constructionen, deren Resultate unter sich theils congruent, theils symmetrisch sind. — Was findet statt, wenn $\beta + \gamma = 2R$?

Aus 89 folgt nun:

**Erster Congruenzsatz: Zwei Dreiecke sind congruent (oder symmetrisch), wenn sie in einer Seite und den beiden anliegenden Winkeln übereinstimmen.** 90.

Anm. Andrer Beweis von 90: Wenn die beiden Dreiecke $ABC$ und $A_1B_1C_1$ sind, so lege man $A_1B_1C_1$ so auf $ABC$, dass $B_1$ auf $B$ und $B_1C_1$ in Richtung $BC$ fällt. Dann fällt $C_1$ auf $C$ (17). Ferner fällt $B_1A_1$ in Richtung $BA$, und $C_1A_1$ in die Richtung $CA$ (46). Folglich fällt $A_1$ auf $A$ (34). Die beiden Dreiecke fallen also in eins zusammen.

**Zweiter Fall. Zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel** ($ab\gamma$). — Ist $a$ festgelegt, so ist nach 87 der

erste geometrische Ort der Ecke $A$ (aus $ab$) die aus $C$ mit $b$ beschriebene Kreislinie.*) Der zweite geometrische Ort der Ecke $A$ (aus $a\gamma$) ist der zweite Schenkel des in $C$ an $a$ angetragenen Winkels $\gamma$. Da die beiden geometrischen Oerter sich nur in einem Punkte schneiden, so entsteht nur ein Dreieck.

Fig. 29.

Anm. Denkt man sich statt der Seite $a$ den Winkel $\gamma$ in fester Lage, so hat man, um $A$ und $B$ zu erhalten, auf seinen Schenkeln die Strecken $b$ und $a$ von $C$ aus abzutragen. Die gegenüberliegende Seite $c$ ist dann (nach 14) vollkommen bestimmt.

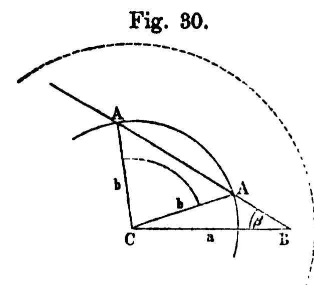
Aus 89 folgt nun:

91. Zweiter Congruenzsatz. Zwei Dreiecke sind congruent (oder symmetrisch), wenn sie in zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel übereinstimmen.

Anm. Andrer Beweis von 91: Wenn die beiden Dreiecke $\overline{ABC}$ und $\overline{A_1B_1C_1}$ sind, so lege man $\overline{A_1B_1C_1}$ so auf $\overline{ABC}$, dass $B_1$ auf $B$ und $B_1C_1$ in die Richtung $BC$ fällt. Dann fällt $C_1$ auf $C$ (17). Ferner fällt $B_1A_1$ in die Richtung $BA$ (46), und $A_1$ auf $A$ (17). Folglich fällt $C_1A_1$ auf $CA$ (14). Die beiden Dreiecke fallen also in eins zusammen.

Dritter Fall. Zwei Seiten und ein nicht eingeschlossener Winkel ($ab\beta$). — Ist $a$ festgelegt, so ist nach 87 der erste geometrische Ort der Ecke $A$ (aus $ab$) die aus $C$ mit $b$ beschriebene Kreislinie. Der zweite geometrische Ort der Ecke $A$ (aus $a\beta$) ist der zweite Schenkel des in $B$ an $a$ angetragenen Winkels $\beta$. Die beiden geometrischen Oerter schneiden sich entweder gar nicht, oder in einem Punkte (wenn $b > a$), oder in zwei Punkten (wenn $b < a$).**) Das Dreieck ist also nur im zweiten Falle vollkommen bestimmt. Im dritten Falle sind zwei verschiedene Dreiecke möglich, und es muss zu den drei vorhandenen Bedingungen noch eine vierte treten, damit die Con-

Fig. 30.




*) Dieselbe ist in Fig. 29, wie auch später, der Raumersparniss wegen nur theilweise gezeichnet. Für die Ausführung der Constructionen empfiehlt es sich, alle Linien, welche geometrische Oerter bedeuten, punktirt (gestrichelt) zu zeichnen.

**) Die beiden ersten Fälle sind in der Figur durch punktirte Kreislinien angedeutet.

gruenz der Dreiecke für diesen Fall ausgesprochen werden kann. (Vgl. 104.)

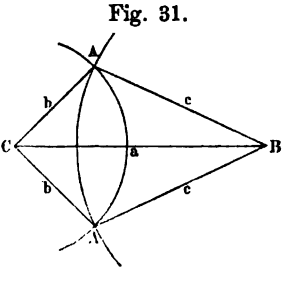
Für den zweiten Fall folgt nun aus 89:

Dritter Congruenzsatz: Zwei Dreiecke sind congruent (oder symmetrisch), wenn sie in zwei Seiten und dem der grösseren von ihnen gegenüberliegenden Winkel übereinstimmen. 92.

Anm. Andrer Beweis von 92 folgt in Nr. 69 am Schluss.

Vierter Fall. Drei Seiten (*abc*). — Ist *a* festgelegt, so ist nach 87 der erste geometrische Ort der Ecke *A* (aus *ab*) die aus *C* mit *b* beschriebene Kreislinie, und der zweite (aus *ac*) die aus *B* mit *c* beschriebene Kreislinie. Da jede der beiden Kreislinien symmetrisch zu *a* ist (denn die Construction der Kreislinie, deren Mittelpunkt auf *a* liegt, ist auf beiden Seiten von *a* dieselbe), so sind auch ihre beiden Schnittpunkte (*A*) symmetrisch zu *a* construirt, mithin sind die beiden entstehenden Dreiecke ($\overline{ABC}$) selbst symmetrisch.

Fig. 31.




Anm. Damit die beiden Kreislinien sich schneiden, muss $b + c > a$ sein.

Aus 89 folgt nun:

Vierter Congruenzsatz: Zwei Dreiecke sind congruent (oder symmetrisch), wenn sie in den drei Seiten übereinstimmen. 93.

Anm. Andrer Beweis von 93 folgt in Nr. 69 am Schluss. Construction eines Dreiecks aus drei gegebenen Strecken; dgl. eines Dreiecks, welches einem gegebenen Dreieck congruent ist. (Lösung aus Fig. 31 ersichtlich.)

Aus der Uebereinstimmung zweier Figuren in Gestalt und Grösse folgt, dass sie vollständig in eine Figur zusammenfallen (sich decken), wenn man sie sich an dieselbe Stelle der Ebene gebracht denkt. Da in diesem Falle alle Eckpunkte paarweise zusammenfallen, so muss dasselbe (nach 14) mit den Seiten, und mit den Winkeln stattfinden; d. h. alle Seiten und alle Winkel (nach 47) der beiden Figuren müssen paarweise gleich sein.

Kann man also die Congruenz zweier Dreiecke aus der Gleichheit von drei entsprechenden (homologen) Stücken nachweisen, so folgt hieraus die Gleichheit der übrigen homologen Stücke von selbst, und man hat den Satz:

94. **In zwei congruenten (symmetrischen) Dreiecken sind je zwei homologe Stücke einander gleich.**

Anm. Man kann hiernach die Gleichheit von Strecken und Winkeln nachweisen, wenn es gelingt, diese Gebilde durch Construction in Dreiecke zu bringen, deren Congruenz man aus der Gleichheit anderer Stücke beweisen kann.

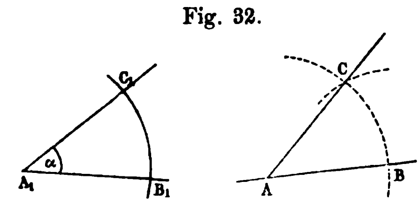
Insbesondere folgt aus 93, dass, wenn zwei Dreiecke in den Seiten übereinstimmen, auch ihre Winkel paarweise gleich sind. — Man kann diesen Umstand benutzen, um die Fundamentalaufgabe zu lösen:

Aufgabe 1. — Einen gegebenen Winkel ($\alpha$) in einem gegebenen Punkte ($A$) einer gegebenen Geraden anzutragen.

Man bringt den Winkel in ein Dreieck, und construirt ein congruentes Dreieck (vgl. Anm. zu 93) so, dass der Scheitel und ein Schenkel des Winkels die geforderten Bedingungen erfüllen.

In kürzester Form lautet die Lösung: Man schneide mittelst des Cirkels vom Scheitel des Winkels aus ($A_1$) beliebige aber gleiche Strecken ($A_1C_1$ und $A_1B_1$) auf den Schenkeln ab, beschreibe mit derselben Cirkelöffnung eine Kreislinie aus $A$, welche die gegebene Gerade in $B$ schneidet. Dann nehme man die Strecke $B_1C_1$ in den Cirkel und beschreibe aus $B$ eine Kreislinie, welche die erste in $C$ schneidet. Verbindet man noch $C$ mit $A$, so ist $CAB = \alpha$.

Fig. 32.




Anm. Worin bestehen die Abkürzungen dieses Verfahrens? Auf wie viele Arten kann die Aufgabe gelöst werden? — Construction eines Dreiecks aus $a\beta\gamma$, $a\beta\alpha$ (man suche erst $\gamma$), $ab\gamma$, $aba$. — Construction einer Parallele zu einer gegebenen Geraden ($a$) durch einen gegebenen Punkt ($A$) mittelst einer beliebigen durch $A$ gezogenen Geraden $b$. Der Winkel ($ab$) wird in $A$ an $b$ als correspondirender Winkel angetragen. (Eine bequemere Lösung dieser Aufgabe folgt in Nr. 79.)

68.* *Erweiterung.* — Ein $n$-Eck hat 2 $n$ Stücke, nämli[ch] $n$ Seiten und $n$ Winkel (82). Hat man ein $n$-Eck bis auf ei[ne] Seite ($AB$) construirt, so fehlen ausser dieser Seite noch d[ie] beiden anliegenden Winkel. Da man aber zwischen $A$ und [B] nur **eine** gerade Strecke ziehen kann, so sind diese drei fe[h]lenden Stücke sämmtlich durch die übrigen bestimmt, die m[a]n zur Construction gebrauchte. Dies giebt den Satz:

Ein $n$-Eck ist durch $2n-3$ seiner Stücke bestimmt. 95.

Anm. Durch wieviel Stücke ist ein Viereck bestimmt? Von welcher Art können die drei nicht gegebenen Stücke eines $n$-Ecks sein?

### 4) Beziehungen zwischen den Winkeln und Seiten eines Dreiecks.

**69.** *Das gleichschenklige Dreieck.* — Trägt man an eine Strecke $BC$ nach beiden Seiten in ihrem einen Endpunkte $B$ einen Winkel $\beta$, im andern Endpunkte $C$ einen Winkel $\gamma$ an, so erhält man zwei symmetrische Dreiecke (90) $ABC$ und $A_1BC$. In diesen ist nach Construction:

$BC = BC$, $ABC = A_1BC$, $ACB = A_1CB$, 96.

und nach 94:

$AB = A_1B$, $AC = A_1C$, $BAC = BA_1C$. 97.

Fig. 33.

Ist der Winkel $\gamma$ ein rechter, (Fig. 34) so sind die anstossenden Winkel $ACB$ und $A_1CB$ Nebenwinkel (60); d. h.: die Punkte $ACA_1$ liegen in gerader Linie, und das Viereck $\overline{ABA_1C}$ geht in ein Dreieck $\overline{ABA_1}$ über, in welchem $AB = A_1B$ ist.

Fig. 34.

Ein Dreieck, in welchem zwei Seiten einander gleich sind, heisst gleichschenklig. Die gleichen Seiten ($AB$ und $A_1B$) heissen Schenkel, die ungleiche Seite ($AA_1$) die Basis des Dreiecks. Die der Basis gegenüberliegende Ecke ($B$) heisst Spitze des Dreiecks. Der von den Schenkeln eingeschlossene Winkel ($ABA_1$) heisst Winkel an der Spitze, die an der Basis liegenden Winkel ($BAA_1$ und $BA_1A$): Winkel an der Basis.

Ein Dreieck, in welchem alle drei Seiten einander gleich sind, heisst gleichseitig. — Hiernach kann man die Dreiecke nach der Beschaffenheit ihrer Seiten eintheilen in ungleichseitige, gleichschenklige, gleichseitige.

Anm. Da jede der letzten beiden Arten ein specieller Fall der vorhergehenden ist, so gelten alle für ein ungleichseitiges Dreieck abgeleiteten Sätze von selbst für das gleichschenklige, und alle Sätze vom gleichschenkligen Dreieck für das gleichseitige. — Das gleichseitige Dreieck kann in dreifacher Weise als gleichschenkliges betrachtet werden. — Wie vereinfachen sich die Congruenzsätze für rechtwinklige und gleichschenklige Dreiecke?

Da die in 96 und 97 ausgesprochenen Eigenschaften der Fig. 33 auch für Fig. 34 gelten, so hat man (indem man $BC = BC$, $BA = BA_1$, $ABC = A_1BC$ zu Voraussetzungen wählt) die Sätze:

98. **Gleichen Seiten eines Dreiecks liegen gleiche Winkel gegenüber.** (Oder: **Im gleichschenkligen Dreieck sind die Winkel an der Basis einander gleich.**)

99. **Halbirt man im gleichschenkligen Dreieck den Winkel an der Spitze, so steht die Halbirungslinie senkrecht auf der Basis und halbirt dieselbe.**

Anm. Umkehrungssätze. Zu 98: Gleichen Winkeln eines Dreiecks liegen gleiche Seiten gegenüber. (Zum Beweise halbire man den dritten Winkel und benutze 78 und 90.)

Zu 99: Verbindet man im gleichschenkligen Dreieck die Spitze mit der Mitte der Basis, so steht die Verbindungslinie senkrecht auf der Basis und halbirt den Winkel an der Spitze (93).

Fällt man im gleichschenkligen Dreieck eine Senkrechte von der Spitze auf die Basis, so halbirt dieselbe die Basis und den Winkel an der Spitze (98, 78, 90).

Ein weiterer Umkehrungssatz zu 99 folgt später (119).

100. Aus 98 folgt: **Im gleichseitigen Dreieck sind alle Winkel gleich, und jeder beträgt** $\frac{2}{3}R$. (76)

101. **Der Aussenwinkel an der Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks ist doppelt so gross als jeder Basiswinkel.** (79)

102. **Die Basiswinkel eines gleichschenkligen Dreiecks sind stets spitz, die Aussenwinkel an der Basis stumpf.**

103. **Ein gleichschenkliges Dreieck, in welchem ein Winkel** $\frac{2}{3}R$ **beträgt, ist gleichseitig.** (76, 100)

Anm. Wählt man in Fig. 33 $BA = BA_1$, $BC = BC$, $CA = CA_1$ zu Voraussetzungen, und verbindet $A$ mit $A_1$, so ist nach 98 im Dreieck $BAA_1 : BAA_1 = BA_1A$, und im Dreieck $CAA_1 : CAA_1 = CA_1A$, folglich durch Addition: $BAC = BA_1C$; also $\overline{BAC} \cong BA_1C$ nach 91. Hierdurch ist 93 bewiesen.

Wählt man in Fig. 33 $BA = BA_1$, $BC = BC$, $BAC = BA_1C$ zu Voraussetzungen und verbindet $A$ mit $A_1$, so ist nach 98 im Dreieck $\overline{BAA_1} : BAA_1 = BA_1A$, und da $BAC = BA_1C$, so folgt durch Subtraction: $CAA_1 = CA_1A$; folglich (nach Umkehrung von 98) $CA = CA_1$, also $\overline{BAC} \cong BA_1C$ nach 93. Hierdurch ist 92 bewiesen. — Ist $BC < BA$, so kann man zu einem Dreieck $BAC$ (Fig. 35) ein andres construiren ($BA_1C$), welches mit dem ersten in zwei Seiten und den

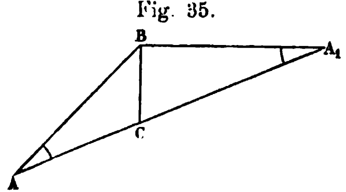


Fig. 35.

der kleineren gegenüberliegenden Winkel übereinstimmt, ohne dass beide Dreiecke congruent sind. (Zwei solche Dreiecke entstehen, wie die Figur zeigt, jedesmal, wenn man die Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks mit einem Punkte der Basis, den Mittelpunkt ausgenommen, verbindet.) Der der grösseren Seite gegenüberliegende Winkel ist dann in dem einen Dreieck ($BCA$) stumpf, im anderen ($BCA_1$) spitz. (Warum?) Dieser Fall wird also ausgeschlossen, wenn man die Bedingung hinzufügt, dass der der grösseren Seite gegenüberliegende Winkel in beiden Dreiecken $\gtreqless R$ ist. So erhält man als Ergänzung zu 92 den Satz: Zwei Dreiecke sind 104.
congruent (oder symmetrisch), wenn sie in zwei Seiten und dem der kleineren von ihnen gegenüberliegenden Winkel übereinstimmen, während der der grösseren gegenüberliegende Winkel in beiden Dreiecken ein spitzer, rechter oder stumpfer ist.

Speciell: Rechtwinklige Dreiecke sind congruent (oder sym- 105.
metrisch), wenn sie in zwei homologen Seiten übereinstimmen.

**70.** *Zwei gleichschenklige Dreiecke.* — Verbindet man in Fig. 33 die Punkte $A$ und $A_1$, so entstehen zwei gleichschenklige Dreiecke $BAA_1$, $CAA_1$, mit gemeinsamer Basis, auf welcher $BC$ senkrecht steht (99). Dies giebt den Satz:

Construirt man über derselben Basis zwei gleich- 106.
schenklige Dreiecke, so halbirt die Verbindungslinie ihrer Spitzen die Winkel an den Spitzen und die Basis, und steht senkrecht zur Basis.

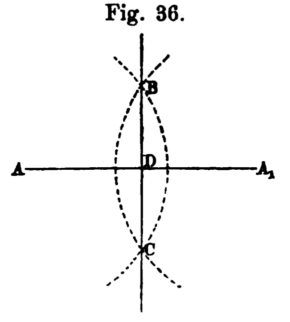
Da die in 106 erwähnte Construction (nach Anm. zu 93) bereits bekannt ist, so kann man diesen Satz benutzen, um folgende Fundamentalaufgaben zu lösen:

Aufgabe 2. — Eine gegebene Strecke ($AA_1$) zu halbiren.

Man bringt die Strecke als gemeinsame Basis in zwei gleichschenklige Dreiecke und verbindet ihre Spitzen.

In kürzester Form lautet die Lösung: Man beschreibe aus den beiden Endpunkten der Strecke mit derselben Cirkelöffnung Kreislinien, die sich in zwei Punkten ($B$, $C$) schneiden. Die Verbindungslinie dieser Punkte halbirt die Strecke $AA_1$ in $D$.

Fig. 36.

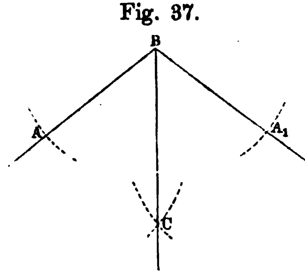



Anm. Theilung einer Strecke in 4, 8 gleiche Theile durch Wiederholung dieses Verfahrens. — Man halbire die drei Seiten eines Dreiecks und verbinde jeden Halbirungspunkt mit der gegenüberliegenden Ecke. Diese Verbindungslinien heissen die Mittellinien des Dreiecks.

**Aufgabe 3. — Einen gegebenen Winkel ($ABA_1$) zu halbiren.**

Man bringt den Winkel als Winkel an der Spitze in eins von zwei gleichschenkligen Dreiecken mit gemeinsamer Basis, und verbindet ihre Spitzen.

Fig. 37.




In kürzester Form lautet die Lösung: Man schneide mit dem Cirkel vom Scheitel aus gleiche Strecken ($BA$ und $BA_1$) auf den Schenkeln ab, und beschreibe aus den Endpunkten ($A$ und $A_1$) mit derselben Cirkelöffnung Kreislinien, die sich in zwei Punkten schneiden. Die Verbindungslinie eines dieser Punkte ($C$) mit $B$ halbirt den Winkel $ABA_1$.

Anm. Theilung eines Winkels in 4, 8 gleiche Theile durch Wiederholung dieses Verfahrens. — Man halbire die drei Winkel (und die Aussenwinkel) eines Dreiecks. Diese Linien heissen die Winkelhalbirenden des Dreiecks. — Vgl. erste Anm. in Nr. 91.

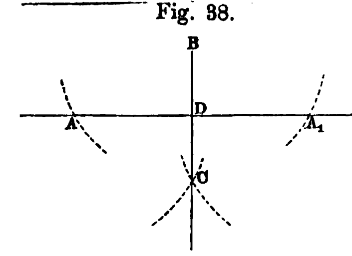
Ist der Winkel $ABA_1$ ein gestreckter, so enthält die eben beschriebene Construction die Lösung der

**Aufgabe 4. — Auf einer gegebenen Geraden ($AA_1$) in einem gegebenen Punkte ($B$) die Senkrechte zu errichten.**

Anm. Man errichte in den Mitten der drei Seiten eines Dreiecks die Senkrechten. Diese Linien heissen die Mittelsenkrechten des Dreiecks.

**Aufgabe 5. — Von einem gegebenen Punkte ($B$) aus die Senkrechte auf eine gegebene Gerade ($AA_1$) zu fällen.**

Fig. 38.




Man macht den Punkt zur Spitze des einen von zwei gleichschenkligen Dreiecken, deren gemeinsame Basis auf der Geraden liegt, und verbindet ihre Spitzen.

In kürzester Form lautet die Lösung: Man beschreibe aus dem Punkte eine Kreislinie, welche die Gerade in zwei Punkten ($A$ und $A_1$) schneidet, und aus $A$ und $A_1$ mit derselben Cirkelöffnung Kreislinien, die sich in zwei Punkten schneiden. Die Verbindungslinie eines dieser Punkte ($C$) mit $B$ steht auf $AA_1$ senkrecht.

Anm. Man fälle aus den drei Ecken eines Dreiecks die Senkrechten auf die gegenüberliegenden Seiten. Diese Linien heissen die **Höhen** des Dreiecks.

**71.** *Das ungleichseitige Dreieck.* — Verbindet man einen beliebigen Punkt $E$ auf einem der Schenkel eines gleichschenkligen Dreiecks mit der gegenüberliegenden Ecke $A$, so ist in dem (ungleichseitigen) Dreieck $\overline{BAE}$ $BA > BE$. Ferner $BEA >$ der Basiswinkel $BA_1A$ (80), und $BAE <$ der Basiswinkel $BAA_1$. Mithin $BEA > BAE$. Man hat also die Sätze:

Fig. 39.

Der grösseren von zwei Seiten eines Dreiecks liegt der grössere Winkel gegenüber. — Dem grösseren von zwei Winkeln eines Dreiecks liegt die grössere Seite gegenüber. 107.

Aus 107 folgt: Der grössten Seite im Dreieck liegt der grösste Winkel gegenüber, und umgekehrt. — Demnach ist im stumpfwinkligen Dreieck die dem stumpfen Winkel gegenüberliegende Seite die grösste, und im rechtwinkligen ist die dem rechten Winkel gegenüberliegende Seite (die **Hypotenuse**) grösser als jede der beiden anderen Seiten (**Katheten**). Kurz:

Im rechtwinkligen Dreieck ist die Hypotenuse grösser als jede Kathete. 108.

**72.** Verbindet man einen beliebigen Punkt $E$ auf der Verlängerung eines der Schenkel eines gleichschenkligen Dreiecks mit der gegenüberliegenden Ecke $A$, so ist (bei Verlängerung über die Spitze hinaus) in dem Dreieck $\overline{EAA_1}$ $EAA_1 > EA_1A$ (weil $EAA_1 > BAA_1$ und $BAA_1 = BA_1A$), folglich $EA_1 > EA$ (107), oder (da $EA_1 = EB + BA_1$ und $BA_1 = BA$ ist): $EB + BA > EA$; d. h.:

Fig. 40.

In jedem Dreieck ist die Summe zweier Seiten grösser als die dritte 109.
(selbst wenn diese, wie in Fig. 40, die grösste ist).

Hat die Verlängerung des Schenkels über den Endpunkt der Basis hinaus stattgefunden (Fig. 41), so ist im Dreieck $\overline{EAA_1}$ $EAA_1 < EA_1A$ (weil $EA_1A$ nach 102 stumpf ist), folglich $EA_1 < EA$ (107), oder (da $EA_1 = EB - BA_1$ und $BA_1 = BA$ ist): $EB - BA < EA$; d. h.:

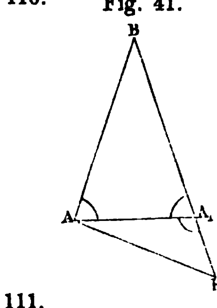
110. 

Fig. 41.

In jedem Dreieck ist die Differenz zweier Seiten kleiner als die dritte (selbst wenn diese, wie in Fig. 41, die kleinste ist).

Anm. 110 ist auch eine unmittelbare Folge von 109, da aus $EB + BA > EA$ folgt: $EB > EA - BA$.

**73.** *Erweiterungen.* — In Fig. 25 ist $AC + CD > AD$ (109); also durch Addition von $DB$: $AC + CB > AD + DB$. Aus demselben Grunde ist $AD + DB > AE + EB$; also: $AC + CB > AE + EB$; d. h:

111. Verbindet man einen Punkt im Innern eines Dreiecks mit zwei Ecken, so ist die Summe der Verbindungslinien kleiner als die Summe der von der dritten Ecke ausgehenden Seiten. (Vgl. 81.)

Verbindet man in einem Vieleck zwei auf anstossenden Seiten liegende Punkte, so ist der Umfang des neuen (eine Seite mehr enthaltenden) Vielecks kleiner als der des gegebenen (109). Denkt man sich dieses Verfahren auf das Dreieck angewendet und dann wiederholt, so erhält man den Satz:

112. Von zwei über derselben Strecke construirten Vielecken, deren Umfänge sich nicht schneiden, und von denen das innere nur concave Winkel enthält, hat das innere den kleineren Umfang.

Betrachtet man die gerade Verbindungsstrecke zweier Punkte als Zweieck (weitere Ausführung dieser Betrachtung!), so erscheint 109 als specieller Fall von 112. Den kleinsten Umfang unter allen über einer Strecke beschriebenen Figuren hat hiernach das Zweieck (d. h. die Strecke selbst), weil innerhalb desselben keine andere Figur möglich ist. Da, wie eine spätere Betrachtung zeigen wird, jede krumme Linie als Grenzfall einer aus geraden Strecken bestehenden angesehen werden kann (vgl. Anm. in Nr. 102), so kann man sagen:

113. Unter allen Verbindungslinien zwischen zwei Punkten ist die gerade die kürzeste. (Die gerade Strecke ist der kürzeste Weg zwischen zwei Punkten.)

**74.** *Entfernung.* — Die kürzeste Linie, die zwischen zwei geometrischen Gebilden gezogen werden kann, heisst ihre Entfernung (Abstand).

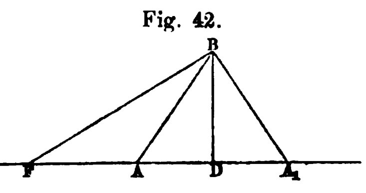
Hiernach ist die Entfernung zweier Punkte die gerade Verbindungsstrecke zwischen ihnen.

Aus 108 folgt:

Unter allen Strecken, die man zwischen einem Punkte und einer Geraden ziehen kann, ist die Senkrechte die kürzeste. 114.

Demnach ist die Entfernung eines Punktes von einer Geraden die von dem Punkte auf die Gerade gefällte Senkrechte. — Nennt man den auf der Geraden liegenden Endpunkt einer von einem Punkte (*B*) nach ihr gezogenen Strecke den Fusspunkt der Strecke, so folgt aus 99:

Fig. 42.




Sind von einem Punkte nach einer Geraden 115.
(ausser der Senkrechten) zwei gleichlange Strecken gezogen, so haben deren Fusspunkte vom Fusspunkte der Senkrechten gleichen Abstand (und umgekehrt).

Da auf einer Geraden nur zwei Punkte existiren, deren Abstand von einem gegebenen Punkte (*D*) gleich einer gegebenen Strecke ist, so folgt der Satz:

Von einem Punkte ausserhalb einer Geraden kann 116.
man nach der Geraden nur zwei unter sich gleiche Strecken ziehen.

Anm. Drei Punkte auf einer Geraden können also von einem ausserhalb liegenden Punkte nicht gleichen Abstand haben, so lange dieser Punkt sich in endlicher Entfernung befindet.

Im Dreieck $\overline{BFA}$ (Fig. 42) ist $BF > BA$ (107, 102). Da gleichzeitig $DF > DA$, so folgt:

Sind von einem Punkte nach einer Geraden (ausser 117.
der Senkrechten) zwei ungleiche Strecken gezogen, so hat der Fusspunkt der längeren auch den grösseren Abstand vom Fusspunkte der Senkrechten (und umgekehrt).

Da ferner $BAD > BFD$ (80), so folgt weiter:

Stimmen zwei rechtwinklige Dreiecke ($\overline{BFD}$, $\overline{BAD}$) 118.
in einer Kathete überein, so hat dasjenige Dreieck, welches die grössere Hypotenuse hat, die grössere andere Kathete, aber den kleineren der ersten Kathete gegenüberliegenden Winkel (und umgekehrt).

Denkt man sich in Fig. 42 durch *B* die Parallele zu $AA_1$ gezogen, so ist nach 114 unter allen Strecken, die man von einem Punkte *B* dieser Parallele nach $AA_1$ ziehen kann, die Senkrechte *BD* die kürzeste. Und da alle Punkte der Paral-

lelen, wenn sie sich nach $AA_1$ verschiebt, gleiche Bewegungen machen, so kann auch kein anderer ihrer Punkte auf kürzerem Wege als $B$ die Gerade $AA_1$ erreichen. Demnach ist die Entfernung zweier Parallelen die in irgend einem Punkte der einen errichtete senkrechte Strecke.

Die Entfernung zweier Gebilde, die einen Punkt gemeinsam haben, ist (nach der Definition der Entfernung) gleich Null. Demnach ist auch die Entfernung zweier sich schneidenden Geraden gleich Null.

Da man über derselben Basis beliebig viele Paare gleichschenkliger Dreiecke construiren kann, für deren jedes Satz 106 gilt, und da nach diesem Satze die Verbindungslinie der Spitzen für alle dieselbe sein muss, so folgt, dass alle diese Spitzen auf der in der Mitte der Basis errichteten Senkrechten liegen. Dies giebt einen weiteren Umkehrungssatz zu 99, nämlich:

119. Errichtet man auf der Basis eines gleichschenkligen Dreiecks in ihrer Mitte eine Senkrechte, so geht dieselbe durch die Spitze.

Da ferner jeder Punkt dieser Senkrechten als Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks von den Endpunkten der Basis gleichweit entfernt ist, so hat man den Satz:

120. Der geometrische Ort eines Punktes, der von zwei gegebenen Punkten gleichweit entfernt ist, ist die auf der Verbindungsstrecke beider Punkte in ihrer Mitte errichtete Senkrechte.

Trägt man auf den Schenkeln eines Winkels $ABA_1$ (Fig. 33) vom Scheitel aus gleiche Stücke ab ($BA = BA_1$), und in den Endpunkten gleiche Winkel an ($BAC = BA_1C$) deren Schenkel sich in $C$ schneiden, so ist $CA = CA_1$ und $ABC = A_1BC$.

Ist insbesondere $BAC = BA_1C = R$, so sind $CA$ und $CA_1$ die Entfernungen des Punktes $C$ von $BA$ und $BA_1$. Und da man, vom Winkel $ABA_1$ ausgehend, beliebig viele Punkte $C$ in der angegebenen Weise construiren kann, die alle auf der Geraden $BC$ liegen, so hat man den Satz:

121. Jeder Punkt der Halbirungslinie eines Winkels ist von den Schenkeln desselben gleichweit entfernt.

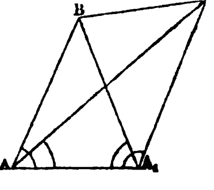
122. Oder: Der geometrische Ort eines Punktes, welcher von zwei gegebenen Geraden gleichweit entfernt ist, ist das Geradenpaar, welches die Winkel der gegebenen Geraden halbirt.

Anm. Da die Hälften zweier Nebenwinkel zusammen einen Rechten betragen, so stehen diese winkelhalbirenden Geraden auf einander senkrecht.

**75.** Zieht man aus einem Endpunkte ($A$) der Basis eines gleichschenkligen Dreiecks eine beliebige Strecke ($AE$), welche den gegenüberliegenden Schenkel schneidet, und verbindet $E$ auch mit den beiden anderen Ecken des Dreiecks, so ist

$EAA_1 < BAA_1$ und $EA_1A > BA_1A$;

Fig. 43.



also, da $BAA_1 = BA_1A$ (98):

$EA_1A > EAA_1$;

folglich (107): $EA > EA_1$.

In den Dreiecken $\overline{ABE}$ und $\overline{A_1BE}$, in welchen $AB = A_1B$ und $BE = BE$, ist also gleichzeitig $ABE > A_1BE$ und $AE > A_1E$. Man hat also den Satz:

Sind in zwei Dreiecken zwei Seiten gleich, die eingeschlossenen Winkel aber ungleich, so hat dasjenige Dreieck, welches die grössere dritte Seite hat, auch den grösseren eingeschlossenen Winkel (und umgekehrt). 123.

Anm. Sind im Allgemeinen in zwei Dreiecken zwei Stücke (unter denen wenigstens eine Seite ist) gleich, während ein drittes Stück ungleich ist, so sind auch die drei anderen Stücke ungleich. Man kann in jedem einzelnen Falle in ähnlicher Weise, wie soeben geschehen, untersuchen, in welchem der beiden Dreiecke ein bestimmtes Stück das grössere ist. (Vgl. Nr. 91.) Viel einfacher aber ergeben sich alle diese Resultate aus den Sätzen der Trigonometrie.

**76.*** *Rückblick.* — Zwischen den oben betrachteten Gebilden: Punkt und Strecke, Gerade und Winkel, besteht noch ein besonderer Zusammenhang, welcher schon in einigen der bisher gefundenen Sätze hervortritt. Zuerst sei daran erinnert, dass Punkt und Gerade nicht das Merkmal einer bestimmten Grösse haben, wohl aber Strecke und Winkel. Wie die Strecke das Mass für die Vorwärtsbewegung des Punktes, so ist der Winkel das Mass für die Drehung der Strecke. Wie die Strecke durch ihre beiden Endpunkte, so ist der Winkel durch die beiden Geraden, welche seine Schenkel bilden, vollkommen bestimmt.

Beziehung zwischen Punkten und Geraden. — Zwei einfache Gebilde, welche zusammen ein einfaches Gebilde mehr Dimensionen vollkommen bestimmen, heissen reciprok zu einander in Bezug auf das durch sie bestimmte Gebilde. — Demnach sind zwei Punkte reciprok zu einander in Bezug auf die durch sie bestimmte Gerade. Und da zur Bestimmung einer Ebene ein Punkt und eine (nicht durch ihn

gehende) Gerade ausreichend sind, so sind Punkt und Gerade reciprok zu einander in Bezug auf die durch sie bestimmte Ebene.

Das Wesen der Reciprocität besteht nun darin, dass jeder Beziehung zwischen einfachen Gebilden, welche alle in einem durch zwei von ihnen bestimmten Gebiete liegen, eine Beziehung zwischen den reciproken Gebilden entspricht. Jeder Satz, der eine solche Beziehung ausspricht, zieht also ohne Weiteres einen anderen Satz nach sich. (Reciprocitäts-Gesetz.)

Im Gebiete der Geraden entstehen auf diese Weise keine neuen Sätze, weil hier der Punkt dem Punkte reciprok ist. Im Gebiete der Ebene dagegen kann das Reciprocitäts-Gesetz in folgender Fassung ausgesprochen werden:

124. Aus jedem Satze, der von Geraden und Punkten einer Ebene handelt, geht ein neuer Satz hervor, wenn man die Ausdrücke „Punkt“ und „Gerade“ mit einander vertauscht.

Im Folgenden sind eine Anzahl bereits bekannter reciproker Sätze einander gegenübergestellt. (Zu den Punkten zählen hierbei auch die unendlich fernen.)

| | |
|---|---|
| Eine Gerade wird durch zwei Punkte vollständig bestimmt. | Ein Punkt wird durch zwei Geraden vollständig bestimmt. |
| Durch zwei Punkte geht stets eine Gerade. | Zwei Geraden haben stets einen Punkt gemeinsam (Fig. 6 und 8). |
| Durch zwei zusammenfallende Punkte gehen unendlich viele Geraden. | Zwei zusammenfallende Geraden haben unendlich viele Punkte gemeinsam. |
| Durch je zwei von drei Punkten gehen im Ganzen drei Geraden (Fig. 14, 2b). | Je zwei von drei Geraden schneiden sich im Ganzen in drei Punkten (Fig. 14, 2b). |

Anm. Von diesen drei Punkten fällt in Fig. 14, 3 der eine in unendliche Entfernung, in Fig. 14, 1 alle drei.

| | |
|---|---|
| Drei Punkte können auf einundderselben Geraden liegen. | Drei Geraden können durch einunddenselben Punkt gehen (Fig. 14, 2a und 1). |

Beziehung zwischen Strecken und Winkeln. — Aus den oben zusammengestellten Sätzen über den Zusammenhang zwischen Punkt und Gerade einerseits, Strecke und Winkel andrerseits, geht hervor, dass zwischen den letzteren Gebilden dieselbe Reciprocität obwaltet wie zwischen den ersteren.

Eine Reihe von Sätzen über das Dreieck, in denen man die Ausdrücke „Seite“ und „Winkel“ vertauschen kann, bestätigt dies. Namentlich sind die Sätze über das Gegenüberliegen von Seiten und Winkeln zu ihren Umkehrungssätzen reciprok.

Anm. Ausgeschlossen von diesem Zusammenhange sind diejenigen Sätze, welche nur die Grösse, nicht aber die Lage und Richtung der Strecken berücksichtigen (z. B. 109, 110). Das letztere muss auch geschehen, wenn man zu den die Grösse der Winkel betreffenden Sätzen reciproke Sätze finden will. So entsprechen sich z. B. die Sätze:

| | |
|---|---|
| Durch zwei Winkel eines Dreiecks ist der dritte bestimmt. | Durch zwei nach Grösse und Richtung gegebene Seiten eines Dreiecks ist die dritte bestimmt. |

Aber die Rechnung mit Strecken, welche nach Grösse und Richtung gegeben sind, hat in die Elementar-Mathematik noch keinen Eingang gefunden und wird daher hier übergangen.*)

### γ) Dreimalige Bewegung der Geraden.

77.* *Uebersicht.* — Sind in der Ebene vier Geraden gegeben, so sind folgende Fälle möglich:

1) Alle vier Geraden sind parallel.

2) Drei parallele Geraden werden von der vierten geschnitten.

3) Je zwei Geraden sind unter einander parallel.

4) Zwei Geraden sind parallel; die beiden andern schneiden sich in einem Punkte, der a) auf keiner der Parallelen, b) auf einer der Parallelen liegt.

5) Alle Geraden schneiden sich gegenseitig a) in 6 Punkten, indem durch jeden Punkt zwei Geraden gehen, b) in 4 Punkten, indem 3 Schnittpunkte in einen zusammenfallen, durch welchen drei Geraden gehen, c) in 1 Punkte, indem alle 6 Schnittpunkte in einen zusammenfallen, durch welchen alle vier Geraden gehen.

Anm. Man zeichne Figuren zu allen diesen Fällen, zeige, inwiefern einzelne dieser Fälle als specielle Fälle in anderen enthalten sind, und bestimme die Ordnung derselben nach der Anzahl der Schnittpunkte. Man leite alle Fälle ab, indem man zu Fig. 14 noch eine Gerade auf alle möglichen Arten hinzufügt. — Man nehme ferner vier Punkte in der Ebene an, ziehe durch je zwei derselben eine Gerade, und bestimme die Fälle, in denen Geraden zusammenfallen oder parallel werden.

Anlass zu neuen Betrachtungen geben nur die Fälle 3), 4a) und 5a), in denen von den 6 Schnittpunkten der vier Geraden zwei oder einer oder keiner in unendliche Entfernung fällt.

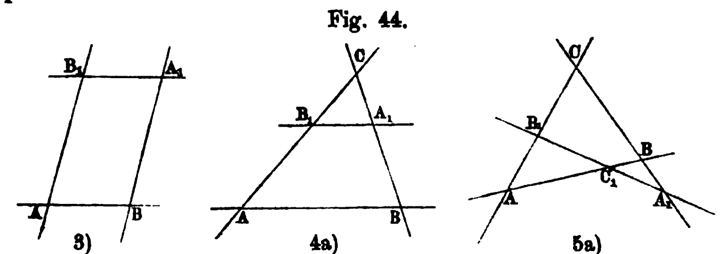
*) Dieser, die Elemente ergänzende Zweig der Mathematik findet sich dargestellt in des Vf. „System der Raumlehre“, Leipzig 1872 u. 1875.

# Das Viereck.

**78.** Vier Geraden, welche sich paarweise in wenigstens vier endlich fernen Punkten schneiden, begrenzen vollständig einen Theil der Ebene, bilden also eine Figur, welche Viereck heisst. Seiten und Winkel des Vierecks werden ebenso bestimmt, wie beim Dreieck, ebenso die Aussenwinkel und die Begriffe der einer Seite anliegenden Winkel und der einen Winkel einschliessenden Seiten. In Bezug auf eine Seite heissen diejenigen beiden Seiten, welche einen Eckpunkt mit ihr gemeinsam haben, anstossende Seiten, die vierte Seite: gegenüberliegende Seite (Gegenseite). In Bezug auf einen Winkel heissen diejenigen beiden Winkel, welche einen Schenkel mit ihm gemeinsam haben, benachbarte Winkel, der vierte Winkel: gegenüberliegender Winkel.*)

In einem Vierecke können zwei Seitenpaare oder eins oder keins parallel sein. Im ersten Falle (3) heisst das Viereck Parallelogramm, im zweiten (4a) Trapez. Das Parallelogramm ist ein specieller Fall des Trapezes, und dieses ein specieller Fall des Vierecks.

Fig. 44.




Anm. In Fig. 44 ist die erste Figur $\overline{ABA_1B_1}$ ein Parallelogramm, die zweite $\overline{ABA_1B_1}$ ein Trapez, die dritte enthält drei Vierecke, nämlich das nur concave Winkel enthaltende gemeine Viereck $\overline{BCB_1C_1}$, das einen convexen Winkel ($AC_1A_1$) enthaltende einspringende Viereck $\overline{CAC_1A_1}$, das zwei convexe Winkel ($ABA_1$ und $BA_1B_1$) enthaltende überschlagene Viereck $\overline{ABA_1B_1}$, welches aus zwei getrennten Dreiecksflächen von entgegengesetztem Sinne besteht. — Der Inbegriff von vier in 6 Punkten sich schneidenden Linien (oder von vier durch 6 Geraden verbundenen Punkten) heisst vollständiges Viereck.

Die Strecken, welche zwei nicht benachbarte Ecken eines Vierecks (einer Figur) verbinden, heissen Diagonalen.

---

*) Nicht aber Gegenwinkel, weil dieser Name schon bei Parallelen vorkommt, und daher bei Vierecken mit parallelen Seiten Verwirrung entstehen würde.

Anm. Jedes Viereck hat zwei Diagonalen (in den einzelnen Figuren 44 die Strecken $AA_1$, $BB_1$, $CC_1$), das „vollständige Viereck" jedoch drei. Ausserhalb der Fläche des Vierecks liegt im gemeinen Viereck keine, im einspringenden eine, im überschlagenen jede der beiden Diagonalen. — Die beiden Endpunkte einer Diagonale bilden mit jeder der beiden anderen Ecken des Vierecks ein Dreieck. Das gemeine Viereck wird durch jede Diagonale in zwei Dreiecke getheilt. In welcher Beziehung steht die Fläche des Vierecks zur Fläche der beiden Dreiecke im einspringenden und überschlagenen Viereck? — In wieviele Theile zerfällt die Ebene durch 4 Geraden? Welche Theile werden durch 2, 3, 4 Geraden begrenzt?

Im $n$-Eck kann man aus jeder Ecke $n-3$ Diagonalen ziehen (warum?), im Ganzen also $\frac{n(n-3)}{2}$ Diagonalen (warum?). (Zahlenbeispiele!)

Wie den Eckpunkten eines Vierecks die Seiten, so entsprechen den Verbindungsstrecken je zweier gegenüberliegender Eckpunkte (den Diagonalen) die Schnittpunkte je zweier gegenüberliegender Seiten (in der dritten Fig. 44 je nach der Wahl des Vierecks die Punktepaare $AA_1$, $BB_1$, $CC_1$).

## b. Die Strecke und ihre Bewegungen in der Ebene.

### 1) Lagenänderung der Strecke. — Das Parallelogramm.

#### $\alpha$) Einmalige Bewegung der Strecke.

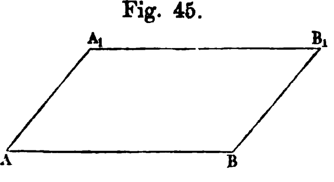
**79.** Ist eine Strecke $AB$ durch Aenderung ihrer Lage nach $A_1B_1$ gekommen, so ist zuerst $A_1B_1 \parallel AB$ und $A_1B_1 = AB$. Da ferner nach 29 die Endpunkte der Strecke gleichgrosse und gleichgerichtete Strecken beschreiben, so ist auch $AA_1 \parallel BB_1$ und $AA_1 = BB_1$. D. h.:

Aendert eine Strecke ihre Lage so, dass einer ihrer Punkte eine gerade Strecke beschreibt, so ist die von der Strecke beschriebene Figur ein Parallelogramm. — Anders ausgedrückt: Sind in einem Viereck*) 125.
zwei Gegenseiten gleich und parallel, so ist es ein Parallelogramm.

Im Parallelogramm sind je zwei Gegenseiten einander gleich. — Anders ausgedrückt: Parallelen zwischen Parallelen sind einander gleich. 126.

Anm. Anderer Beweis für 125 und 126 durch Ziehen einer Diagonale und Nachweis der Congruenz der beiden entstehenden Dreiecke aus 66 und 91, resp. 90. — Umkehrung von 126: Sind in einem Viereck je zwei Gegenseiten einander gleich, so ist es ein Parallelogramm (93, Anm. z. 70, 125).

Fig. 45.




*) Hier, wie im Folgenden, ist nur vom gemeinen Viereck die Rede; für die anderen Arten verlieren manche der folgenden Sätze (z. B. Umk. v. 126) ihre Geltung.

Aus der Umkehrung von 126 folgt die kürzeste Lösung der

Aufgabe 6. — Durch einen gegebenen Punkt ($A_1$) die Parallele zu einer gegebenen Geraden ($AB$) zu ziehen.

Man beschreibt aus $A_1$ und aus einem beliebigen Punkte $A$ der Geraden zwei Kreisbogen mit gleichem Radius, und aus dem Punkte $B$, in welchem der zweite Bogen die Gerade schneidet, mit dem Radius $AA_1$ einen dritten Bogen, welcher den ersten in $B_1$ schneidet. Dann ist die Verbindungsstrecke $A_1B_1 \parallel AB$.

Anm. Man ziehe durch die Ecken eines Dreiecks die Parallelen zu den gegenüberliegenden Seiten. Dann entstehen 3 Parallelogramme, und ein (durch die Parallelen gebildetes) Dreieck, dessen Seiten durch die Ecken des gegebenen Dreiecks halbirt werden (126). Betrachtet man dieses neue Dreieck als das gegebene, so erhält man den Satz:

127. Verbindet man die Mitten der Seiten eines Dreiecks, so entsteht ein neues Dreieck, in welchem jede Seite mit einer Seite des gegebenen Dreiecks parallel und von halber Länge ist.

Aus 62 folgt:

128. Im Parallelogramm sind je zwei gegenüberliegende Winkel einander gleich.

Anm. Hieraus, und aus 67 folgt, dass durch einen Winkel des Parallelogramms alle übrigen bestimmt sind. Wieviele spitze und stumpfe Winkel enthält hiernach ein Parallelogramm?

Aus 126 folgt:

129. Sind in einem Parallelogramm zwei anstossende Seiten gleich, so sind alle Seiten gleich.

Ein Viereck, in welchem alle Seiten gleich sind, heisst Rhombus (Raute).

Aus 128 folgt:

130. Sind in einem Parallelogramme zwei benachbarte Winkel gleich, so sind alle Winkel gleich (und jeder $= R$).

Ein Viereck, in welchem alle Winkel gleich sind, heisst Rechteck. — Ein Viereck, in welchem alle Seiten und alle Winkel gleich sind, heisst Quadrat.

Anm. Warum sind alle Rhomben, Rechtecke und Quadrate gleichzeitig Parallelogramme? Was für ein Parallelogramm ist der Rhombus, das Rechteck, das Quadrat? Was für ein Rhombus, Rechteck ist das Quadrat? — Alle Eigenschaften des Parallelogramms besitzen auch Rhombus und Rechteck. Das Quadrat vereinigt die Eigenschaften von Rhombus und Rechteck.

131. **80.** *Eigenschaften der Diagonalen.* — *Eine* Diagonale theilt das Parallelogramm in zwei congruente Dreiecke. (66, 91)

Anm. Zwei anstossende Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel sind gleichzeitig Stücke des Dreiecks und des Parallelogramms. Nach 131 ist also ein Parallelogramm durch zwei anstossende Seiten und den von ihnen eingeschlossenen Winkel vollkommen bestimmt. (Dies folgt auch aus der Entstehung des Parallelogramms durch Verschiebung einer Strecke.) Durch jedes Parallelogramm ist ein Dreieck bestimmt, wenn man eine Diagonale zieht, durch jedes Dreieck ein Parallelogramm, wenn man durch zwei Ecken Parallelen zu den gegenüberliegenden Seiten zieht. — Wann sind hiernach Parallelogramme, Rechtecke, Rhomben, Quadrate congruent? — Welche Arten von Dreiecken entstehen, wenn in einer dieser Figuren eine Diagonale gezogen wird? — Wie lässt sich 131 umkehren? (Vgl. das Viereck $ABA_1C$, Fig. 33.) — Construction eines Parallelogramms aus zwei anstossenden Seiten und dem eingeschlossenen Winkel.

*Beide* Diagonalen zusammen theilen das Parallelo- 132.
gramm in vier Dreiecke, von denen je zwei an den Gegenseiten liegende congruent sind. (66, 90)

Aus 132 folgt:

Die Diagonalen eines Parallelogramms halbiren 133.
einander.*)

Zieht man durch den Schnittpunkt der Diagonalen eine Parallele zu einem Seitenpaare, so folgt aus 33, dass jede durch diesen Schnittpunkt zwischen den beiden Seiten gezogene Strecke in ihm halbirt wird. Also:

Jede durch den Schnittpunkt der Diagonalen 134.
eines Parallelogramms zwischen zwei Punkten seines Umfanges gezogene Strecke wird in diesem Punkte halbirt und schneidet auf den Gegenseiten gleiche Stücke ab. (91)

Ein Punkt, welcher die Eigenschaft besitzt, dass jede durch ihn zwischen zwei Punkten des Umfangs einer Figur gezogene Strecke in ihm halbirt wird, heisst Mittelpunkt der Figur. — Hiernach ist der Schnittpunkt der Diagonalen Mittelpunkt des Parallelogramms.

Wenn in einem Viereck die Diagonalen einander 135.
halbiren, so ist es ein Parallelogramm (91, 125). (Umkehrung zu 133.)

Anm. Hieraus folgt eine einfache Construction des Parallelogramms.

Da der Rhombus durch jede seiner Diagonalen in zwei gleichschenklige Dreiecke über derselben Basis zerfällt, so folgt aus 106:

---

*) Das Analogon dieses Satzes in der Longimetrie ist der Satz 24. Vgl. „System der Raumlehre“ I. Nr. 44.) Eine bessere Ableitung von 133 folgt in der letzten Anm. zu Nr. 94.

136. **Im Rhombus stehen die Diagonalen auf einander senkrecht und halbiren die Winkel.**

Anm. Umkehrungssätze: Wenn in einem Parallelogramm die Diagonalen auf einander senkrecht stehen (133, 91), oder wenn eine Diagonale einen Winkel halbirt (66, Umk. z. 98), so ist es ein Rhombus.

137. **Im Rechteck sind die Diagonalen einander gleich.** (91)

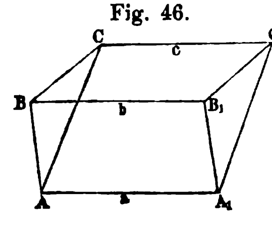
Anm. Umkehrungssatz: Wenn in einem Parallelogramm die Diagonalen einander gleich sind, so ist es ein Rechteck (93, 130). — Welche Eigenschaften haben hiernach die Diagonalen eines Quadrates? — Welche Arten von Dreiecken entstehen, wenn im Parallelogramm, Rhombus, Rechteck, Quadrat beide Diagonalen gezogen werden?

### β) Mehrmalige Bewegung der Strecke.

#### 1. Die geometrischen Operationen mit Parallelogrammen.

**81.*** *Addition.* — Bewegt sich eine Strecke $a$ in der Ebene durch Verschiebung erst nach $b$, und dann weiter nach $c$, so beschreibt sie nach einander die Parallelogramme $ab$ und $bc$. Durch directe Verschiebung von $a$ nach $c$ würde sie das Parallelogramm $ac$ beschreiben. Da nach 29 und 89 die Dreiecke $ABC$ und $A_1B_1C_1$ congruent, also auch flächengleich sind, so ist (wie aus Fig. 46 leicht zu ersehen)

Fig. 46.




$$1)\quad ab + bc = ac.$$

Anm. Hierbei wird der Begriff der Summe von Zahlen ebenso auf Flächenräume übertragen, wie in Nr. 17 auf Strecken.

Nennt man zwei Gegenseiten eines Parallelogramms seine beiden Grundlinien, so ergiebt sich die Regel:

138. **Soll man zwei Parallelogramme mit gleicher Grundlinie addiren, so legt man sie so *hinter* einander, dass ihre ersten Grundlinien zusammenfallen. Dann ist ihre Summe das Parallelogramm zwischen ihren anderen Grundlinien.**

Anm. Addition mehrerer Parallelogramme durch wiederholte Anwendung von 138. — Aus Fig. 46, die man sich auch durch Verschiebung des Dreiecks $ABC$ nach $A_1B_1C_1$ entstanden denken kann, folgen weiter die Sätze: Zieht man aus den Ecken einer Figur gleiche parallele Strecken, so sind deren Endpunkte die Ecken einer mit der ersten congruenten Figur. — Liegen zwei congruente Figuren so, dass die Seiten der einen bezw. gleichgerichtet sind mit denen der andern, so sind die Verbindungslinien je zweier entsprechender Ecken parallel.

**82.*** *Subtraction.* — Aus 1) folgt:

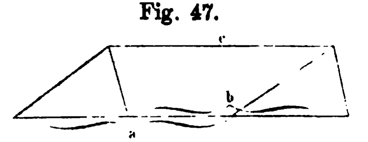
$$2)\quad ac - bc = ab.$$

Demnach ist *ab* die Differenz zwischen *ac* und *bc*, und Fig. 46 liefert die Regel:

Soll man ein Parallelogramm von einem anderen mit gleicher Grundlinie subtrahiren, so legt man sie so *auf* einander, dass ihre ersten Grundlinien zusammenfallen. Dann ist ihre Differenz das Parallelogramm zwischen ihren anderen Grundlinien. 139.

Sind die durch Subtraction zu vereinigenden Parallelogramme flächengleich, so fallen [nach Formel 2)] auch ihre zweiten Grundlinien zusammen; d. h.: die beiden Parallelogramme liegen zwischen denselben Parallelen. Umgekehrt ist die Lage zwischen denselben Parallelen für Parallelogramme mit gleichen Grundlinien ein Zeichen ihrer Flächengleichheit. Nennt man die Entfernung der beiden Grundlinien eines Parallelogramms seine Höhe, so kann man dieses Resultat (da Parallelogramme mit gleicher Höhe immer zwischen dieselben Parallelen gebracht werden können) auch in der Form aussprechen:

Fig. 47.




Parallelogramme mit gleicher Grundlinie und Höhe sind flächengleich. 140.

Ueberträgt man den Ausdruck „Grundlinie" vom Parallelogramm auf eins der beiden durch die Diagonale entstandenen Dreiecke, so folgt aus 131:

Jedes Dreieck ist halb so gross als ein Parallelogramm mit gleicher Grundlinie und gleicher Höhe. 141.

Und aus 140:

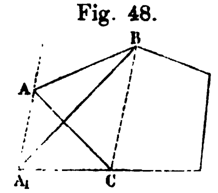
Dreiecke mit gleicher Grundlinie und Höhe sind flächengleich. 142.

Die Sätze 140 und 142 dienen zur Lösung folgender Aufgaben:

Aufgabe 7. — Ein gegebenes Vieleck in ein anderes, flächengleiches zu verwandeln, welches eine Seite weniger enthält.

Man schneidet durch eine Diagonale $BC$ in Dreieck $ABC$ ab, und bestimmt den 'unkt $A_1$, in welchem die durch $A$ zu $BC$ ›zogene Parallele von der Verlängerung ›iner der anstossenden Polygonseiten ge-›chnitten wird. Verbindet man dann $A_1$ nit $B$, so hat das Polygon, welches statt $A$

Fig. 48.



die Ecke $A_1$ enthält, eine Ecke ($C$) weniger und ist dem gegebenen flächengleich, weil $\overline{ABC} = \overline{A_1BC}$ (142).

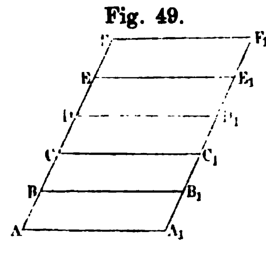
Anm. Durch Wiederholung dieses Verfahrens kann man ein Vieleck in ein Dreieck verwandeln.

**Aufgabe 8. — Ein gegebenes Parallelogramm in ein Rechteck zu verwandeln.**

Man bestimme die Punkte, in welchen eine (verlängerte) Grundlinie durch die in den Endpunkten der anderen errichteten Senkrechten geschnitten wird. Das entstandene Rechteck ist dann mit dem gegebenen Parallelogramm flächengleich nach 140.

**83.*** *Multiplication.* — Addirt man (nach 138) $n$ congruente Parallelogramme ($\overline{AA_1B_1B} = \mathfrak{a}$), so liegen ihre Ecken (nach 67 und 60) auf zwei Geraden ($AF$ und $A_1F_1$), und es entsteht ein Parallelogramm ($\overline{AA_1F_1F} = \mathfrak{b}$), welches $n$-mal so gross ist als jedes der gegebenen. Durch diese Construction ist also das letztere ($\mathfrak{a}$) mit $n$ multiplicirt, und man hat

Fig. 49.




3) $n \cdot \mathfrak{a} = \mathfrak{b}$.

Da ferner $AF = n \cdot AB$, so hat $\mathfrak{b}$ eine $n$-mal so grosse Seitenlinie als $\mathfrak{a}$, und, wenn man $AA_1$ als Grundlinie betrachtet, eine $n$-mal so grosse Höhe als $\mathfrak{a}$. Hieraus folgt der Satz:

143. **Parallelogramme (oder Dreiecke) mit gleicher Grundlinie verhalten sich wie ihre Höhen.**

Betrachtet man $AF$ als Grundlinie von $\mathfrak{b}$ und $AB$ als Grundlinie von $\mathfrak{a}$, so haben beide Parallelogramme, da sie zwischen denselben Parallelen liegen, gleiche Höhe, und der vorige Satz lautet jetzt:

144. **Parallelogramme (oder Dreiecke) mit gleicher Höhe verhalten sich wie ihre Grundlinien.**

Aus 141 folgt in Verbindung mit 143 oder 144:

145. **Jedes Dreieck ist gleich einem Parallelogramm von gleicher Grundlinie und halber Höhe, oder von halber Grundlinie und gleicher Höhe.**

Aus 145 folgt die Lösung der

**Aufgabe 9. — Ein gegebenes Dreieck in ein Parallelogramm zu verwandeln.**

Man ziehe durch den Halbirungspunkt $D$ einer Seite $AB$ die Strecke $DE \mathrel{\#} BC$ und verbinde $E$ mit $C$.

Anm. Es sind verschiedene Lösungen möglich, da jedes durch $D$ und $B$ (oder $A$) gezogene Parallelenpaar zusammen mit $DB$ und der durch $C$ zu $AB$ gezogenen Parallelen ein Parallelogramm bestimmt, welches der Forderung genügt. — Wie verwandelt man hiernach das Dreieck unmittelbar in ein Rechteck?

Da man nach Aufg. 7 jedes Vieleck in ein Dreieck, nach Aufg. 9 jedes Dreieck in ein Parallelogramm, und nach Aufg. 8 jedes Parallelogramm in ein Rechteck verwandeln kann, so kann hiernach **jedes Vieleck in ein Rechteck verwandelt werden.**

*Theilung.* — Aus 3) folgt:

$$4)\ \frac{\mathfrak{b}}{n} = \mathfrak{a}.$$

Da die Strecke $AF$ durch die Punkte $B, C, \ldots$ in ebensoviele gleiche Theile getheilt wird, wie das Parallelogramm $\overline{AA_1F_1F}$ durch die Strecken $BB_1, CC_1, \ldots$, so kann man ein gegebenes Parallelogramm in $n$ gleiche Theile theilen, indem man (nach Anm. zu 33) eine Seite desselben in $n$ gleiche Theile zerlegt und durch die Theilpunkte Parallelen zu den anstossenden Seiten zieht.

**84.*** *Messung.* — Aus 3) folgt ferner:

$$5)\ \frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}} = n;$$

d. h.: **Der Quotient zweier Parallelogramme** (also überhaupt zweier geradliniger Figuren) **ist eine Zahl.** 146.

Durch die Sätze 143 und 144 ist die Messung von Parallelogrammen mit gleicher Grundlinie oder Höhe auf die Messung von Strecken (s. Nr. 20) zurückgeführt; es bleiben also auch alle dort gemachten Bemerkungen über die Masszahl $n$ in Kraft.

Um zwei beliebige Parallelogramme durch einander zu messen, nehmen wir an, eine Strecke $m$ sei in der Grundlinie des ersten $p$-mal, in der des zweiten $q$-mal enthalten, und eine ~recke $m_1$ in der Höhe des ersten $p_1$-mal, in der des zweiten -mal. Dann verhalten sich die Grundlinien wie $\frac{p}{q}$, die Höhen ie $\frac{p_1}{q_1}$. — Zieht man nun durch die Theilpunkte der Grund- ıien Parallelen zu den anstossenden Seiten, so zerfällt das rste Parallelogramm in $p$ gleiche Theile ($\mathfrak{a}$), das zweite in $q$ 'eiche Theile ($\mathfrak{b}$). Dann verhält sich nach 143

$$\frac{a}{b} = \frac{p_1}{q_1};$$

also
$$\frac{pa}{qb} = \frac{pp_1}{qq_1};$$

147. d. h.: **Parallelogramme (oder Dreiecke) verhalten sich wie die Producte aus den Masszahlen von Grundlinie und Höhe.**

Anm. 140 ist in 143 und in 144, 143 und 144 sind in 147 als specielle Fälle enthalten.

Setzt man in 5) $a = 1$, so wird $b = n$, d. h. auch eine Zahl. Setzt man also irgend ein bestimmtes Parallelogramm gleich 1, so kann man alle Parallelogramme (und geradlinigen Figuren) als Zahlen darstellen. Weiteres hierüber s. in dem Abschnitt über rechnende Geometrie.

**2. Entgegengesetzte Seiten eines Parallelogramms.**

**85.*** Ein Parallelogramm *ab*, dessen Grundlinien *a* und *b* sind, kann sowohl durch Verschiebung der Strecke *a* nach *b*, wie durch Verschiebung von *b* nach *a* entstehen. Da diese beiden Verschiebungen nach entgegengesetzten Seiten stattfinden, so hat jedes Parallelogramm (wie die ganze Ebene, in der es liegt) zwei entgegengesetzte Seiten, die durch die Aufeinanderfolge der Buchstaben (*ab* und *ba*) unterschieden werden können.

Anm. Da man die Verschiebung der durch *a* oder *b* bestimmten Geraden als Drehung um ihren unendlich fernen Punkt ansehen kann, so ist diese ganze Betrachtung als specieller Fall in Nr. 41—43 enthalten.

**86.*** *Positive und negative Parallelogramme.* — Man kann den Gegensatz zwischen positiven und negativen Zahlen dadurch auf Parallelogramme (und andere Figuren) übertragen, dass man (wie schon in Nr. 42) die eine der beiden Seiten der Ebene, sowie alle durch Verschiebung nach dieser Seite entstandenen Parallelogramme als positiv, die andere Seite und die durch Verschiebung nach derselben entstandenen Parallelogramme als negativ betrachtet. Wird die Verschiebung von *a* nach *b* (Fig. 46) als positiv betrachtet, so ist die von *b* nach *a* negativ, und

$$ab = -ba \text{ oder } ab + ba = 0.$$

148. **87.*** *Erweiterungen.* — 1) **Sind in der Ebene drei gleiche parallele Strecken** *a*, *b*, *c* **gegeben** (Fig. 46), so **ist** (nach gleichem Verfahren, wie in Nr. 23 und Nr. 44) **stets**

$$ab + bc + ca = 0,$$

welche der drei Strecken auch zwischen den anderen liege.

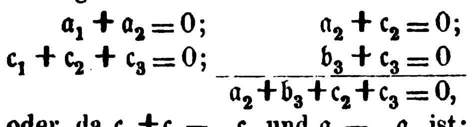
Sind zwei anstossende Parallelogramme, die zusammen ein drittes Parallelogramm bilden, flächengleich (Fig. 49, $\overline{AA_1B_1B}$ und $\overline{BB_1C_1C}$), so heisst die Grenzlinie ($BB_1$) die Mittellinie des dritten Parallelogramms ($\overline{AA_1C_1C}$). Die Mittellinie eines Parallelogramms theilt also dasselbe in zwei flächengleiche Parallelogramme.

2) Es seien die Parallelogramme, die von den Seiten $a$, $b$, $c$ eines Dreiecks bei drei aufeinanderfolgenden Verschiebungen beschrieben werden, mit $\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_2\mathfrak{c}_2$, $\mathfrak{a}_3\mathfrak{b}_3\mathfrak{c}_3$ bezeichnet, so ist, wenn das Dreieck durch die dritte Verschiebung in seine alte Lage zurückgekehrt ist:

$$\mathfrak{a}_1+\mathfrak{a}_2+\mathfrak{a}_3=0; \qquad (\mathfrak{a}_1+\mathfrak{b}_1+\mathfrak{c}_1=0);$$
$$(\mathfrak{b}_1+\mathfrak{b}_2+\mathfrak{b}_3=0); \qquad \mathfrak{a}_2+\mathfrak{b}_2+\mathfrak{c}_2=0;$$
$$\mathfrak{c}_1+\mathfrak{c}_2+\mathfrak{c}_3=0; \qquad \mathfrak{a}_3+\mathfrak{b}_3+\mathfrak{c}_3=0.$$

Fig. 50.

Ist nun $\mathfrak{a}_3 = 0$, $\mathfrak{b}_2 = 0$ (Fig. 50), so folgt:



$$\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2 = 0; \qquad \mathfrak{a}_2 + \mathfrak{c}_2 = 0;$$
$$\mathfrak{c}_1 + \mathfrak{c}_2 + \mathfrak{c}_3 = 0; \qquad \underline{\mathfrak{b}_3 + \mathfrak{c}_3 = 0}$$
$$\mathfrak{a}_2 + \mathfrak{b}_3 + \mathfrak{c}_2 + \mathfrak{c}_3 = 0,$$

oder, da $\mathfrak{c}_2 + \mathfrak{c}_3 = -\mathfrak{c}_1$ und $\mathfrak{a}_2 = -\mathfrak{a}_1$ ist:

$$-\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{b}_3 = \mathfrak{c}_1.$$

Sucht man in der Figur die Parallelogramme $-\mathfrak{a}_1\,({}^3{}_1{}^3{}_1)$, $\mathfrak{b}_3\left({}^{3\,2}_{3\,2}\right)$ und $\mathfrak{c}_1\left(3\,{}^3_1\,1\right)$ auf, so enthält die letzte Formel den

Satz des *Pappus:* *) Construirt man über einer 149.
Dreiecksseite (c) als Grundlinie ein Parallelogramm, zieht durch die Ecken der gegenüberliegenden Grundlinie Parallelen zu den beiden andern Seiten, und construirt über jeder dieser Seiten ein Parallelogramm, dessen Gegenseite in der zugehörigen Parallele liegt, so ist das erste Parallelogramm gleich der Summe der beiden andern.

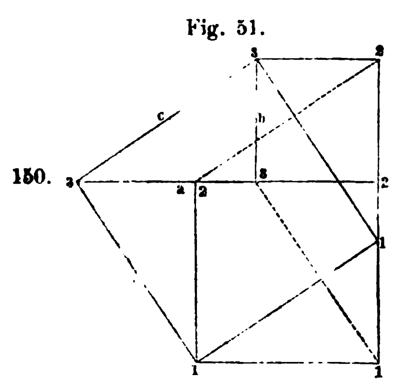
Ist insbesondere die erste Bewegung gleich $c$, die zweite gleich $a$, die dritte gleich $b$ (sodass jede Ecke des Dreiecks ein ihm selbst congruentes Dreieck beschreibt), so sind die Parallelogramme $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{b}_3$ Rhomben; und, wenn das gegebene

*) Pappus aus Alexandrien (gegen 400 n. Chr.).





Fig. 51.



Dreieck rechtwinklig, und $\mathfrak{c}_1$ ein Quadrat ist, so sind auch $\mathfrak{a}_2$ und $\mathfrak{b}_3$ Quadrate, und die Formel

$$\mathfrak{a}_2 + \mathfrak{b}_3 = \mathfrak{c}_1$$

enthält den

150. Satz des *Pythagoras:* *) Im rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat über der Hypotenuse gleich der Summe der Quadrate über den Katheten.

Anm. Die zur Ableitung von 149 und 150 nöthigen vereinfachten Formeln kann man auch unmittelbar aus 138 und 140 entnehmen. Die Richtigkeit der Sätze ergiebt sich dann leicht durch Betrachtung der Figuren.

Die Bewegung des Parallelogramms in der Ebene, welche hier folgen müsste, wird ihrer geringeren Wichtigkeit wegen übergangen. Sie kann in ähnlicher Weise wie die Bewegung der Strecke auf der Geraden untersucht werden. **)

**2) Richtungsänderung der Strecke. — Die Kreisfläche.**

**88.** Dreht eine Strecke *OA* sich um einen ihrer Endpunkte *O*, so beschreibt sie eine Figur, welche Kreisfläche heisst, wenn die Strecke eine ganze Umdrehung macht, Kreisausschnitt (Sector), wenn die Drehung diese Grösse nicht erreicht. — Die Kreisfläche ist vollständig begrenzt durch die Kreislinie, der Kreisausschnitt durch einen Bogen und zwei Radien.

Wenn die Strecke *OA* den Sector $\widehat{AOB}$ beschreibt, so sagt man, der Centriwinkel *AOB* und der Bogen $\widehat{AB}$ gehören zum Sector $\widehat{AOB}$.

Anm. Ebenso wie durch 2 Radien *OA* und *OB* zwei verschiedene Centriwinkel *AOB* entstehen, ein concaver und ein convexer, so auch zwei verschiedene Sectoren $\widehat{AOB}$, von denen jeder einen der beiden Centriwinkel enthält. Als Grenzlinie der Kreisfläche heisst die Kreislinie auch Peripherie.

Da der Sector durch dieselbe Bewegung entsteht wie der Bogen, so kann er unter denselben Voraussetzungen wie dieser als Mass für die Drehung der Strecke betrachtet werden.

---

*) Pythagoras aus Samos (570—471), griechischer Mathematiker und Philosoph.

**) Vgl. des Vf. System der Raumlehre, Th. I, Nr. 56—63.

Hiernach können alle Sätze, welche von Winkeln mit demselben Scheitel gelten, auf Sectoren derselben Kreisfläche übertragen werden, indem man statt der Winkel die zugehörigen Sectoren setzt.

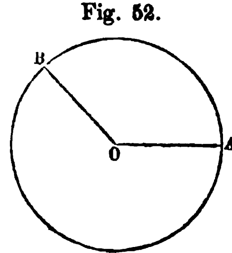



Fig. 52.

Da Sector und Centriwinkel in gleicher Weise die Drehung einer Geraden messen, so sind die beiden Sectoren, welche eine Strecke durch zwei gleich grosse Drehungen beschreibt, einander gleich; d. h.:

Zu gleichen Centriwinkeln einer Kreisfläche ge- 151.
hören gleiche Sectoren (und umgekehrt). — Zu dem
grösseren von zwei Centriwinkeln einer Kreisfläche
gehört der grössere Sector (und umgekehrt).

Aus 151 folgt:

Jede durch den Mittelpunkt eines Kreises gehende 152.
Gerade halbirt die Kreisfläche. — Zwei solche Linien,
die auf einander senkrecht stehen, theilen die Kreis-
fläche in vier gleiche Theile.

Anm. Kreislinie und Kreisfläche werden auch unter der gemeinsamen Benennung „Kreis" zusammengefasst. Entsprechendes gilt von den Ausdrücken „Halbkreis" und „Quadrant". — Bei geradlinigen Figuren ist die Aufstellung unterscheidender Namen für Umfang und Fläche nicht nöthig, weil der Umfang aus geraden Strecken besteht, deren Eigenschaften schon früher betrachtet wurden. Dagegen stellt sich die Kreislinie als neues Gebilde der Geraden gegenüber, und muss in dieser Eigenschaft einen besonderen Namen führen.

Wir betrachten nun den Kreis der Reihe nach in Verbindung mit den übrigen Gebilden: Punkt, Gerade (Strecke, Winkel), Figur.

**89.** *Kreis und Punkt.* — Ein Punkt kann auf oder ausserhalb der Kreislinie liegen. Im zweiten Falle kann er wieder auf oder ausserhalb der Kreisfläche liegen. Verbindet man in jedem der hieraus folgenden 3 verschiedenen Fälle den Punkt mit dem Mittelpunkte des Kreises, so ergiebt sich ıs unmittelbarer Anschauung der Satz:

Ein Punkt liegt innerhalb der Kreisfläche, auf 153.
r Kreislinie oder ausserhalb der Kreisfläche, je
ıchdem seine Entfernung vom Mittelpunkte kleiner,
leichgross oder grösser als der Radius des Kreises
ıt (und umgekehrt).

Anm. Specieller Fall: Der Mittelpunkt selbst, mit der Entfernung 0.

**90.** *Kreis und Gerade.* — *α) Secanten.* — Da durch zwei Punkte einer Kreislinie auch eine Gerade bestimmt ist, so sieht man zunächst, dass eine Gerade und eine Kreislinie zwei gemeinsame Punkte haben können.

Da nach Anm. zu 116 drei Punkte auf einer Geraden nicht gleichen Abstand von einem ausserhalb derselben liegenden Punkte haben können, während drei Punkte einer Kreislinie stets gleichen Abstand vom Mittelpunkte haben, so können drei Punkte einer Geraden nicht gleichzeitig Punkte einer Kreislinie sein; d. h.:

154. Eine Kreislinie kann von einer Geraden nicht in mehr als zwei Punkten geschnitten werden.

Eine Gerade, welche die Kreislinie in zwei Punkten schneidet, heisst Secante, der von den Schnittpunkten begrenzte Theil der Secante: Sehne, und jede durch den Mittelpunkt gehende Sehne: Durchmesser des Kreises.

Fig. 53.

Hieraus folgt:

155. Der Durchmesser ist doppelt so gross als der Radius.

Jede Sehne theilt die Kreisfläche in zwei Figuren, welche Kreisabschnitte (Segmente) heissen. Ein Segment ist vollständig begrenzt durch einen Bogen und eine Sehne. Durch die Verbindungslinie der Endpunkte zweier Radien wird der eine Sector als Summe, der andere als Differenz eines Segmentes und eines gleichschenkligen Dreiecks dargestellt.

Anm. Die Fläche des Halbkreises ist gleichzeitig Sector und Segment. Warum?

Die Sehne bildet mit den nach ihren Endpunkten gezogenen Radien ein gleichschenkliges Dreieck. Giebt man den Ecken, Winkeln und Seiten dieses Dreiecks die Namen, welche diese Gebilde in Bezug auf den Kreis führen, so lautet Satz 99 mit seinen Umkehrungssätzen:

156. Die Halbirungslinie eines Centriwinkels steht senkrecht auf der zugehörigen Sehne und halbirt dieselbe.

157. Umkehrungssätze: Verbindet man den Mittelpunkt eines Kreises mit der Mitte einer Sehne, so steht die Verbindungslinie senkrecht auf der Sehne und halbirt den Centriwinkel.

Fällt man vom Mittelpunkt eines Kreises eine Senkrechte auf eine Sehne, so halbirt diese die Sehne und den Centriwinkel. 158.

Errichtet man auf einer Sehne in ihrer Mitte eine Senkrechte, so geht dieselbe durch den Mittelpunkt des Kreises (119). 159.

Nach 114 ist in Fig. 53 $OC < OA$; d. h.:

Der Abstand einer Secante vom Mittelpunkte des Kreises ist kleiner als der Radius. 160.

Und umgekehrt:

Eine Gerade schneidet den Kreis in zwei Punkten, wenn ihr Abstand vom Mittelpunkte kleiner ist als der Radius. 161.

Dreht sich das Dreieck $AOB$ um den Mittelpunkt $O$ bis $A_1OB_1$, so beschreiben die Punkte $A$ und $B$ gleiche Bogen der Kreislinie. Es ist dann gleichzeitig $AB = A_1B_1$, $AOB = A_1OB_1$, und, wenn $C_1$ die Mitte von $A_1B_1$ ist: $OC = OC_1$. D. h.:

Zu gleichen Bogen einer Kreislinie gehören gleiche Sehnen. 162.

Gleiche Sehnen eines Kreises haben gleichen Abstand vom Mittelpunkte (und umgekehrt). 163.

Anm. Andre Beweise: Zu 162 mittelst 41 und 91; zu 163 mittelst 105 und 156. — Wieviele Bogen gehören zu einer Sehne? Wie muss demnach die Umkehrung von 162 ausgesprochen werden?

**91.** *Peripheriewinkel.* — Wenn eine Secante ($AB$, Fig. 53) sich um einen ihrer Schnittpunkte ($A$) dreht, so beschreibt sie einen Winkel ($BAD$), dessen Scheitel auf der Peripherie der Kreisfläche liegt, und dessen Schenkel durch zwei Sehnen ($AB$ und $AD$) gebildet werden. Dieser Winkel heisst Peripheriewinkel.

Der andere Schnittpunkt der Secante ($B$) beschreibt einen Bogen ($\widehat{BD}$), von dem man sagt, dass der Peripheriewinkel zu ihm gehört.

Ein Peripherie- und ein Centriwinkel gehören zu ein-der, wenn sie beide zu demselben Bogen gehören.

Verlängert man in Fig. 53 $AO$ bis $D$, so ist $BOD$ Aussen-akel an der Spitze des gleichschenkligen Dreiecks $BOA$, glich nach 101

$$\beta = 2\alpha.$$

Sei $AB_1$ eine zweite aus $A$ gezogene Sehne, $\alpha_1$ der Win-l, welchen diese Sehne, und $\beta_1$ der Winkel, welchen der

Radius $OB_1$ mit dem Durchmesser $AD$ bildet, so ist nach demselben Satze

$$\beta_1 = 2\alpha_1.$$

Daher, je nachdem $AB_1$ mit $AB$ auf derselben oder entgegengesetzter Seite des Durchmessers $AD$ liegt (nach 44 und 45):

$$\beta \mp \beta_1 = 2(\alpha \mp \alpha_1)$$

oder in anderer Bezeichnung:

$$BOB_1 = 2 \, . \, BAB_1;$$

164. d. h.: Ein Peripheriewinkel ist halb so gross als der zugehörige Centriwinkel.

Anm. Was für ein Peripheriewinkel gehört hiernach zu einem convexen, gestreckten, concaven Centriwinkel? Wie löst man hiernach am kürzesten die Aufgabe: Einen Winkel zu construiren, der halb so gross ist als ein gegebener? Speciell: Einen rechten Winkel zu construiren?

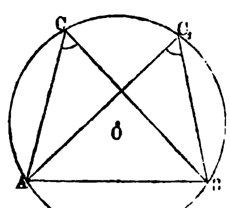
Aus 164 folgt:

165. Der Peripheriewinkel im Halbkreis (d. h. der zum H. gehört) ist ein Rechter.

Da zu einem gegebenen Bogen nur ein Centriwinkel gehört, dagegen unendlich viele Peripheriewinkel (nämlich alle, deren Scheitel auf dem entgegengesetzten Bogen liegen), so folgt aus 164:

166. Alle Peripheriewinkel auf demselben (oder auf gleichen) Bogen (eines Kreises) sind einander gleich. — Zu dem grösseren von zwei Bogen gehört der grössere Peripheriewinkel (und umgekehrt).

Fig. 54.




Da alle diese Peripheriewinkel mit der zugehörigen Sehne Dreiecke bilden, welche in einer Seite ($AB$) und dem gegenüberliegenden Winkel übereinstimmen, so hat man den Satz:

167. Ist zu einem Dreieck eine Seite und der gegenüberliegende Winkel gegeben, so ist der geometrische Ort der dritten Ecke der entgegengesetzte Bogen des Kreises, welcher die Seite als Sehne und den Winkel als zugehörigen Peripheriewinkel enthält.

Anm. Der Mittelpunkt dieses Kreises wird am einfachsten gefunden, indem man an die Seite ($AB$) in jedem ihrer Endpunkte den Complementwinkel des gegebenen Winkels ($OAB = OBA$) anträgt. Denn es ist die Hälfte von $AOB$ gleich dem Peripheriewinkel (164), und $OAB = OBA$ das Complement dieser Hälfte (99).

**Andere Sätze über den geometrischen Ort der Spitze eines Dreiecks.**

**Ist zu einem Dreieck eine Seite ($s$) und die zugehörige Mittellinie ($t_1$) gegeben, so ist der geometrische Ort der dritten Ecke die mit der Mittellinie aus der Mitte der Seite beschriebene Kreislinie.** 168.

**Ist zu einem Dreieck eine Seite ($s$) und die zugehörige Höhe ($h_1$) gegeben, so ist der geometrische Ort der Spitze das in der Entfernung der Höhe zu der Seite gezogene Parallelenpaar.** 169.

Ist eine Seite $s$ und eine nicht zugehörige Höhe $h_2$ gegeben, so enthält das aus $s$ als Hypotenuse und $h_2$ als Kathete construirte rechtwinklige Dreieck den Winkel $\gamma$. Dieser Fall ist also auf 86 zurückgeführt.

Für das rechtwinklige Dreieck nimmt 167 die besondere Form an:

Der geometrische Ort der Spitze eines rechtwinkligen Dreiecks mit gegebener Hypotenuse ist die über der Hypotenuse als Durchmesser beschriebene Kreislinie. 170.

In Fig. 54 ist $\widehat{AC_1} > \widehat{AC}$,*) folglich nach 41: $AOC_1 > AOC$; ferner nach 123 in den Dreiecken $\overline{AOC}$ und $\overline{AOC_1}$: $AC_1 > AC$; d. h.:

Zu dem grösseren von zwei Bogen einer Kreislinie gehört die grössere Sehne. 171.

Da in Fig. 54 $\widehat{AC_1} > \widehat{AC}$ und $\widehat{BC_1} < \widehat{BC}$ ist, so ist nach 171: $AC_1 > AC$ und $BC_1 < BC$; d. h.:

Sind in zwei Dreiecken eine Seite und der gegenüberliegende Winkel gleich, die zweiten Seiten aber ungleich, so hat dasjenige Dreieck, welches die grössere dritte Seite hat, die kleinere zweite Seite. 172.

Für das rechtwinklige Dreieck nimmt 172 die besondere Form an:

Stimmen zwei rechtwinklige Dreiecke in der Hypotenuse überein, so hat dasjenige Dreieck, welches die grössere erste Kathete hat, die kleinere zweite Kathete. 173.

Aus $\widehat{AC_1} > \widehat{AC}$ und $\widehat{BC_1} < \widehat{BC}$ folgt ferner nach 166: $ABC_1 > ABC$ (und $BAC_1 < BAC$); d. h., da gleichzeitig $AC_1 > AC$ (und $BC_1 < BC$) ist:

Sind in zwei Dreiecken eine Seite und der gegenüberliegende Winkel gleich, die einen anliegen- 174.

*) Hier wie im Folgenden ist unter dem zwischen zwei Punkten einer Kreislinie liegenden Bogen nur der kleinere der beiden hierdurch bestimmten Bogen zu verstehen. Welche Aenderungen erleidet Satz 171, wenn einer oder beide Bogen anders bestimmt werden?

den Winkel aber ungleich, so hat dasjenige Dreieck, welches den grösseren anliegenden Winkel hat, auch die grössere ihm gegenüberliegende Seite (und umgekehrt).

Für das rechtwinklige Dreieck nimmt 174 die besondere Form an:

175. Stimmen zwei rechtwinklige Dreiecke in der Hypotenuse überein, so hat dasjenige Dreieck, welches den grösseren ersten anliegenden Winkel hat, auch die grössere ihm gegenüberliegende Kathete.

Sind $AB$ und $A_1B_1$ zwei ungleiche Sehnen eines Kreises mit dem Mittelpunkte $O$, $C$ und $C_1$ ihre Mitten, so ist, wenn $AB > AB_1$, auch $AC > AC_1$; ferner $OC < OC_1$ (173); d. h.:

176. Die grössere von zwei Sehnen eines Kreises hat den kleineren Abstand vom Mittelpunkte (und umgekehrt).

Aus der Umkehrung von 176 folgt:

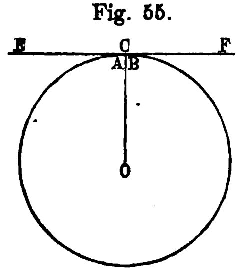
177. Unter allen Sehnen eines Kreises ist der Durchmesser die grösste.

Zwei zu entgegengesetzten Bogen einer Kreislinie gehörige Centriwinkel betragen zusammen $4R$; mithin die zugehörigen Peripheriewinkel $2R$ (164); d. h.:

178. Zwei Peripheriewinkel auf entgegengesetzten Bogen betragen zusammen $2R$. (Fig. 56: $BCA + BC_1A = 2R$.)

**92.** $\beta$) *Tangenten.* — Wenn eine Secante $AB$ (Fig. 53) sich so verschiebt, dass ihr Abstand vom Mittelpunkte grösser wird, so wird die auf ihr liegende Sehne $AB$ kleiner (176); d. h. ihre Endpunkte $A$ und $B$ nähern sich einander. — Wenn endlich $A$ und $B$ zusammenfallen, so geht die Secante in eine Gerade über, welche mit der Kreislinie zwei zusammenfallende, d. h. nur einen Punkt gemeinsam hat.

Fig. 55.




Eine Gerade, welche mit der Kreislinie nur einen Punkt gemeinsam hat, heisst Tangente. Man sagt, sie berühre den Kreis in dem gemeinsamen Punkte (Berührungspunkte).

Mit den beiden Endpunkten der Sehn ($A$, $B$) fällt auch ihr Mittelpunkt ($C$) zusammen; d. h. die Strecke $OC$ ist Radius Und da $OC$ beständig auf der Secante senkrecht steht, also ihren Abstand vom Mittelpunkte des Kreises angiebt, so folgt weiter:

Der Abstand einer Tangente vom Mittelpunkte 179.
des Kreises ist gleich dem Radius.

Und umgekehrt:

Eine Gerade berührt den Kreis in einem Punkte, 180.
wenn ihr Abstand vom Mittelpunkte gleich dem Radius ist.

Anm. Hieraus folgt die Construction der Tangente in einem gegebenen Punkte $C$ der Kreislinie. Man verbinde $O$ mit $C$ und errichte in $C$ die Gerade $EF \perp OC$.

Eine Gerade hat keinen Punkt mit dem Kreise 181.
gemeinsam, wenn ihr Abstand vom Mittelpunkte grösser ist als der Radius. (114, 153)

Da die Tangente nur ein specieller Fall der Secante ist, nämlich eine Secante, deren beide Schnittpunkte in einen Punkt zusammenfallen, so liefert jeder Satz über eine Secante einen entsprechenden über eine Tangente. Aus den Umkehrungssätzen zu 156 folgt hiernach:

Verbindet man den Mittelpunkt eines Kreises mit 182.
dem Berührungspunkt einer Tangente, so steht dieser Radius auf der Tangente senkrecht.

Fällt man vom Mittelpunkt eines Kreises eine 183.
Senkrechte auf eine Tangente, so geht dieselbe durch den Berührungspunkt.

Errichtet man auf einer Tangente in ihrem Be- 184.
rührungspunkte eine Senkrechte, so geht dieselbe durch den Mittelpunkt des Kreises.

Ferner aus 166:

Ein Peripheriewinkel zwi- 185.
schen Sehne und Tangente ist gleich jedem Peripheriewinkel auf dem zwischen seinen Schenkeln liegenden Bogen. (Fig. 56: $BAD = BCA$; $BAD_1 = BC_1A$.)

Fig. 56.

Anm. Der Winkel $BAD$ steht auf dem gen $\widehat{BC_1A}$, weil, wenn $BA$ durch Drehung $A$ den Winkel $BAD$ beschreibt, der Punkt den Bogen $BC_1A$ zurücklegt. — Zwei Sehn bilden nur einen, eine Sehne und eine Tangente dagegen zwei ripheriewinkel. — In welchen bekannten Satz geht hiernach 178 über?

Sind in zwei Punkten ($A$, $B$) einer Kreislinie Tangenten nstruirt, die sich in $C$ schneiden (Fig. 57), so ist

Fig. 57.



$CAO = CBO$ (182);
$BAO = ABO$ (98);

folglich durch Subtraction:

$CAB = CBA$;

folglich $CA = CB$ (Umk. z. 98);

186. d. h.: Durch einen ausserhalb der Kreisfläche liegenden Punkt kann man zwei Tangenten ziehen, welche (bis zu den Berührungspunkten gerechnet) einander gleich sind.

Anm. Die Construction der Tangenten, welche durch einen ausserhalb liegenden Punkt *C* gehen sollen, kommt zurück auf die Bestimmung der Berührungspunkte *A* und *B*. Dieselben sind aber bestimmt durch zwei geometrische Oerter; der erste ist die gegebene Kreislinie, der zweite die über *CO* als Durchmesser beschriebene Kreislinie (170). Beide Kreislinien schneiden sich in *A* und *B*.

Ist *C* in unendliche Entfernung gerückt, d. h. sollen die Tangenten einer gegebenen Geraden parallel sein, so verwandelt sich der zweite geometrische Ort in die durch *O* gehende, auf der gegebenen Geraden senkrecht stehende Gerade. — Rückt *C* auf *OC* bis auf die Kreislinie, so fallen beide Tangenten zusammen.

Da nun über *AB* zwei gleichschenklige Dreiecke (*ACB* und *AOB*) construirt sind, so folgt aus 106:

187. Der Winkel zweier Tangenten wird durch die Verbindungslinie seines Scheitels mit dem Mittelpunkte des Kreises halbirt.

Und umgekehrt:

188. Die Halbirungslinie des Winkels zweier Geraden geht durch den Mittelpunkt des die Geraden berührenden Kreises.

**93.*** *Drehung einer Geraden um einen ausserhalb liegenden Punkt.* — Wenn der Radius *OA* (Fig. 57) einer Kreislinie sich nach *OB* dreht, während die Tangente in *A* beständig auf dem Radius senkrecht steht, also Tangente bleibt, so sagt man, die Tangente drehe sich um den Mittelpunkt des Kreises. — Eine Gerade dreht sich also um einen ausserhalb liegenden Punkt (*O*), wenn sie sich so bewegt, dass ihre Entfernung (*OA*) von diesem Punkte beständig dieselbe bleibt. — Da hiernach die Bewegung der Geraden *AC* durch die Drehung der Strecke *OA* vollkommen bestimmt ist, so bleibt der Punkt *A*, wie alle Punkte der Geraden *AC*, beständig in gleicher Entfernung von *O*; d. h.: Dreht sich eine Gerade um einen ausserhalb

liegenden Punkt, so beschreibt jeder ihrer Punkte einen Kreisbogen. Die Gerade selbst beschreibt bei einer vollen Umdrehung die ganze Ebene, mit Ausnahme der von $OA$ beschriebenen Kreisfläche. Die Kreislinie, als Grenze der Kreisfläche, entsteht also ebensowohl durch Drehung einer Geraden um einen ausserhalb liegenden Punkt, wie durch Bewegung eines Punktes auf einer sich drehenden Geraden. Die Gerade kann also ebenso wie der Punkt als ein die Kreislinie erzeugendes Gebilde angesehen werden.

Anm. Betrachtet man einen Punkt $A$ der Kreislinie als fest, den Mittelpunkt als beweglich, so nähert sich auch bei dieser Entstehungsweise die Kreislinie, wenn der Mittelpunkt sich ins Unendliche von $A$ entfernt, einer Geraden, nämlich der Tangente in $A$, und, wenn der Mittelpunkt sich $A$ bis ins Unendliche nähert (d. h. schliesslich mit $A$ zusammenfällt), einem Punkte, nämlich dem Punkte $A$ selbst (als Schnittpunkt aller durch $A$ gehenden Geraden. (Vgl. 74 und 75.)

Punkt und Gerade stehen also der Kreislinie gegenüber in dem Verhältniss der Reciprocität, welches in der Gegenüberstellung folgender bereits bekannter Sätze zum Ausdruck kommt:

| | |
|---|---|
| Der Punkt kann als specieller Fall der Kreislinie angesehen werden. | Die Gerade kann als specieller Fall der Kreislinie angesehen werden. |
| Durch einen Punkt der Kreislinie gehen zwei zusammenfallende Tangenten an dieselbe. | Eine Tangente schneidet die Kreislinie in zwei zusammenfallenden Punkten. |
| Eine Gerade schneidet die Kreislinie in 2, 1, 0 Punkten. | Von einem Punkte gehen an die Kreislinie 2, 1, 0 Tangenten. |

Anm. Von der Gesammtheit der zu einer Kreislinie gehörigen Tangenten sagt man, dass sie die Kreisfläche umhüllen.

94.* *Drehung einer Strecke um einen ausserhalb liegenden Punkt.* — Wenn durch Drehung einer Geraden um einen ausserhalb liegenden Punkt ($O$) die auf der Geraden liegende Strecke $AB$ in $A_1B_1$ übergeht, so ist, wie oben bemerkt, $OA = OA_1$ und $OB = OB_1$. Da hiernach die Dreiecke $AOA_1$ und $BOB_1$ gleichschenklig sind, so gehen die in den Mitten von $AA_1$ und $B_1$ errichteten Senkrechten durch $O$ (119).

Fig. 58.

Ist $AB$ Seite eines Polygons $ABC\ldots$, elches durch Drehung um $O$ in $A_1B_1C_1\ldots$ bergeht, so gehen aus demselben Grunde ie in den Mitten von $BC$ und $B_1C_1$, $CD$ nd $C_1D_1$ u. s. w. errichteten Senkrechten durch $O$. Man hat lso den Satz:

189. Die in den Mitten der Verbindungsstrecken zweier homologer Ecken von 2 beliebigen congruenten Polygonen errichteten Senkrechten schneiden sich in einem einzigen Punkte, dem Drehungspunkte.

Anm. Sind je zwei homologe Seiten der Polygone parallel, so liegt der Drehungspunkt in unendlicher Entfernung, und die Drehung verwandelt sich in eine Verschiebung.

Wenn insbesondere das Dreieck $\overline{OAB}$ (Fig. 58) sich um die Ecke $O$ bis $OA_1B_1$ dreht, so ist $AOB = A_1OB_1$; also auch $AOA_1 = BOB_1$; d. h.:

190. Dreht eine Strecke ($AB$) sich um einen ausserhalb liegenden Punkt ($O$), so beschreiben die Verbindungsstrecken des Drehungspunktes mit ihren Endpunkten gleiche Winkel.

Von selbst klar ist die Erweiterung dieses Satzes:

191. Dreht eine Figur sich um irgend einen Punkt, so beschreiben ihre Seiten gleiche Winkel. Denn durch Drehung einer einzigen Seite ist die Drehung der ganzen Figur vollkommen bestimmt.

Anm. Beschreibt ein Dreieck $ABC$ um die Mitte $O$ einer seiner Seiten $AB$ einen gestreckten Winkel, so sind die Seiten des neuen Dreiecks denen des ersten entgegengesetzt gerichtet (191), und es fällt $A$ mit $B_1$, $B$ mit $A_1$ zusammen. Die beiden Dreiecke bilden also ein Parallelogramm, und da $OA = OA_1$, und $OC$ gleich und entgegengesetzt gerichtet ist mit $OC_1$, so folgt hieraus der Satz 183.

**95.** *Construction eines Kreises aus gegebenen Bedingungen. — Vorbemerkung.* — Von einem Kreise ist die Grösse und Gestalt bestimmt, wenn man seinen Radius, und die Lage, wenn man seinen Mittelpunkt kennt. Zur Bestimmung des letzteren sind zwei geometrische Oerter erforderlich. Man kann solche Oerter finden, wenn man die Bedingung stellt, dass die Kreislinie durch gegebene Punkte gehen oder gegebene Geraden berühren soll. (Andere Bedingungen werden später hinzugefügt werden. S. Nr. 106.) Demnach sind Radius, Punkt der Kreislinie und Tangente die zur Bestimmung des Mittelpunktes eines Kreises dienenden Elemente.*)

Ist der Mittelpunkt eines Kreises bestimmt, so kennt ma auch den Radius (wenn er nicht schon unter den gegebene Elementen war); nämlich entweder als Verbindungsstrecke de

*) Punkte und Geraden sind natürlich stets in fester Lage auf d Ebene gegeben, der Radius dagegen nur nach seiner Grösse, ebenso w die zu den früher betrachteten Dreiecksconstructionen nöthigen Stücke.

Mittelpunktes mit einem gegebenen Punkte der Kreislinie, oder als Senkrechte, die vom Mittelpunkte auf eine gegebene Tangente gefällt wird.

Ist zur Construction eines Kreises nur eine Bedingung gegeben, so kann jeder Punkt der Ebene Mittelpunkt eines Kreises werden, welcher dieser Bedingung genügt. — Sind zwei Bedingungen gegeben, so existirt für den Mittelpunkt des Kreises ein geometrischer Ort. Bezeichnet man Punkte, durch welche die Kreislinie gehen soll, durch $A$, $B$, . ., Geraden, welche sie berühren soll, durch $a$, $b$, . . ., den Radius durch $r$, so sind folgende Zusammenstellungen von je zweien dieser Gebilde möglich: 1) $AB$, 2) $Ar$, 3) $Aa$, 4) $ab$, 5) $ar$. Im dritten Fall ist zu unterscheiden, ob der Punkt $A$ auf der Geraden $a$ liegt oder nicht; im vierten, ob die Geraden $a$ und $b$ parallel sind oder sich schneiden.

**96.** ***Sätze über den geometrischen Ort des Mittelpunktes eines Kreises.*** — 1) Gegeben $A$, $B$. Jeder Punkt $O$, der von $A$ und $B$ gleichweit entfernt ist, kann Mittelpunkt sein. Daher folgt aus 120:

Soll eine Kreislinie ***durch zwei gegebene Punkte gehen,*** so ist der geometrische Ort ihres Mittelpunktes die auf der Verbindungsstrecke der Punkte in ihrer Mitte errichtete Senkrechte. 192.

Anm. Man zeichne hier, wie in den folgenden Fällen, eine Anzahl Kreise, die den beiden Bedingungen genügen, und achte darauf, welcher Kreis in eine gerade Linie oder in einen Punkt ausartet. Die den geometrischen Ort bildenden Linien mögen jedesmal punktirt gezeichnet werden.

2) Gegeben $A$, $r$. Jeder Punkt $O$, der von $A$ um die Strecke $r$ entfernt ist, kann Mittelpunkt sein. Daher folgt aus der Erklärung der Kreislinie:

Soll eine Kreislinie ***mit gegebenem Radius durch einen gegebenen Punkt gehen,*** so ist der geometrische Ort ihres Mittelpunktes die mit dem Radius aus dem Punkte beschriebene Kreislinie. 193.

3a) Gegeben $A$, $a$; der Punkt liegt auf der Geraden. Jeder Punkt $O$, der von $A$ und $a$ gleichweit entfernt ist, kann Mittelpunkt sein. Diese Eigenschaft haben aber alle Punkte der auf $a$ in $A$ errichteten Senkrechten (113 und 114). Folglich:

Soll eine Kreislinie ***eine gegebene Gerade in einem gegebenen Punkte berühren,*** so ist der geometrische Ort ihres Mittelpunktes die auf der Geraden in dem Punkte errichtete Senkrechte. 194.

Anm. 194 folgt auch als specieller Fall aus 192. — Liegt der Punkt nicht auf der Geraden (*B*, *a*), so ist der geometrische Ort weder eine Gerade, noch eine Kreislinie, sondern eine andere krumme Linie, die später betrachtet wird (Nr. 177).

4a) Gegeben *a*, *b*; die Geraden sind parallel. Jeder Punkt *O*, der von *a* und *b* gleichweit entfernt ist, kann Mittelpunkt sein. Da nun zwei Parallelen überall gleichweit von einander entfernt sind, so wird eine dritte, in der Mitte zwischen *a* und *b* gezogene Parallele die Eigenschaft haben, dass jeder ihrer Punkte von *a* und *b* gleichweit entfernt ist. Also:

195. Soll eine Kreislinie *zwei Parallelen berühren*, so ist der geometrische Ort ihres Mittelpunktes die von beiden gleichweit entfernte Parallele.

Anm. Man beachte, dass durch *a* und *b* auch der Radius der Kreislinie gegeben ist.

4b) Gegeben *a*, *b*; die Geraden schneiden sich. Jeder Punkt *O*, der von *a* und *b* gleichweit entfernt ist, kann Mittelpunkt sein. Daher folgt aus 122:

196. Soll eine Kreislinie *zwei sich schneidende Geraden berühren*, so ist der geometrische Ort ihres Mittelpunktes das Geradenpaar, welches die Winkel der Geraden halbirt.

Anm. Inwiefern ist 195 ein specieller Fall von 196? Wo bleibt die zweite Gerade?

5) Gegeben *a*, *r*. Jeder Punkt *O*, der von *a* den Abstand *r* hat, kann Mittelpunkt sein. Da diese Punkte auf beiden Seiten von *a* liegen können, so folgt (ähnlich wie in 4a):

197. Soll eine Kreislinie *mit gegebenem Radius eine gegebene Gerade berühren*, so ist der geometrische Ort ihres Mittelpunktes das in der Entfernung des Radius zu der Geraden gezogene Parallelenpaar.

**97.** *Sätze von 3 Linien, die durch denselben Punkt gehen.* — Sind zur Construction eines Kreises drei Bedingungen gegeben, so liefern je zwei davon einen geometrischen Ort für den Mittelpunkt. Man erhält also drei geometrische Oerter. Da nun der Mittelpunkt gleichzeitig auf allen dreien liegen muss, so gehen die drei Oerter stets durch denselben Punkt. Aus jeder derartigen Constructionsaufgabe geht also ein Satz hervor, welcher aussagt, dass drei Linien durch denselben Punkt gehen. Diese Sätze sind zum Theil schon bekannt (aus *Aar* folgt z. B. 183, aus *ABr* 119), zum Theil (wenn *B* und *a* zwei der gegebenen Stücke sind) lassen sie sich noch nicht aufstellen. Am wichtigsten sind die Fälle *ABC* und *abc*.

Anm. Man erhält einen Mittelpunkt (also eine Lösung der Aufgabe), wenn die beiden geometrischen Oerter Geraden sind, zwei, wenn der eine eine Gerade, der andere ein Geradenpaar oder eine Kreislinie ist, vier, wenn beide Oerter Geradenpaare oder Kreislinien sind. Da aber eine Kreislinie von einer andern nur in zwei Punkten, oder auch gar nicht, und von einer Geraden ebenfalls nicht immer geschnitten wird, so wird hierdurch die Anzahl der Lösungen eingeschränkt.

Betrachtet man die Punkte $A$, $B$, $C$ als Ecken eines Dreiecks, so erhält man den Satz:

Die in den Mitten der Seiten eines Dreiecks errichteten Senkrechten schneiden sich in *einem* Punkte. 198.

Betrachtet man die Geraden $a$, $b$, $c$ als Seiten eines Dreiecks, so folgen die Sätze:

Die Halbirungslinien der Winkel eines Dreiecks schneiden sich in *einem* Punkte. 199.

Die Halbirungslinien zweier Aussenwinkel und des dritten Innenwinkels in einem Dreieck schneiden sich in *einem* Punkte. 200.

Da (nach Anm. zu 122) jede Halbirungslinie eines Innenwinkels auf derjenigen des zugehörigen Aussenwinkels senkrecht steht, so sind die Strecken $A_1A$, $B_1B$, $C_1C$ (Fig. 59) die Höhen des Dreiecks $A_1B_1C_1$. Daraus folgt der Satz:

Die Höhen eines Dreiecks schneiden sich in *einem* Punkte. 201.

Anm. Zieht man noch durch die Ecken des Dreiecks $A_1B_1C_1$ Parallelen zu den gegenüberliegenden Seiten, so bilden dieselben ein drittes Dreieck, in welchem (nach Anm. zu Aufg. 6, S. 68) $A_1$, $B_1$, $C_1$ die Mitten der Seiten, und $A_1A$, $B_1B$, $C_1C$ die in den Mitten der Seiten errichteten Senkrechten sind. Hieraus folgt wieder 198.

**98.** *Kreis und Figur.* — Liegen die Eckpunkte einer Figur auf einer Kreislinie, so sagt man, die Figur sei dem Kreise einbeschrieben (Sehnenfigur), und der Kreis der Figur umbeschrieben (Umkreis). Die Ecken der Figur sind vom Mittelpunkte des Umkreises gleichweit entfernt. — In einen gegebenen Kreis wird eine Figur beschrieben, indem man Punkte der Kreislinie der Reihe nach verbindet. Damit um eine gegebene Figur ein Kreis beschrieben werden könne, ıss ein Punkt existiren, der von den Eckpunkten der Figur ɜichweit entfernt ist.

Anm. In welcher Beziehung stehen Seiten und Winkel einer Figur m Umkreise?

Sind die durch die Seiten einer Figur bestimmten Geraden ıngenten einer Kreislinie, so sagt man, die Figur sei dem ɾeise umbeschrieben (Tangentenfigur). Der Kreis heisst

der Figur **einbeschrieben** (**Inkreis**), wenn er innerhalb der Figur liegt, **anbeschrieben** (**Ankreis**), wenn ausserhalb. Inkreis und Ankreis heissen zusammen **Berührungskreise**. Die Seiten der Figur sind vom Mittelpunkte eines Berührungskreises gleichweit entfernt. — Um einen **gegebenen Kreis** wird eine Figur beschrieben, indem man in Punkten der Kreislinie Tangenten zieht. Damit in oder an eine **gegebene Figur** ein Kreis beschrieben werden könne, muss ein Punkt existiren, der von den Seiten der Figur gleichweit entfernt ist.

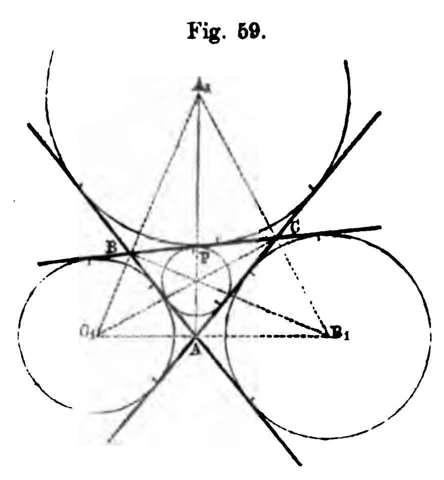
Anm. Wo liegen die Berührungspunkte beim Inkreise, wo beim Ankreise?

**99.** **Dreieck.** — Nach 198 und 192 giebt es für jedes Dreieck **einen** Punkt, der von seinen Ecken, und nach 199, 200 und 196 **vier** Punkte (die Schnittpunkte zweier Geradenpaare), die von seinen Seiten gleichweit entfernt sind. Man kann daher sagen:

202. **Jedes Dreieck hat einen Umkreis und vier Berührungskreise.**

Anm. Wo liegt der Mittelpunkt des Umkreises im spitzwinkligen, rechtwinkligen, stumpfwinkligen Dreieck? Wann sind zwei oder drei Berührungskreise gleich gross? Unter welchen Winkeln schneiden sich die Winkelhalbirenden eines Dreiecks? $\left(R \pm \frac{\alpha}{2},\ R \pm \frac{\beta}{2},\ R \pm \frac{\gamma}{2}\right)$.

Fig. 59.




Bezeichnet man die Seiten des Dreiecks $\overline{ABC}$ mit $a$, $b$, $c$, sodass

$$AB = c, \quad BC = a, \quad CA = b$$

ist; ferner die aus den Ecken des Dreiecks $A, B, C$ an den Inkreis gehenden Tangentenstrecken bezw. mit $p_1$, $p_2$, $p_3$, so ist

$$1) \begin{cases} a = p_2 + p_3 \\ b = p_3 + p_1 \\ c = p_1 + p_2. \end{cases}$$

Wird endlich der Umfang des Dreiecks gleich $2p$ gesetzt, also

$$2)\ p = \frac{a + b + c}{2},$$

so erhält man durch Addition der Formeln 1)

$$2p = 2p_1 + 2p_2 + 2p_3$$

Fig. 60.

oder

3) $\quad p = p_1 + p_2 + p_3,$

woraus in Verbindung mit 1) weiter folgt:

4) $p - p_1 = a,\ p - p_2 = b,\ p - p_3 = c,$

oder

5) $p_1 = p - a;\ p_2 = p - b;\ p_3 = p - c,$

oder, mit Berücksichtigung von 2)

6) $p_1 = \frac{b + c - a}{2};\ p_2 = \frac{c + a - b}{2};\ p_3 = \frac{a + b - c}{2}.$

Anm. Welche Sätze liegen in den Formeln 3), 5), 6)?

Bezeichnet man die aus $B$ und $C$ an den Berührungskreis $A_1$ gezogenen Tangenten bezw. mit $x_2$ und $x_3$, so ist

$$x_2 + x_3 = a.$$

Ferner sind die beiden aus $A$ an denselben Kreis gezogenen Tangenten bezw. gleich $c + x_2$ und $b + x_3$, ihre Summe ist also $b + c + x_2 + x_3$ oder $a + b + c$. Da sie aber einander gleich sind, so ist jede von ihnen [nach 2)] gleich $p$. Man hat also den Satz:

Die aus einer Ecke eines Dreiecks an den gegenüberliegenden Ankreis gehende Tangentenstrecke ist gleich dem halben Umfang des Dreiecks. 203.

Da, wie eben gefunden,

$$c + x_2 = p;\ b + x_3 = p,$$

so ist

$$x_2 = p - c = p_3;\ x_3 = p - b = p_2.$$

d. h.: Trägt man auf jeder Seite eines Dreiecks die beiden an den Inkreis gehenden Tangentenstrecken in umgekehrter Reihenfolge ab, so sind ihre Endpunkte die Punkte, in denen die Seiten des Dreiecks on den drei Ankreisen berührt werden. 204.

Ferner folgt aus 203:

Trägt man auf den Verlängerungen jeder Seite ines Dreiecks die aus der gegenüberliegenden Ecke n den Inkreis gehende Tangentenstrecke ab, so sind ie Endpunkte die Punkte, in denen die Verlängerungen der Dreiecksseiten von den drei Ankreisen rührt werden. 205.

**100.** Viereck. — Da je zwei gegenüberliegende Winkel eines Sehnenvierecks Peripheriewinkel auf entgegengesetzten Bogen sind, so hat man (178) den Satz:

206. Im Sehnenviereck betragen je zwei gegenüberliegende Winkel zusammen $2R$.

Anm. Umgekehrt muss, wenn ein gegebenes Viereck diese Bedingung erfüllt, die durch drei Eckpunkte desselben gelegte Kreislinie auch durch den vierten gehen, da der geometrische Ort der vierten Ecke (nach 167) ein Bogen dieser Kreislinie ist. — Wann kann hiernach um ein Parallelogramm, um ein Trapez eine Kreislinie beschrieben werden? Wann um ein überschlagenes, ein einspringendes Viereck?

Bezeichnet man die Ecken eines Tangentenvierecks mit $A_1$, $A_2$, $A_3$, $A_4$, und die aus den Ecken an den Kreis gehenden Tangentenstrecken bezw. mit $p_1$, $p_2$, $p_3$, $p_4$, so ist

$$A_1A_2 = p_1 + p_2; \quad A_2A_3 = p_2 + p_3;$$
$$A_3A_4 = p_3 + p_4; \quad A_4A_1 = p_4 + p_1;$$

folglich durch Addition:

$$A_1A_2 + A_3A_4 = p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = A_2A_3 + A_4A_1;$$

also:

207. Im Tangentenviereck ist die Summe zweier Gegenseiten gleich der Summe der beiden anderen.

Anm. Umgekehrt muss, wenn ein gegebenes Viereck diese Bedingung erreicht, die Kreislinie, welche drei seiner Seiten berührt, auch die vierte berühren, weil die aus den Endpunkten dieser vierten Seite an die Kreislinie gelegten Tangentenstrecken zusammen gleich der vierten Seite sind, also mit ihr zusammenfallen. — Wann kann hiernach in ein Parallelogramm eine Kreislinie beschrieben werden? — Man untersuche den Kreis, welcher die Verlängerungen der Seiten eines Vierecks berührt. (Vgl. Fig. 44, 5a.)

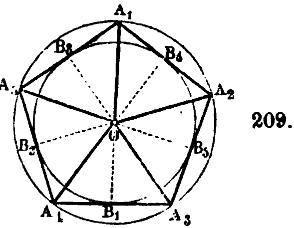
**101.** Regelmässiges Vieleck. — Ein Vieleck heisst regelmässig, wenn alle Seiten gleich und alle Winke' gleich sind.

Eine Kreislinie sei in $n$ gleiche Theile $b$ getheilt. — Verbindet man je zwei benachbarte Theilpunkte, so entsteht ein Sehnenvieleck. Alle Seiten desselben sind gleich nach **162**; und da jeder seiner Winkel ein Peripheriewinkel ist, der z dem Bogen $(n-2)b$ gehört, so sind nach 166 auch alle sein Winkel gleich. Mithin:

208. Theilt man eine Kreislinie in $n$ gleiche Theil und verbindet die Theilpunkte der Reihe nach, s entsteht ein dem Kreise einbeschriebenes regel mässiges $n$-Eck.

Da die Seiten des regelmässigen Polygons vom Mittelpunkte $O$ des umbeschriebenen Kreises gleichen Abstand haben (163), so ist $O$ gleichzeitig Mittelpunkt eines dem Polygon einbeschriebenen Kreises, und man hat den Satz:

Fig. 61.




In jedes regelmässige Polygon kann ein Kreis beschrieben werden. 209.

Da nach 41 die zu den Seiten eines regelmässigen Polygons gehörigen Centriwinkel ($A_1OA_2$, $A_2OA_3$, ...) gleich sind, und nach 158 durch die Senkrechten $OB_4$, $OB_5$ ... halbirt werden, so sind auch alle diese halben Winkel einander gleich, und ebenso die Centriwinkel $B_3OB_4$, $B_4OB_5$, ..., folglich auch die Bogen $\widehat{B_3B_4}$, $\widehat{B_4B_5}$, ... Demnach theilen die Punkte, in welchen ein einbeschriebener Kreis die Seiten eines regelmässigen Polygons berührt, die Kreislinie in $n$ gleiche Theile, und umgekehrt:

Theilt man eine Kreislinie in $n$ gleiche Theile, und zieht durch die Theilpunkte Tangenten, so entsteht ein dem Kreise umbeschriebenes regelmässiges $n$-Eck. 210.

Da nach 187 die Winkel dieses Polygons durch die Strecken $A_1O$, $A_2O$, ... halbirt werden, und einander gleich sind, so sind auch alle ihre Hälften unter einander gleich; folglich die Dreiecke $OA_1A_2$, $OA_2A_3$, ... gleichschenklig, und $OA_1 = OA_2 = \ldots$ Der Punkt $O$ hat also gleichen Abstand von allen Ecken des Polygons, und ist der Mittelpunkt eines demselben umbeschriebenen Kreises. Man hat also den Satz:

Um jedes regelmässige Polygon kann ein Kreis beschrieben werden. 211.

Der Radius des einem regelmässigen Polygon umbeschriebenen Kreises heisst grosser Radius, der des einbeschriebenen Kreises kleiner Radius, der gemeinsame Mittelpunkt beider Kreise Mittelpunkt des Polygons.

Aus Betrachtung der Fig. 61 ergeben sich weiter folgende Sätze:

Jedes regelmässige Polygon wird durch seine grossen Radien in $n$ congruente gleichschenklige Dreiecke (*Bestimmungsdreiecke*), durch seine kleinen Radien in $n$ congruente Vierecke, durch beide Gruppen 212.

von Radien zusammen in $2n$ congruente rechtwinklige Dreiecke getheilt.

213. Jeder Centriwinkel des regelmässigen $n$-Ecks (Winkel an der Spitze des Bestimmungsdreiecks) beträgt $\frac{4}{n}R$.

214. Die Halbirungslinien der Winkel eines regelmässigen Polygons und die in den Mitten seiner Seiten errichteten Senkrechten gehen alle durch seinen Mittelpunkt.

Anm. Welches Dreieck, welches Viereck ist regelmässig? Wie gross ist der Winkel, den zwei benachbarte grosse oder kleine Radien, ein grosser und der benachbarte kleine bilden? Welche Eigenschaft haben die durch die kleinen Radien gebildeten Vierecke?

215. Jeder Winkel eines regelmässigen $n$-Ecks beträgt $\frac{2n-4}{n}R$. (83)

Ein regelmässiges Polygon ist durch sein Bestimmungsdreieck, oder durch seine Seitenzahl und den Radius des um- oder einbeschriebenen Kreises, oder durch drei seiner Eckpunkte vollkommen bestimmt.

Anm. Die Construction einzelner regelmässiger Polygone folgt in Nr. 156—161.

216. Die Halbirungslinien der Centriwinkel eines dem Kreise einbeschriebenen regelmässigen $n$-Ecks bestimmen auf der Kreislinie $n$ Punkte, welche zusammen mit den Ecken des gegebenen Polygons die Eckpunkte eines dem Kreise einbeschriebenen regelmässigen $2n$-Ecks sind (Fig. 62.)

217. Verbindet man (im umgekehrten Falle) die ungeraden Ecken (die 1te, 3te, 5te ..) eines regelmässigen $2n$-Ecks der Reihe nach, so erhält man ein regelmässiges $n$-Eck.

218. Die Verbindungslinien der Eckpunkte eines dem Kreise umbeschriebenen regelmässigen $n$-Ecks mit dem Mittelpunkte bestimmen auf der Kreislinie $n$ Punkte, welche zusammen mit den Berührungspunkten des gegebenen Polygons die Berührungspunkte eines dem Kreise umbeschriebenen regelmässigen $2n$-Ecks sind (Fig. 63).

219. Verlängert man (im umgekehrten Falle) die ungeraden Seiten (die 1te, 3te, 5te ..) eines regelmässigen $2n$-Ecks, so bilden dieselben der Reihe nach die Seiten eines regelmässigen $n$-Ecks.

**102.*** Nach 109 sind zwei benachbarte Seiten ($A_1C$ und $CA_2$) eines dem Kreise einbeschriebenen regelmässigen $2n$-Ecks zusammen grösser als eine Seite ($A_1A_2$) des einbeschriebenen $n$-Ecks. Bezeichnet man diese Seiten bezw. mit $s_n$ und $s_{2n}$, und die ganzen Umfänge der Figuren mit $u_n$ und $u_{2n}$, so ist hiernach

Fig. 62.

$$2s_{2n} > s_n,$$

oder, mit $n$ multiplicirt:

$$2n \,.\, s_{2n} > n \,.\, s_n;$$

d. h.:

$$u_{2n} > u_n;$$

d. h.: Der Umfang eines regelmässigen dem Kreise 220.
einbeschriebenen $2n$-Ecks ist grösser als der des einbeschriebenen $n$-Ecks.

Aus 220 folgt:

Hat man, von einem regelmässigen, dem Kreise 221.
einbeschriebenen $n$-Eck ausgehend, durch $k$-malige Halbirung der Centriwinkel (nach 216) ein regelmässiges $2kn$-Eck construirt, so sind $2k$ Seiten des letzteren zusammen grösser als eine Seite des ersteren.

Denkt man sich die Halbirung der Centriwinkel ins Unendliche fortgesetzt, so rücken die Theilpunkte auf der Kreislinie einander immer näher, und der Umfang des Polygons nähert sich immer mehr der Kreislinie selbst. Hieraus folgt:

Man kann die Kreislinie als ein regelmässiges 222.
Polygon von unendlich vielen und unendlich kleinen Seiten betrachten.

Anm. Dieselbe Betrachtungsweise lässt sich auf jede krumme Linie anwenden, wenn man von einer Reihe anstossender gleicher Sehnen ausgeht, und durch Senkrechten, die in ihrer Mitte errichtet werden, neue Theilpunkte herstellt.

Demnach folgt aus 220:

Der Umfang einer Kreislinie ist grösser als der 223.
eines einbeschriebenen regelmässigen Polygons.

Und aus 221:

Jeder Bogen einer Kreislinie ist grösser als die 224.
zugehörige Sehne.

Anm. 224 folgt auch aus 223, und umgekehrt.

**103.*** Nach 108 ist in den rechtwinkligen Dreiecken $A_1C_1D_1$ und $A_2C_2D_2$ (Fig. 63)

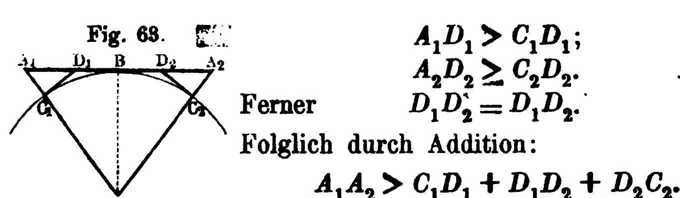


Fig. 63.

$$A_1D_1 > C_1D_1;$$
$$A_2D_2 \geq C_2D_2.$$
Ferner $$D_1D_2 = D_1D_2.$$
Folglich durch Addition:
$$A_1A_2 > C_1D_1 + D_1D_2 + D_2C_2.$$

Bezeichnet man nun Seite und Umfang des dem Kreise umbeschriebenen $n$-Ecks mit $S_n$ und $U_n$, und ebenso Seite und Umfang des umbeschriebenen $2n$-Ecks mit $S_{2n}$ und $U_{2n}$, so ist
$$A_1A_2 = S_n;\ C_1D_1 = C_2D_2 = \tfrac{1}{2}S_{2n};\ D_1D_2 = S_{2n};$$
also geht die letzte Formel über in
$$S_n > 2 \,.\, S_{2n},$$
oder, mit $n$ multiplicirt:
$$n \,.\, S_n > 2n \,.\, S_{2n};$$
d. h.: $$U_n \geq U_{2n};$$
225. d. h.: Der Umfang eines regelmässigen dem Kreise umbeschriebenen $2n$-Ecks ist kleiner als der des einbeschriebenen $n$-Ecks.

Aus 225 folgt:

226. Hat man, von einem regelmässigen, dem Kreise umbeschriebenen $n$-Eck ausgehend, durch $k$-maliges Tangentenziehen (nach 218) ein regelmässiges $2kn$-Eck construirt, so sind $2k$ Seiten des letzteren zusammen kleiner als eine Seite des ersteren.

Denkt man sich das Ziehen der Tangenten ins Unendliche fortgesetzt, so rücken die Berührungspunkte auf der Kreislinie einander immer näher, und der Umfang des Polygons nähert sich immer mehr der Kreislinie selbst. (Vgl. Nr. 93.) Durch diese Betrachtung erhält man wieder den Satz 222.

Demnach folgt aus 225:

227. Der Umfang einer Kreislinie ist kleiner als der eines umbeschriebenen regelmässigen Polygons.

Und aus 226:

228. Jeder Bogen einer Kreislinie ist kleiner als die in seiner Mitte gezogene und durch die Verlängerungen der ihn einschliessenden Radien begrenzte Tangentenstrecke.

Anm. 228 folgt auch aus 227, und umgekehrt.

**104.** *Zwei Kreislinien.* — Da durch drei gegebene Punkte nur eine Kreislinie gelegt werden kann (202), so können zwei

Kreislinien nicht drei oder mehr gemeinsame Punkte haben. Da ferner nach 192 unendlich viele Kreislinien durch zwei gegebene Punkte gehen, so können zwei Kreislinien zwei gemeinsame Punkte haben. Diese können in einen einzigen zusammenfallen, oder ganz verschwinden.

Fig. 64.

Zwei gemeinsame Punkte. — Die Verbindungsstrecke der Mittelpunkte zweier beliebiger Kreislinien (bezw. die durch diese Strecke bestimmte Gerade) heisst ihre Centrallinie.

Verbindet man die Schnittpunkte ($A$, $B$) zweier Kreislinien mit ihren Mittelpunkten ($O$, $O_1$), so folgt aus 109 und 110:

Die Centrallinie zweier sich schneidender Kreis- 229.
linien ist kleiner als die Summe, und grösser als die Differenz der Radien (und umgekehrt).

Zieht man durch die beiden Schnittpunkte $A$ und $B$ die gemeinsame Secante, so folgt aus 106:

Die Centrallinie zweier sich schneidender Kreis- 230.
linien steht senkrecht auf der gemeinsamen Secante und halbirt die gemeinsame Sehne.

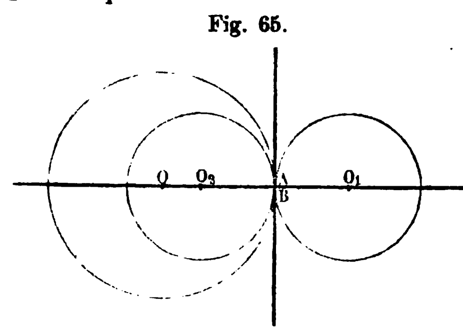
Ein gemeinsamer Punkt. — Bewegt der Kreis $O_1$ sich so, dass sein Mittelpunkt $O_1$ auf der Centrallinie sich von $O$ entfernt, so werden in den Dreiecken $OAO_1$ und $OBO_1$ die Winkel $OAO_1$ und $OBO_1$ grösser (123) und nähern sich dem Werthe $2R$. Ist $OAO_1 = OBO_1 = 2R$ (Fig. 65), so fällt $A$ mit $B$ zusammen, die gemeinsame Secante geht in eine gemeinsame Tangente über (vgl. Nr. 92), und man sagt, die Kreise berühren sich von aussen. Da nun $OA + AO_1 = OO_1$ ist, so hat man den Satz:

Die Centrallinie zweier sich von aussen berüh- 231.
ender Kreislinien ist gleich der Summe der Radien und umgekehrt).

Anm. Ist im umgekehrten Falle die Centrallinie ($OO_1$) zweier Kreislinien gleich der Summe der beiden Radien, so steht die auf $OO_1$ in $A$ richtete Senkrechte auf jedem der beiden Radien in seinem Endpunkte nkrecht, ist also gemeinsame Tangente beider Kreislinien (180) im ınkte $A$. Mithin berühren sich die Kreislinien in diesem Punkte.

Bewegt der Kreis $O_1$ (Fig. 64) sich so, dass sein Mittelpunkt $O_1$ auf der Centrallinie sich $O$ nähert, so werden in den Dreiecken $\overline{OAO_1}$ und $\overline{OBO_1}$ die Winkel $OAO_1$ und $OBO_1$ kleiner (123) und nähern sich dem Werthe Null. Ist $OAO_2 = OBO_2 = 0$ (Fig. 65), so fällt $A$ mit $B$ zusammen, die gemeinsame Secante geht in eine gemeinsame Tangente über (wie oben), und man sagt, die Kreise berühren sich von innen. Da nun $OA - O_2A = OO_2$ ist, so hat man den Satz:

Fig. 65.




232. Die Centrallinie zweier sich von innen berührender Kreislinien ist gleich der Differenz der Radien (und umgekehrt).

Anm. Hinsichtlich der Umkehrung dieses Satzes s. d. vorige Anm. — Zwei gleiche Kreislinien können sich nur von aussen berühren.

Aus 230 folgt:

233. Die Centrallinie zweier sich berührender Kreislinien steht senkrecht auf der gemeinsamen Tangente und geht durch den Berührungspunkt.

Kein gemeinsamer Punkt. — Bewegt der Kreis $O_1$ (Fig. 65) sich so, dass sein Mittelpunkt $O_1$ auf der Centrallinie sich von $O$ entfernt, so haben die beiden Kreislinien keinen Punkt mehr gemeinsam, und jeder Kreis liegt ausserhalb des anderen. Da durch diese Bewegung die Centrallinie grösser geworden ist, als die Summe der Radien, so hat man den Satz:

234. Die Centrallinie zweier ausser einander liegender Kreislinien*) ist grösser als die Summe der Radien (und umgekehrt).

Bewegt der Kreis $O_2$ (Fig. 65) sich so, dass sein Mittelpunkt $O_2$ auf der Centrallinie sich $O$ nähert, so haben die beiden Kreislinien ebenfalls keinen Punkt mehr gemeinsam

*) Dieser Ausdruck ist nicht ganz genau, da die Lage in, bezw. ausser einander sich nicht auf die Kreislinien, sondern die Kreisflächen bezieh und im ersteren Falle nur die kleinere Kreisfläche in der grösseren lieg nicht aber umgekehrt. Der Ausdruck kann indess kein Missverständni hervorrufen und empfiehlt sich durch seine Kürze.

und ein Kreis liegt innerhalb des anderen. Da durch diese Bewegung die Centrallinie kleiner geworden ist als die Differenz der Radien, so hat man den Satz:

Die Centrallinie zweier in einander liegender Kreislinien*) ist kleiner als die Differenz der Radien (und umgekehrt). 235.

Ist insbesondere die Centrallinie gleich Null, so haben die beiden Kreise denselben Mittelpunkt und heissen concentrisch.

**105.** Rückblick. — Bezeichnet man die Radien der beiden Kreise durch $r$ und $\varrho$, die Centrallinie (als Strecke) durch $c$, so sind demnach zwischen zwei Kreislinien folgende Beziehungen möglich:

1) $c > r + \varrho$. Lage ausser einander.
2) $c = r + \varrho$. Berührung von aussen.
3) $c \lessgtr \begin{matrix} r + \varrho \\ r - \varrho \end{matrix}$. Schnitt.
4) $c = r - \varrho$. Berührung von innen.
5) $c < r - \varrho$. Lage in einander.

Anm. Von zwei sich berührenden Kreislinien sagt man auch, dass sie zwei zusammenfallende, von zwei ausser oder in einander liegenden, dass sie zwei imaginäre Punkte gemeinsam haben (vgl. Nr. 153). — Anwendung der Beziehungen zweier Kreise auf die Theorie der Sonnenfinsterniss.

Unter den zur Construction einer Kreislinie gegebenen Bedingungen kann sich nun auch die befinden, dass die gesuchte Kreislinie eine gegebene berühren soll. Da die gegebene Kreislinie in eine Gerade oder einen Punkt ausarten kann, so ist diese Bedingung die allgemeinste, und enthält die beiden letzteren (nämlich dass die gesuchte Kreislinie eine gegebene Gerade berühren oder durch einen gegebenen Punkt gehen soll) als specielle Fälle. Jedoch führen unter den Zusammenstellungen einer Kreislinie mit einer andern Bedingung nur wenige zu solchen geometrischen Oertern, die durch Lineal und Cirkel construirbar sind. Man erhält noch folgende

**106.** *Sätze über den geometrischen Ort des Mittelpunktes [d]es Kreises.* — 6) (Fortsetzung zu 197.) Gegeben $k_1$, $A_1$ (eine [K]reislinie und ein Punkt auf derselben). Da $k_1$ und die ge[su]chte Kreislinie in $A_1$ dieselbe Tangente haben, die durch $k_1$ [un]d $A_1$ vollkommen bestimmt ist, so ist dieser Fall auf 194 [zu]rückgeführt, und man hat den Satz:

*) Siehe Fussnote vor. Seite.

236. Soll eine Kreislinie *eine gegebene Kreislinie in einem gegebenen Punkte berühren,* so ist der geometrische Ort ihres Mittelpunktes die durch den Punkt und den Mittelpunkt gehende Gerade.

Anm. Man untersuche die verschiedenen Fälle der Lage des gegebenen Punktes zur Kreislinie.

7) Gegeben $k_1$, $r$. Ist $r_1$ der Radius und $O_1$ der Mittelpunkt des gegebenen Kreises $k_1$, so kennt man die Centrallinie $(r_1 \pm r)$ der beiden Kreise. Jeder Punkt, dessen Abstand von $O_1$ gleich $r_1 \pm r$ ist, kann Mittelpunkt des gesuchten Kreises sein. Demnach:

237. Soll eine Kreislinie *mit gegebenem Radius eine gegebene Kreislinie berühren,* so ist der geometrische Ort ihres Mittelpunktes die mit der Summe oder Differenz der beiden Radien aus dem gegebenen Mittelpunkte beschriebene Kreislinie.

Anm. Soll eine Kreislinie zwei gegebene Kreislinien berühren, so ist in zwei Fällen der geometrische Ort ihres Mittelpunktes leicht zu construiren. 1) Sind die beiden Kreislinien concentrisch, $O$ ihr Mittelpunkt, $r$ und $\varrho$ ihre Radien, so ist der geometrische Ort die mit $\frac{r \pm \varrho}{2}$ aus $O$ beschriebene Kreislinie, und der Radius des gesuchten Kreises $\frac{r \mp \varrho}{2}$. 2) Sind die beiden Kreislinien einander gleich, so ist der geometrische Ort die auf der Centrallinie in ihrer Mitte errichtete Senkrechte. Ein specieller Fall hiervon ist 192.

---

# Zweite Abtheilung.

# Geometrie der ruhenden Gebilde.

**107.*** *Vorbemerkung.* — Die bisherigen Betrachtungen beruhten auf der Eigenschaft der Ebene, dass ein in ihr befindliches Gebilde sich frei in ihr bewegen kann, so dass es sich selbst congruent bleibt, d. h. Gestalt und Grösse unverändert beibehält. Das Gebilde am Ende der Bewegung ist also dem Gebilde am Anfang der Bewegung congruent. — Wir haben ferner gesehen (189), dass es für zwei congruente Gebilde stets einen Punkt giebt, um welchen gedreht das eine Gebilde in das andere übergeht, und dass, wenn dieser Punkt in unendliche Ferne rückt, die Drehung sich in eine Verschiebung ver-

wandelt. In diesem Falle aber beschreiben alle Punkte des bewegten Gebildes parallele Geraden (Anm. zu 138). Man kann hiernach zwei congruente Gebilde stets in solche Lage zu einander bringen, dass die Verbindungslinien je zweier homologer Punkte parallel sind (vgl. Fig. 46, S. 70). Man sagt in diesem Falle, dass die beiden Gebilde sich in perspectivischer Lage befinden. — Wir haben endlich gesehen (S. 10), dass man, statt ein Gebilde durch Bewegung an einen anderen Ort zu versetzen, auch annehmen kann, es sei an diesem Orte ein mit dem ersten an Gestalt und Grösse vollständig übereinstimmendes (congruentes) Gebilde construirt. Wenn dann beide Gebilde sich in perspectivischer Lage befinden, so werden 1) alle Verbindungslinien je zweier homologer Punkte durch einen unendlich fernen Punkt gehen, 2) alle Schnittpunkte je zweier homologer Geraden auf einer unendlich fernen Geraden liegen (d. h. unendlich ferne Punkte sein). Vgl. Fig. 46.

Diese letztere Betrachtung lässt sich nun verallgemeinern. Man kann nämlich entweder den unendlich fernen Punkt in 1) oder die unendlich ferne Gerade in 2), oder beides in endliche Entfernung rücken, und erhält dadurch statt eines congruenten Gebildes ein Gebilde entweder mit gleicher Gestalt und verschiedener Grösse, oder mit verschiedener Gestalt und gleicher Grösse, oder mit verschiedener Gestalt und verschiedener Grösse.

Dieselbe Verallgemeinerung erleidet auch der Begriff der perspectivischen Lage. Man sagt also allgemein: Zwei Gebilde liegen perspectivisch, wenn alle Verbindungslinien je zweier homologer Punkte durch denselben Punkt gehen. Zwei Gebilde, welche so beschaffen sind, dass sie in perspectivische Lage gebracht werden können, heissen projectivisch, und die zwischen ihnen bestehende Beziehung heisst Projectivität.

Indem man nun annimmt, dass die Verbindungslinien homologer Punkte a) durch einen unendlich fernen, b) durch einen endlich fernen Punkt gehen; ferner, dass die Schnittpunkte homologer Geraden 1) auf einer undlich fernen, 2) auf einer endlich fernen Geraden gen, erhält man durch Zusammenstellung von 1) und 2) mit und b) folgende Hauptarten projectivischer Beziehung.

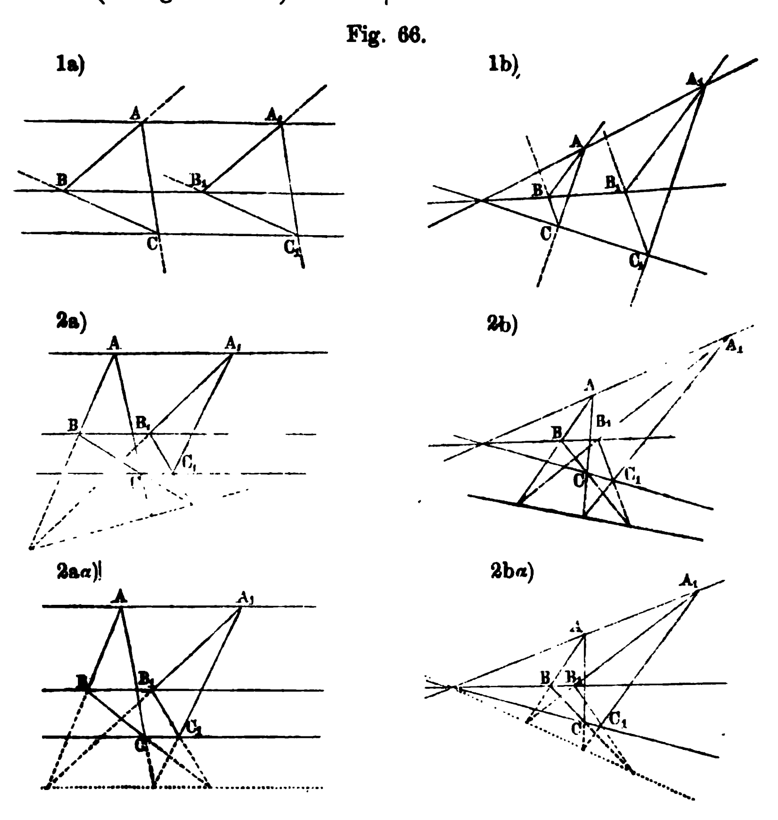
1a) Congruenz. (≅) 1b) Aehnlichkeit. (∼)
2a) Affinität. (ℓ) 2b) Collineation. (⊼)

Geht im Falle 2) die endlich ferne Gerade durch den

Schnittpunkt der Verbindungslinien homologer Punkte, so entstehen aus Affinität und Collineation die speciellen Fälle:

| | |
|---|---|
| 2aα) Centrale Affinität. (=ɩ=) (Affingleichheit.) | 2bα) Centrale Collineation. |

Fig. 66.




Anm. Da in allen diesen Fällen (ausgenommen 1a) das neue Gebilde aus dem alten sich nicht durch Bewegung ableiten lässt, so wird man die gegenseitigen Beziehungen beider Gebilde am besten erkennen, wenn sie perspectivisch liegen. Es wird aber auch festzustellen sei welche Beziehungen den Gebilden erhalten bleiben, wenn man sie durc Bewegung aus dieser Lage herausbringt.

Da der Punkt weder Grösse noch Gestalt hat, und die Gerade er durch Bewegung in der Ebene aus sich heraus tritt, so finden die ebe erwähnten Verallgemeinerungen auf die Geometrie der Geraden keine An wendung. Die Lagenbeziehungen fester Punkte auf einer Geraden müsse im Zusammenhange mit den durch diese Punkte gehenden Geraden unte

sucht werden, da das Mittel, diese Beziehungen selbständig zu entwickeln (die geometrischen Operationen mit Punkten*)), noch nicht in den Kreis der Elemente eingeführt ist.

# I. Die Aehnlichkeit.

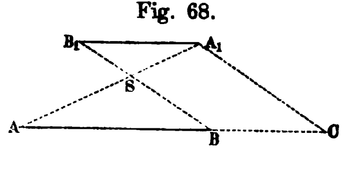
## 1) Dreiecke.

### a. Aehnlichkeit bei perspectivischer Lage.

**108.** *Definition ähnlicher Dreiecke.* — Verbindet man die Endpunkte zweier paralleler Strecken $AB$ und $A_1B_1$ durch gerade Linien, welche sich in $S$ schneiden (Fig. 67), so entstehen zwei Dreiecke, $SAB$ und $SA_1B_1$, in denen 1) je zwei „homologe" Seiten parallel sind ($SA \parallel SA_1$, $SB \parallel SB_1$, $AB \parallel A_1B_1$), und 2) die Verbindungslinien je zweier „homologer" Ecken ($AA_1$, $BB_1$) durch denselben Punkt ($S$) gehen. Vermöge der letzteren Eigenschaft sagt man, dass die Dreiecke (wie auch die Strecken $AB$ und $A_1B_1$) sich in perspectivischer Lage befinden, vermöge beider Eigenschaften, dass sie einander ähnlich seien. Der Punkt $S$ heisst der Aehnlichkeitspunkt der Dreiecke, und zwar äusserer, wenn, wie in Fig. 67, die aus ihm nach zwei homologen Ecken gehenden Strecken gleiche Richtung haben, innerer, wenn, wie in Fig. 68, diese Strecken entgegengesetzte Richtung haben. Aus Betrachtung von Fig. 67 und 68 folgt:

Fig. 67.

Fig. 68.




Je zwei homologe Seiten in zwei ähnlichen, perspectivisch liegenden Dreiecken haben gleiche Richtung, wenn der Aehnlichkeitspunkt ein äusserer, entgegengesetzte, wenn er ein innerer ist. 238.

Zieht man zu einer Seite eines Dreiecks eine 239.
arallele (welche die beiden anderen Seiten, oder eren Verlängerungen schneidet), so ist das abgeschnittene Dreieck dem gegebenen ähnlich.

Anm. Construction eines mit einem gegebenen Dreieck ähnlichen Dreiecks.

---

*) System der Raumlehre I. Nr. 26 ff.; Nr. 110 ff.

**109.** ***Eigenschaften ähnlicher Dreiecke.*** — 1) Aus 65 folgt für Fig. 67, und aus 66 und 61 für Fig. 68 der Satz:

240. In zwei ähnlichen Dreiecken sind je zwei homologe Winkel*) einander gleich.

2) Denkt man sich in Fig. 67 und 68 durch $S$ die Parallele zu $AB$ gezogen, so folgt aus 32:

$$(1)\quad \frac{SA}{SA_1} = \frac{SB}{SB_1},$$

oder (nach Theil I, 103):

$$(2)\quad \frac{SA}{SB} = \frac{SA_1}{SB_1},$$

oder (nach Theil I, 104) aus (1): $\frac{SA \mp SA_1}{SA} = \frac{SB \mp SB_1}{SB}$;

d. h.: $$(3)\quad \frac{A_1A}{SA} = \frac{B_1B}{SB}.$$

Die Formeln (1), (2), (3) enthalten den Satz (für Fig. 67 ausgesprochen):

241. Zieht man in einem Dreieck eine Parallele zu einer Seite, so ist 1) das Verhältniss des oberen oder unteren Abschnittes zur ganzen Seite auf den beiden andern Seiten gleich, 2) die beiden anderen Seiten verhalten sich wie ihre oberen oder unteren Abschnitte.

Zieht man $A_1C \parallel SB$ bis zum Durchschnitt mit $AB$, so ist $A$ der Aehnlichkeitspunkt der Dreiecke $\overline{ASB}$ und $\overline{AA_1C}$, und aus Formel (3) folgt:

$$\frac{A_1S}{AS} = \frac{CB}{AB},$$

oder, da $CB = A_1B_1$ ist (126):

$$(4)\quad \frac{A_1S}{AS} = \frac{A_1B_1}{AB};$$

242. d. h.: Zieht man in einem Dreieck eine Parallele zu einer Seite, so verhält sich diese Seite zur Parallele, wie eine der anderen Seiten zu ihrem oberen Abschnitt

Aus (4) folgt endlich

$$(5)\quad \frac{A_1S}{A_1B_1} = \frac{AS}{AB}.$$

Die Formeln (2) und (5) aber geben zusammen den Satz

*) D. h. Winkel, deren Schenkel homologe Seiten sind.

In zwei ähnlichen Dreiecken sind je zwei homologe 243.
Seitenverhältnisse einander gleich.

**110.** ***Bestimmung der Gestalt eines Dreiecks durch Winkel und Seitenverhältnisse.*** — Von ähnlichen Gebilden sagt man, dass sie gleiche Gestalt haben. Die Gestalt eines Dreiecks ist also bestimmt durch diejenigen Stücke, in welchen ähnliche Dreiecke übereinstimmen, nämlich durch Winkel (240) und Seitenverhältnisse (243). Da durch zwei Winkel eines Dreiecks der dritte bestimmt ist (77) und durch zwei Seitenverhältnisse das dritte $\left(\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} = \frac{a}{c}\right)$, so kommen für die Bestimmung der Gestalt des Dreiecks nur 2 Winkel und 2 Seitenverhältnisse in Betracht. Nun sind zur Construction der ähnlichen Dreiecke $\overline{SAB}$ und $\overline{SA_1B_1}$ (Fig. 69) ausreichend:

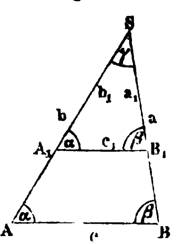


Fig. 69.

1) Zwei Winkel $\gamma$, $\alpha$. (Eine Seite, $b$ oder $b_1$, wird beliebig angenommen, und dann das Dreieck aus $b$, $\alpha$, $\gamma$ construirt.)

2) Ein Winkel $\gamma$ und das Verhältniss der ihn einschliessenden Seiten. (Das Dreieck wird aus zwei in dem gegebenen Verhältniss stehenden Strecken $a$ und $b$, oder $a_1$ und $b_1$, und aus dem Winkel $\gamma$ construirt.)

3) Ein Winkel $\gamma$ und das Verhältniss einer anliegenden zur gegenüberliegenden Seite. (Das Dreieck wird aus zwei in dem gegebenen Verhältniss stehenden Strecken $b$ und $c$, oder $b_1$ und $c_1$ und aus dem Winkel $\gamma$ construirt.)*)

4) Zwei Seitenverhältnisse. (Das Dreieck wird aus drei in den gegebenen Verhältnissen stehenden Strecken $a$, $b$, $c$, oder $a_1$, $b_1$, $c_1$ construirt.)

Man hat also den Satz:

Zur Bestimmung der Gestalt eines Dreiecks durch 244.
Winkel und Seitenverhältnisse sind zwei dieser Stücke othwendig und hinreichend.

Ist nun zu einem von zwei ähnlichen, perspectivisch lie-enden Dreiecken ($\overline{abc} \sim \overline{a_1b_1c_1}$) irgendwo in der Ebene ein ngruentes ($\overline{a_2b_2c_2} \cong \overline{a_1b_1c_1}$) construirt, so ist auch $abc \sim a_2b_2c_2$. an kann daher aus 2 Seitenverhältnissen oder Winkeln ähn-

*) Damit nur eine Lösung möglich sei, muss $c > b$ sein. Vgl. 92.

liche Dreiecke nicht nur in perspectivischer, sondern in beliebiger Lage construiren, und aus den 4 oben aufgestellten Fällen der Bestimmung der Gestalt eines Dreiecks gehen hervor

Die Aehnlichkeitssätze:

245. 1) Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn sie in zwei Winkeln übereinstimmen.

246. 2) Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn sie in einem Winkel und dem Verhältniss der ihn einschliessenden Seiten übereinstimmen.

247. 3) Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn sie in einem Winkel und dem Verhältniss einer anliegenden zur (grösseren) gegenüberliegenden Seite übereinstimmen.

248. 4) Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn sie in zwei Seitenverhältnissen übereinstimmen.

Anm. Andrer Beweis der Aehnlichkeitssätze. Sind $abc$ und $a_2b_2c_2$ die gegebenen Dreiecke, so trage man (Fig. 69) $b_2$ von $S$ aus auf $b$ ab bis $A_1$, und ziehe $A_1B_1 \parallel AB$, wodurch das Dreieck $SA_1B_1$ ($a_1b_1c_1$) entsteht. Dann ist $a_1b_1c_1 \sim abc$ (239), und $a_1b_1c_1 \cong a_2b_2c_2$ (für 245 nach 90, für 246 nach 91, für 247 nach 92, für 248 nach 93); folglich $abc \sim a_2b_2c_2$.

Aus der Gleichheit zweier Winkel oder Seitenverhältnisse in zwei Dreiecken folgt hiernach die Gleichheit aller übrigen.

Anm. Jedes Dreieck zerfällt durch eine zu einer Seite gezogene Parallele in ein ähnliches Dreieck und ein Trapez. Ist das gegebene Dreieck gleichschenklig, so sind auch die nicht parallelen Seiten des Trapezes einander gleich, und das Trapez heisst gleichschenklig. Die Verbindungsstrecke der Mitten der nicht parallelen Seiten eines Trapezes heisst seine Mittellinie. Ist die kleinere der parallelen Seiten gleich Null, so geht das Trapez in ein Dreieck über.

**111.** *Vierte Proportionale.* — Wenn zwischen vier Strecken $a$, $b$, $a_1$, $b_1$ die Proportion besteht:

$$\frac{a}{b} = \frac{a_1}{b_1},$$

so heisst jede der vier Strecken die vierte Proportionale der drei übrigen. Aus Fig. 67 ergiebt sich nun die Lösung der

Aufgabe 10. — Zu drei gegebenen Strecken die vierte Proportionale zu construiren.

Man zeichne einen beliebigen Winkel*) und trage (wenn $a$ die gesuchte Strecke ist) vom Scheitel aus auf dem einen Schenkel $b_1$ und dann $a_1$ (hinter oder auf einander) ab, auf dem andern $b$. Dann verbinde man die Endpunkte von $b$ und $b_1$

*) Am besten mit der Oeffnung nach oben, wenn die gesuchte Streck im Zähler, mit der Oeffnung nach unten, wenn sie im Nenner steht.

und ziehe zu dieser Verbindungsstrecke durch den Endpunkt von $a_1$ die Parallele. Diese schneidet auf dem andern Schenkel die Strecke $a$ ab.

Da in Fig. 67 $\frac{A_1S}{A_1A} = \frac{B_1S}{B_1B}$ ist, so erhält man ferner die Lösung der

**Aufgabe 11.** — **Eine gegebene Strecke** $AS$ **nach einem gegebenen Verhältniss in zwei oder mehrere Theile zu theilen (d. h. so, dass die Theile sich wie gegebene Strecken oder Zahlen zu einander verhalten).**

Man ziehe durch den einen Endpunkt der zu theilenden Strecke eine beliebige Gerade, trage auf derselben nach einander die gegebenen Strecken ab (oder solche, die sich wie die gegebenen Zahlen verhalten), verbinde den Endpunkt der letzten mit dem andern Endpunkt der zu theilenden Strecke und ziehe zu dieser Verbindungsstrecke durch die übrigen Endpunkte die Parallelen. Diese theilen die gegebene Strecke in dem geforderten Verhältniss.

Anm. Der specielle Fall dieser Aufgabe: Eine Strecke in $n$ gleiche Theile zu theilen, wurde in entsprechender Weise bereits auf S. 21 gelöst.

**112.** *Harmonische Punktepaare.* — Die Aufgabe 11 kann auch in folgender, verallgemeinerter Fassung ausgesprochen werden:

**Aufgabe 12.** — **Auf einer Geraden einen Punkt zu bestimmen, dessen Abstände von zwei gegebenen Punkten der Geraden ein gegebenes Verhältniss haben.**

Diese Aufgabe kann ausser durch Fig. 67 auch durch Fig. 68 gelöst werden. Denn sind dort $A$ und $S$ die gegebenen Punkte, so kann der gesuchte Punkt $A_1$ nicht nur auf der Strecke $AS$ (Fig. 67), sondern auch ausserhalb derselben (Fig. 68) liegen.

Fig. 70.

Sind $A$ und $B$ die gegebenen Punkte (Fig. 70), o kann man die zweite Verältnissstrecke entweder an die erste ($AC$) antragen ($CB_1$), ler auf ihr abtragen ($CB_2$). Die durch $C$ zu $B_1B$ oder $B_2B$ ezogenen Parallelen geben dann als gesuchten Punkt $C_1$ oder $C_2$, ınd es ist

$$\frac{AC}{B_1C} = \frac{AC_1}{BC_1}; \quad \frac{AC}{B_2C} = \frac{AC_2}{BC_2}.$$

Es giebt also auf einer Geraden zwei Punkte ($C_1$ und $C_2$), deren Abstände von zwei gegebenen Punkten ($A$ und $B$) ein gegebenes Verhältniss haben. Das Punktepaar $C_1$, $C_2$ heisst harmonisch zu $A$, $B$, und es besteht zwischen den vier Abständen des einen Paars vom andern die aus den letzten Formeln folgende Beziehung:

$$(1) \qquad \frac{AC_1}{BC_1} = \frac{AC_2}{BC_2}.$$

Hiernach sagt man, eine Strecke ($AC_2$) sei harmonisch getheilt, wenn der erste Theil ($AC_1$) sich zum zweiten ($BC_1$) verhält, wie die ganze Strecke ($AC_2$) zum dritten ($BC_2$).

Aus (1) folgt:

$$(2) \qquad \frac{AC_1}{AC_2} = \frac{BC_1}{BC_2}.$$

Diese Formel unterscheidet sich von (1) nur dadurch, dass das Paar ($A$, $B$) mit dem Paare ($C_1 C_2$) vertauscht ist. Man hat also den Satz:

249. Ist von zwei Punktepaaren das zweite harmonisch zum ersten, so ist auch das erste harmonisch zum zweiten.

Die Punkte eines solchen Paares heissen einander zugeordnet (conjugirt).

Ist auf einer Geraden ein Punktepaar $A$, $B$ gegeben, so giebt es zu jedem zwischen $A$ und $B$ liegenden Punkte $C_1$ einen vierten harmonischen Punkt $C_2$. Also:

250. Zu einem Punktepaare giebt es beliebig viele harmonische.

Aus (1) folgt:

$$\frac{AC_1}{AB - AC_1} = \frac{AC_2}{AC_2 - AB},$$

oder (nach Theil I, 101):

$$\frac{AB}{AC_1} - 1 = 1 - \frac{AB}{AC_2}; \quad \frac{AB}{AC_1} + \frac{AB}{AC_2} = 2,$$

oder: $$(3) \qquad \frac{1}{AC_1} + \frac{1}{AC_2} = \frac{2}{AB},$$

(worin man die Zähler mit einer beliebigen Strecke multiplicirt denken kann). In Folge dieses Zusammenhanges sagt man, dass die drei von $A$ ausgehenden Strecken $AC_1$, $AC_2$, $AB$ eine harmonische Proportion bilden, und nennt $AB$ das har-

monische Mittel*) zwischen $AC_1$ und $AC_2$. Rückt der Punkt $C_1$ (Fig. 70) näher an $B$ heran, so wird $AC_1$ grösser. Da nun $AB$ unverändert bleibt, so folgt aus Formel (3), dass $AB_2$ klei- $AC_2$ ner wird; d. h.: auch $C_2$ rückt näher an $B$. — Fällt $C_1$ mit $B$ zusammen, d. h. ist $AC_1 = AB$, so folgt aus Formel (3), dass auch $AC_2 = AB$ ist; d. h.: auch $C_2$ fällt mit $B$ zusammen. Also:

Fällt *ein* Punkt eines Paares mit einem Punkte 251.
eines zu ihm harmonischen Paares zusammen, so fällt auch der *andere* mit ihm zusammen.

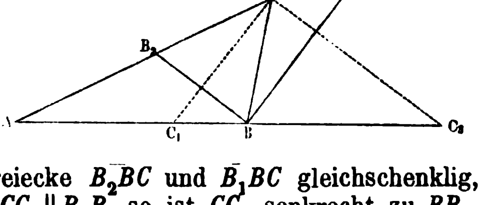
Ist $AB = 2AC_1$, so folgt aus (3), dass $\frac{1}{AC_2} = 0$, d. h. dass die Strecke $AC_2$ unendlich gross ist (vgl. Theil I, 149); d. h.:

Rückt ein Punkt in die Mitte eines Punktepaares, 252.
so rückt der ihm zugeordnete harmonische Punkt nach entgegengesetzter Richtung in unendliche Entfernung (und umgekehrt).

Anm. Ueberschreitet der erste Punkt die Mitte, so kommt der zugeordnete Punkt (aus $+\infty$ nach $-\infty$ springend) von der entgegengesetzten Richtung her aus unendlicher Entfernung ihm wieder entgegen. (Vgl. Nr. 58.)

**113.** *Specieller Fall.* — Ist in Fig. 70 der Winkel $B_2BB_1$ ein Rechter (Fig. 71), so ist $B_2B_1$ Durchmesser, und $C$ Mittelpunkt des um das Dreieck $BB_1B_2$ beschriebenen Kreises (165, vgl. Anm. z. 202), also

Fig. 71.




$$CB_2 = CB = CB_1.$$

Demnach sind die Dreiecke $B_2BC$ und $B_1BC$ gleichschenklig, und da $CC_1 \parallel B_1B$ und $CC_2 \parallel B_2B$, so ist $CC_1$ senkrecht zu $BB_2$, und $CC_2$ senkrecht zu $BB_1$ (72). Folglich sind (Umk. z. 99) $CC_1$ und $CC_2$ die Geraden, welche den Winkel $ACB$ und seinen Nebenwinkel halbiren, und da die Proportionen

$$\frac{AC}{B_1C} = \frac{AC_1}{BC_1}, \quad \frac{AC}{B_2C} = \frac{AC_2}{BC_2},$$

*) Macht man $AC_1 = 3$, $C_1B = 1$, $BC_2 = 2$, so sind die Strecken $AC_1 = 3$, $AB = 4$, $AC_2 = 6$. Ihre Verhältnisse $\frac{6}{4} = \frac{3}{2}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{6}{3} = \frac{2}{1}$ sind dann die den musikalischen Intervallen Quint, Quart, Octave entsprechenden Zahlen, woraus sich der Ausdruck „harmonisch“ erklärt.

(wenn man darin $B_1C$ und $B_2C$ durch $BC$ ersetzt) übergehen in

$$\frac{AC}{BC} = \frac{AC_1}{BC_1} = \frac{AC_2}{BC_2},$$

so hat man die Sätze:

253. Die Halbirungslinie eines Winkels im Dreieck theilt die gegenüberliegende Seite im Verhältniss der anliegenden Seiten.

254. Die Halbirungslinie eines Aussenwinkels im Dreieck schneidet die gegenüberliegende Seite in einem Punkte, dessen Abstände von ihren Endpunkten sich verhalten wie die anliegenden Seiten.

Anm. Ein specieller Fall von 253 ist 99. Wie lautet der entsprechende, aus 254 folgende Satz?

Aus 253 folgt, dass alle Punkte $C$, deren Entfernungen von $A$ und $B$ sich wie die Strecken $AC_1$ und $BC_1$ verhalten, Spitzen von Dreiecken sind, in welchen die Halbirungslinien der Winkel $C$ durch den Punkt $C_1$ gehen, und die Halbirungslinien der Aussenwinkel durch den Punkt $C_2$. Da nun $BB_1 \perp BB_2$, $CC_1 \parallel B_1B$, $CC_2 \parallel B_2B$, so ist auch $CC_1 \perp CC_2$, d. h. das Dreieck $\overline{C_1CC_2}$ ist stets rechtwinklig. Der geometrische Ort von $C$ ist also (170) die über $C_1C_2$ als Durchmesser beschriebene Kreislinie, und man hat den Satz:

255. Der geometrische Ort eines Punktes, dessen Abstände von zwei festen Punkten $A$, $B$ ein gegebenes Verhältniss haben, ist die Kreislinie, welche über derjenigen Strecke als Durchmesser beschrieben ist, deren Endpunkte die Strecke $AB$ in dem gegebenen Verhältniss theilen.

Anm. Sind die beiden Abstände einander gleich, so rückt $C_1$ in die Mitte von $AB$, dagegen $C_2$ und der Mittelpunkt der Kreislinie in unendliche Entfernung, die Kreislinie verwandelt sich demnach in die Gerade, welche in $C_1$ auf $AB$ senkrecht steht, und der Satz 255 geht über in 120. — Wie lässt sich Aufgabe 12 mittelst der Sätze 253 und 254 lösen?

### b. Aehnlichkeit bei verkehrt-perspectivischer Lage.

**114.** Statt durch eine zu einer Dreiecksseite gezogene Parallele kann man zu einem gegebenen Dreieck $\overline{CAB}$ auch dadurch ein ähnliches construiren, dass man den Winkel $A$ in einem Punkte $A_1$ der gegenüberliegenden Seite oder ihrer Verlängerung anträgt (Fig. 72 und 73), so dass $CA_1B_1 = CAB$ ist. Es ist alsdann $\overline{CAB} \sim \overline{CA_1B_1}$ (245). Da aber die Stücke des

einen Dreiecks in entgegengesetzter Reihe auf einander folgen wie die homologen Stücke des anderen, so müsste man, um beide in perspectivische Lage zu bringen, das eine ($\overline{CB_1A_1}$) auf die entgegengesetzte Seite der Ebene bringen. Man kann daher die durch obige Construction entstandene Lage der beiden Dreiecke eine verkehrt-perspectivische nennen.

Fig. 72.

Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke folgt:

$$1)\quad \frac{CA}{CA_1} = \frac{CB}{CB_1}\,.^{*)}$$

Fig. 73.

Nimmt man nun an, dass alle vier von $C$ ausgehende Strecken durch dasselbe Mass gemessen seien, und versteht man nach dieser Voraussetzung unter dem Producte zweier Strecken das Product ihrer Masszahlen, so kann die letzte Formel (nach Th. I, 99) geschrieben werden:

$$2)\quad CA\,.\,CB_1 = CB\,.\,CA_1.$$

Anm. Durch Anwendung dieser Form der Proportion erreicht man den Vortheil, dass die auf derselben Geraden liegenden Strecken auch wieder, wie früher, auf derselben Seite der Formel beisammen stehen.

In Fig. 72 ist $CA_1B_1 + BA_1B_1 = 2R$, oder, da $CA_1B_1 = B_1AB$ ist:

$$B_1AB + BA_1B_1 = 2R;$$

d. h.: die Punkte $A$, $B$, $A_1$, $B_1$ liegen auf derselben Kreislinie (Umk. z. 206). Formel 2) giebt hiernach den Satz:

256. Schneiden sich zwei Secanten eines Kreises, so ist das Product der vom Schnittpunkt ausgehenden Abschnitte auf der einen so gross wie auf der andern.

In Fig. 73 ist

$$BAB_1 = BA_1B_1;$$

emnach stimmen die Dreiecke $\overline{BAB_1}$ und $\overline{BA_1B_1}$ in einer

*) Man sagt in diesem Falle auch, dass die vier von $C$ ausgehenden trecken eine wiederkehrende Proportion bilden, weil man, um ihre Glieder in richtiger Reihenfolge zu erhalten, von einer der beiden Geraden ($CA$) zur andern übergehen ($CA_1$ und $CB$), und zuletzt zur ersten ($CB_1$) zurückkehren muss.

Seite ($BB_1$) und dem gegenüberliegenden Winkel überein; d. h.: die Punkte $A$, $B$, $A_1$, $B_1$ liegen auf derselben Kreislinie (167). Formel 2) giebt hiernach den Satz:

257. **Schneiden sich zwei Sehnen eines Kreises, so ist das Product der vom Schnittpunkt ausgehenden Abschnitte auf der einen so gross wie auf der andern.**

Anm. Offenbar ist 257 nur ein specieller Fall von 256. Die Umkehrungen beider Sätze sagen, dass, wenn zwischen 2 von einem Punkt ausgehenden Streckenpaaren auf zwei Geraden die Formel 2) besteht, alsdann die Endpunkte der vier Strecken auf derselben Kreislinie liegen.

Hiernach hat das Product aus den Abständen eines Punktes von den Schnittpunkten einer durch ihn gezogenen Geraden mit dem Kreise denselben Werth, welches auch die Richtung der Secante sei. Dieses Product heisst die Potenz des Punktes in Bezug auf den Kreis. Liegt der Punkt ausserhalb der Kreisfläche, so haben beide Strecken dieselbe Richtung, und die Potenz ist positiv; liegt der Punkt innerhalb, so haben beide Strecken entgegengesetzte Richtung, und die Potenz ist negativ; liegt er auf der Kreislinie, so ist die Potenz Null.

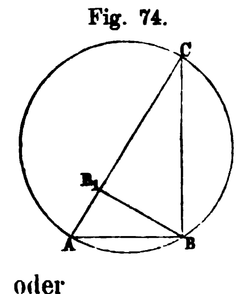
**115.** *Specielle Fälle.* — 1) Wenn in Fig. 72 die Punkte $A_1$ und $B$ in einen einzigen Punkt $B$ zusammenfallen, so ist $CB$ Tangente des Kreises, und, da 2) in

$$3) \quad CB^2 = CA \,.\, CB_1$$

übergeht, gleichzeitig mittlere Proportionale (Siehe Th. I, Nr. 87) zwischen $CA$ und $CB_1$. Der Satz 256 geht also über in den folgenden:

258. **Schneiden sich eine Secante und eine Tangente eines Kreises, so ist die Tangente mittlere Proportionale zwischen den beiden vom Schnittpunkt ausgehenden Abschnitten der Secante.**

Fig. 74.




2) Wenn im letzten Falle $AB$ (Fig. 72) ein Durchmesser des Kreises ist, so ist Dreieck $CAB$ rechtwinklig (182); und, da $AB_1B = R$ (165) und $CB_1B = R$ (56), so sind auch die Dreiecke $\overline{AB_1B}$ und $\overline{CB_1}$ rechtwinklig und einander ähnlich (245 Hieraus folgt:

$$\frac{CB_1}{B_1B} = \frac{BB_1}{B_1A},$$

oder

$$4) \quad BB_1^{\,2} = B_1C \,.\, B_1A.$$

Die Formeln 3) und 4) enthalten nun zusammen den Satz

Fällt man im rechtwinkligen Dreieck die Höhe aus dem Scheitel des rechten Winkels, so ist 1) jede Kathete die mittlere Proportionale zwischen der ganzen Hypotenuse und ihrem an der Kathete liegenden Abschnitt, 2) die Höhe die mittlere Proportionale zwischen den Abschnitten der Hypotenuse. 259.

Anm. Nennt man $C$, $B_1$, $A$ bezw. die Fusspunkte von $BC$, $BB_1$, $BA$, so kann man 259 auch so aussprechen: Jede der von $B$ ausgehenden Strecken ist m. P. zwischen den beiden von ihrem Fusspunkt ausgehenden Strecken.

Der Satz 259 gestattet nun die Lösung der

Aufgabe 13. — Zu zwei gegebenen Strecken die mittlere Proportionale zu construiren.

1) Man construirt über der Summe der beiden Strecken ($CB_1$ und $AB_1$) als Durchmesser einen Kreis und errichtet in ihrem gemeinsamen Endpunkte ($B_1$) auf diesem Durchmesser die Senkrechte ($B_1B$).

2) Man construirt über der grösseren der beiden Strecken ($CA$ und $CB_1$) als Durchmesser einen Kreis, errichtet in dem Endpunkte ($B_1$) der auf der grösseren abgetragenen kleineren Strecke die Senkrechte ($B_1B$) und verbindet deren Endpunkt ($B$) mit dem gemeinsamen Endpunkte ($C$) beider Strecken.

**116.*** *Erweiterung.* — Seien $A$ und $B$ die Schnittpunkte zweier Kreislinien $O$ und $O_1$. Zieht man dann aus einem Punkte $S$ ihrer gemeinsamen Secante an $O$ die Tangente $ST$, an $O_1$ die Tangente $ST_1$, so ist (258)

$$ST^2 = SA \,.\, SB = ST_1^2,$$

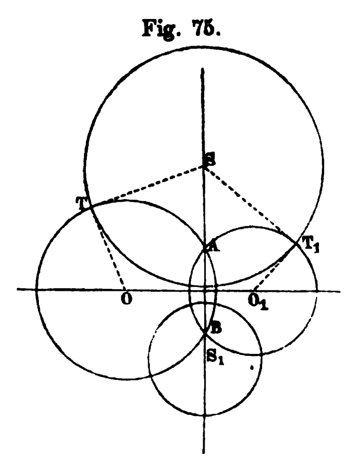
folglich

$$ST = ST_1;$$

d. h: Die aus einem Punkte der gemeinsamen Secante zweier (oder mehrerer) Kreise an dieselben gezogenen Tangenten sind einander gleich. 260.

Beschreibt man aus $S$ mit $ST$ als Radius einen Kreis, so sind die Radien der ersten Kreise, $OT$, $O_1T_1$, .. Tangenten desselben. Ebenso, wenn man aus anderen Punkten der Se-nte, $S_1$, $S_2$ .. mit den an $O$ gezogenen Tangenten Kreise ·schreibt. Das System der Kreise $O$, $O_1$, .. steht also zu m System der Kreise $S$, $S_1$, ... in der Beziehung, dass die ·ngenten des einen Systems Radien des andern sind, oder, ss Radien (Tangenten) aller Kreise des einen Systems auf nem Radius (einer Tangente) eines Kreises des andern Systems ·nkrecht stehen.

Fig. 75.




Nennt man nun den Winkel, welchen die im Schnittpunkte zweier Kreise gezogenen Tangenten mit einander bilden, den Winkel, unter welchem die Kreise sich schneiden, so folgt aus der zuletzt gefundenen Beziehung, dass die Kreise des einen Systems von denen des andern unter rechtem Winkel geschnitten werden.

Einen Kreis, welcher einen anderen unter rechtem Winkel schneidet, nennt man den Orthogonalkreis desselben. — Die Gerade, deren Punkte die Eigenschaft haben, dass die aus einem derselben an zwei Kreislinien gezogenen Tangenten einander gleich sind, heisst die Potenzlinie der beiden Kreise. — Man erhält nun weiter folgende Sätze:

261. Die Potenzlinie zweier sich schneidender Kreise ist ihre gemeinsame Secante, die Potenzlinie zweier sich berührender ihre gemeinsame Tangente im Berührungspunkte.

262. Zu einem Systeme von Kreisen, die sich in zwei Punkten schneiden, gehört ein System von Orthogonalkreisen, deren Mittelpunkte auf der gemeinsamen Secante des ersten liegen. — Die Centrallinie der Kreise des einen Systems ist die Potenzlinie der Kreise des andern. — Die Potenzlinie jedes Systems ist eine Kreislinie desselben mit unendlich fernem Mittelpunkte.

263. Soll eine Kreislinie zwei gegebene Kreislinien unter rechtem Winkel schneiden, so ist der geometrische Ort ihres Mittelpunktes die Potenzlinie der beiden Kreise.

Anm. Construction der Potenzlinie. — Die Potenzlinie d sich schneidenden Kreise $O$ und $O_1$ ist nicht nur durch ihre Schnittpunk ($A$, $B$), sondern auch durch die Punkte $S$ und $S_1$ bestimmt, die gefund werden, wenn man auf 2 beliebigen Tangenten der beiden Kreise beliebig aber gleiche Strecken abträgt, und mit den Verbindungsstrecken ihr Endpunkte und der Mittelpunkte Kreislinien beschreibt, die sich dann $S$ und $S_1$ schneiden. Diese Construction liefert auch die Potenzlinie zwei sich nicht schneidender Kreislinien.

Unter den **Kreisen** des **Systems** $O$ ist der kleinste derjenige, welcher $AB$ zum Durchmesser hat (114). — Da in dem rechtwinkligen Dreieck $OTS$ die Kathete $TS$ um so kleiner ist, je kleiner die Hypotenuse $OS$ ist (118), so sind die Kreise des Systems $S$ um so kleiner, je näher ihr Mittelpunkt an $OO_1$ liegt. Es kann aber keiner dieser Mittelpunkte auf der Strecke $AB$ liegen, weil von Punkten dieser Strecke keine Tangenten an die Kreise des Systems $O$ gezogen werden können. Da die aus $A$ und $B$ an diese Kreise gezogenen Tangentenstrecken die Länge Null haben, so sind auch die Radien der aus $A$ und $B$ beschriebenen Kreise des Systems $S$ gleich Null; d. h. diese Punkte sind die kleinsten Kreise des Systems. In dieser Eigenschaft heissen die Punkte $A$ und $B$ Centralpunkte des Systems $S$.

Anm. Man kann sagen, dass die Kreise des Systems $S$ sich in den Punkten $A$ und $B$ imaginär schneiden. (Rauml. II. S. 111.)

Es seien drei Kreise $O_1$, $O_2$, $O_3$ gegeben mit den Potenzlinien $p_1$ (für $O_2$ und $O_3$), $p_2$ (für $O_3$ und $O_1$), $p_3$ (für $O_1$ und $O_2$). Aus dem Schnittpunkte von $p_1$ und $p_2$ kann man dann eine Kreislinie beschreiben, welche einerseits $O_2$ und $O_3$, andrerseits $O_3$ und $O_1$, d. h. auch gleichzeitig die Kreislinien $O_2$ und $O_1$ rechtwinklig schneidet. Demnach muss ihr Mittelpunkt auf $p_3$ liegen (263). Man hat also den Satz:

Die Potenzlinien dreier Kreise schneiden sich in *einem* Punkte. 264.

Der Schnittpunkt der Potenzlinien dreier Kreise heisst ihr Potenzpunkt.

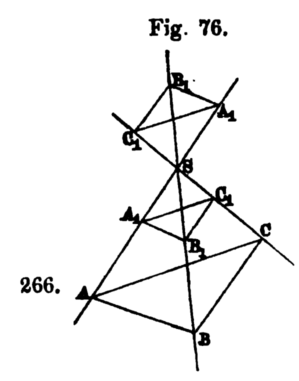
Aus 264 folgt endlich:

Alle Kreislinien, welche die Eigenschaft haben, dass die Potenzlinie je zweier durch denselben Punkt geht, bilden einen Verein, und werden sämmtlich von *einer* aus diesem Punkte beschriebenen Kreislinie unter rechtem Winkel geschnitten. 265.

## 2) Polygone.

**117.** Es seien durch einen Punkt der Ebene ($S$) und durch die Eckpunkte eines Polygons $ABC$.. Geraden gezogen. Wählt man auf einer dieser Geraden einen Punkt ($A_1$) beliebig, zieht $A_1B_1 \parallel AB$, $B_1C_1 \parallel BC$ u. s. w., sodass jedes Parallelenpaar zwischen denselben beiden Geraden liegt, und verbindet den letzten Punkt $C_1$ mit $A_1$, so ist auch $C_1A_1 \parallel CA$. [Denn es ist

Fig. 76.



$\overline{SAB} \sim \overline{SA_1B_1}$; also $\frac{SA}{SA_1} = \frac{SB}{SB_1}$; ferner $\overline{SBC} \sim \overline{SB_1C_1}$; also $\frac{SB}{SB_1} = \frac{SC}{SC_1}$; mithin $\frac{SA}{SA_1} = \frac{SC}{SC_1}$; ausserdem $A_1SC_1 = ASC$; also $\overline{SAC} \sim \overline{SA_1C_1}$ (246); folglich $SA_1C_1 = SAC$, und $A_1C_1 \parallel AC$ (70)]. Man hat also den Satz:

266. Zieht man zwischen mehreren durch einen Punkt gehenden Geraden parallele Streckenpaare so, dass die Endpunkte eines jeden die Anfangspunkte des folgenden sind, und verbindet die letzten beiden Endpunkte mit den ersten beiden Anfangspunkten, so sind auch diese Verbindungslinien parallel.

Da in Fig. 76 auch $\frac{AB}{BC} = \frac{A_1B_1}{B_1C_1}$ ist, so hat man, unter der Annahme, dass $AB \perp SA$ und $CB \perp SC$ ist, den Satz:

267. Der geometrische Ort eines Punktes, dessen Abstände von zwei festen Geraden ein gegebenes Verhältniss haben, ist ein durch ihren Schnittpunkt gehendes Geradenpaar.

Anm. Die nähere Bestimmung dieser Geraden, welche in dem Verhältniss liegt, nach welchem sie den Winkel der gegebenen Geraden theilen, erfordert trigonometrische Betrachtungen. Um sie zu construiren, braucht man nur einen ihrer Punkte zu bestimmen, für den sich (nach 197) zwei geometrische Oerter finden. — Der Satz 267 ist einerseits ein Gegenstück zu 255, andrerseits eine Erweiterung von 196.

Die beiden Polygone $ABC$.. und $A_1B_1C_1$... haben also folgende Eigenschaften: 1) Je zwei „homologe" Seiten sind parallel; 2) die Verbindungslinien je zweier „homologer" Ecken gehen durch denselben Punkt. Vermöge der letzteren Eigenschaft sagt man, dass die Polygone sich in perspectivischer Lage befinden, vermöge beider Eigenschaften, dass sie einander ähnlich sind. Der Punkt $S$ heisst Aehnlichkeitspunkt, jede durch $S$ gehende Gerade Aehnlichkeitsstrahl der beiden Polygone. Der Aehnlichkeitspunkt heisst äusserer, wenn zwei homologe Ecken auf derselben, innerer, wenn sie auf verschiedenen Seiten des Aehnlichkeitspunktes liegen. Satz 238 gilt auch für Polygone.

Umkehrung von 266:

Sind in zwei ähnlichen Polygonen zwei homologe Seitenpaare parallel, so gehen die Verbindungslinien homologer Ecken durch *einen* Punkt. 268.

**118.** *Eigenschaften ähnlicher Polygone.* — 1) Aus der Parallelität ihrer Seiten folgt der Satz:

In zwei ähnlichen Polygonen sind je zwei homologe Winkel einander gleich. 269.

2) Aus den Beziehungen: $SAB \sim SA_1B_1$; $SBC \sim SB_1C_1 \ldots$ $SCA \sim SC_1A_1$ folgt (243)

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{SB}{SB_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{SC}{SC_1} \ldots = \frac{CA}{C_1A_1};$$

d. h.: In zwei ähnlichen Polygonen sind je zwei homologe Seitenverhältnisse einander gleich. 270.

3) Nach der für die Aehnlichkeit der Polygone aufgestellten Definition sind in Fig. 76 auch die Polygone $SABC$ und $SA_1B_1C_1$ einander ähnlich. Da dieselben durch homologe Diagonalen in die in 1) und 2) betrachteten ähnlichen Polygone und Dreiecke getheilt werden, so hat man den Satz:

Aehnliche Polygone werden durch homologe Diagonalen in ähnliche Figuren getheilt. 271.

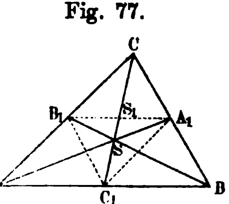
4) Aus den Proportionen $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \ldots = \frac{CA}{C_1A_1}$ folgt (Th. I, 108):

$$\frac{AB + BC + \ldots + CA}{A_1B_1 + B_1C_1 + \ldots + C_1A_1} = \frac{AB}{A_1B_1};$$

d. h.: Die Umfänge ähnlicher Polygone verhalten sich wie zwei homologe Seiten (oder Diagonalen). 272.

**119.** *Erweiterung.* — Verbindet man die Mitten der Seiten eines Dreiecks $ABC$, so erhält man nach 127 ein Dreieck $A_1B_1C_1$, welches dem gegebenen ähnlich ist, und dessen Seiten denen des gegebenen parallel sind. Mithin gehen (268) die Verbindungslinien homologer Ecken durch einen Punkt ($S$), und da diese Linien die Mittellinien des Dreiecks $ABC$ sind (vgl. Anm. zu Aufg. 2, S. 57), so hat man den Satz:

Fig. 77.




Die Mittellinien eines Dreiecks schneiden sich in *einem* Punkte. 273.

Der Schnittpunkt der Mittellinien eines Dreiecks heisst sein Schwerpunkt.

Aus $\overline{ASC_1} \sim \overline{A_1S_1S}$ folgt:

$$\frac{AS}{A_1S} = \frac{AC_1}{A_1S_1} = \frac{BC_1}{A_1S_1},$$

und aus $\overline{CC_1B} \sim \overline{CS_1A_1}$:

$$\frac{BC_1}{A_1S_1} = \frac{CB}{CA_1} = \frac{2}{1};$$

folglich: $$\frac{AS}{A_1S} = \frac{2}{1} \text{ oder } AS = 2A_1S;$$

274. d. h.: Die Mittellinien eines Dreiecks theilen sich gegenseitig im Verhältniss von 2 : 1.

Da $S$ auch der Schwerpunkt des Dreiecks $\overline{A_1B_1C_1}$ ist,

so ist $$\frac{C_1S}{SS_1} = \frac{2}{1} \text{ (274)},$$

ausserdem aber $$\frac{CC_1}{CS_1} = \frac{2}{1} \text{ (aus } \overline{CC_1B} \sim \overline{CS_1A_1}\text{)},$$

folglich $$\frac{C_1S}{SS_1} = \frac{CC_1}{CS_1};$$

also sind die Punktepaare $C$, $S$ und $C_1$, $S_1$ harmonisch (Formel 1), S. 108), und man hat den Satz:

275. Die Verbindungslinie der Fusspunkte zweier Mittellinien eines Dreiecks schneidet die dritte Mittellinie in einem Punkte, welcher mit den Endpunkten derselben und dem Schwerpunkte harmonisch ist.

**120.*** ***Bestimmung der Gestalt eines Polygons durch Winkel und Seitenverhältnisse.*** — Die Gestalt eines Polygons ist bestimmt durch seine Winkel und Seitenverhältnisse (vgl. Nr. 110). Im Allgemeinen sind daher zwei Polygone ähnlich, wenn sie in den Winkeln und Seitenverhältnissen übereinstimmen. Nun sind in einem Polygon von $n$ Seiten alle Seiten bestimmt, wenn man $n-1$ Seitenverhältnisse und eine Seite kennt. Da nun durch $2n-3$ Stücke das Polygon vollständig bestimmt ist (95), so werden $2n-4$ aus Seitenverhältnissen und Winkeln bestehende Stücke seine Gestalt bestimmen und man hat den Satz:

276. Die Gestalt eines $n$-Ecks ist durch $2n-4$ Seitenverhältnisse oder Winkel bestimmt.

In zwei regelmässigen Polygonen sind alle Seitenverhältnisse gleich 1, und, wenn sie gleiche Seitenzahl haben, sind auch alle Winkel des einen denen des andern gleich. Daraus folgt:

Regelmässige Polygone von gleicher Seitenzahl sind ähnliche Figuren. 277.

Sind in zwei solchen Polygonen die Seiten des einen parallel denen des andern, also z. B. $a \parallel a_1$; $m \parallel m_1$, und ist die Zahl der Seiten eine gerade, so hat jede Seite eine ihr parallele gegenüberliegende Seite. Sind also $a$ und $m$ zwei solche gegenüberliegende Seiten des einen Polygons, so ist auch $a \parallel m$; $a_1 \parallel m_1$. Man kann nun nicht nur $a$ und $a_1$, $m$ und $m_1$ als homologe Seitenpaare betrachten, sondern auch $a$ und $m_1$, $m$ und $a_1$, und erhält bei der einen Annahme einen äusseren, bei der andern einen inneren Aehnlichkeitspunkt. Also:

Zwei regelmässige Polygone von gleicher und gerader Seitenzahl haben, wenn eine Seite des einen einer Seite des anderen parallel ist, einen äusseren und einen inneren Aehnlichkeitspunkt. 278.

Anm. Da die Strecke als regelmässiges Zweieck aufgefasst werden kann, so haben auch zwei Strecken (wie aus Fig. 67 und 68 hervorgeht) zwei Aehnlichkeitspunkte.

**121.*** *Homologe Punkte und Geraden.* — Bei zwei ähnlichen Polygonen in perspectivischer Lage heissen die Punkte, in welchen zwei homologe Seiten durch einen Aehnlichkeitsstrahl geschnitten werden, homologe Punkte. Die Verbindungslinien homologer Punktepaare heissen homologe Linien, die Schnittpunkte homologer Linienpaare heissen wieder homologe Punkte.

Aus 266 folgt nun:

Homologe Linien in ähnlichen, perspectivisch liegenden Polygonen sind parallel. 279.

Und aus 268:

Die Verbindungslinien homologer Punkte in ähnlichen, perspectivisch liegenden Polygonen gehen durch den Aehnlichkeitspunkt (sind also Aehnlichkeitsstrahlen). 280.

Steht ein Aehnlichkeitsstrahl ($SA$ Fig. 76) auf zwei homologen Seiten ($AB$ und $A_1B_1$) senkrecht, so liefert die Formel $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{SA}{SA_1}$ den Satz:

Die Abstände eines Aehnlichkeitsstrahls von zwei 281.

homologen Punkten verhalten sich wie zwei homologe Seiten (und umgekehrt).

Da der Punkt $S$ (Fig. 76) gemeinsamer Eckpunkt der beiden ähnlichen Polygone $\overline{SABC}$ und $\overline{SA_1B_1C_1}$ ist, so kann man sagen, dass in ihm zwei homologe Punkte zusammenfallen, oder, dass er ein homologer Doppelpunkt ist. Da nun die Geraden $SA$ und $SA_1$ homologe Geraden sind und in eine einzige Gerade zusammenfallen, so kann man sagen, dass die Gerade $SA$ eine homologe Doppellinie sei. Also:

282. Der Aehnlichkeitspunkt zweier Polygone ist ein homologer Doppelpunkt, jeder Aehnlichkeitsstrahl eine homologe Doppellinie.

**122.*** *Erweiterung.* — Es seien $A_1$, $A_2$, $A_3$ drei homologe Eckpunkte ähnlicher Polygone 1, 2 und 3, und $a_1$, $a_2$, $a_3$ drei homologe Seiten derselben. Ferner seien je drei homologe Seiten parallel. Es sei $S_1$ der Aehnlichkeitspunkt von 2 und 3, $S_2$ der von 3 und 1, $S_3$ der von 1 und 2. Endlich seien $h_1$, $h_2$, $h_3$ die Abstände der Punkte $A_1$, $A_2$, $A_3$ von der Geraden $S_1S_2$. Da diese Gerade Aehnlichkeitsstrahl sowohl für das Paar 13 wie für 23 ist, so ist nach 281·

$$\frac{h_1}{h_3} = \frac{a_1}{a_3}; \quad \frac{h_3}{h_2} = \frac{a_3}{a_2};$$

folglich:

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{a_1}{a_2}.$$

In Folge dessen ist (nach der Umkehrung zu 281) die Gerade $S_1S_2$ auch Aehnlichkeitsstrahl des Paares 12, und geht daher durch $S_3$. Man hat also den Satz:

283. Die Aehnlichkeitspunkte dreier ähnlicher Polygone, von denen je zwei sich in perspectivischer Lage befinden, liegen auf einer Geraden.

### 3) Kreise.

**123.** *Zwei Kreise.* — Da nach 222 die Kreislinie als regelmässiges Polygon von unendlich vielen und unendlich kleinen Seiten angesehen werden kann, so gelten die für Polygone, speciell für regelmässige Polygone aufgestellten Sätze (sofern sie nicht Winkel oder Seiten betreffen) auch für Kreise. Also:

284. Kreise sind ähnliche Figuren (277).

285. Zwei Kreise haben stets einen äusseren und einen inneren Aehnlichkeitspunkt (278).

Die Umfänge zweier Kreise verhalten sich wie 286.
ihre (Durchmesser oder) Radien (272).

Zwei Bogen oder Sectoren desselben Kreises ver- 287.
halten sich wie ihre Centriwinkel (151).

**124.** *Eine gemeinsame Secante.* — Da parallele Durchmesser zweier Kreise als homologe Diagonalen angesehen werden können, so sind parallele Durchmesser oder Radien homologe Linien, mithin die Mittelpunkte der Kreise, sowie die Endpunkte paralleler Radien homologe Punkte. Hieraus folgt (280):

Die Centrallinie zweier Kreise geht durch die 288.
Aehnlichkeitspunkte.

Verbindet man die Endpunkte paralleler Radien 289.
zweier Kreise, so geht die Verbindungslinie durch den äusseren Aehnlichkeitspunkt, wenn die Radien gleiche, durch den inneren, wenn sie entgegengesetzte Richtung haben.

Fig. 78.

Zieht man aus einem Aehnlichkeitspunkte zweier 290.
Kreise eine gemeinsame Secante, so sind die nach den homologen Schnittpunkten gezogenen Radien parallel. (Umk. v. 289.)

Steht also in dem einen Kreise der Radius auf der Secante senkrecht (was der Fall ist, wenn die Secante in eine Tangente übergeht), so findet dasselbe auch in dem andern Kreise statt, d. h.:

Die aus einem Aehnlichkeitspunkte zweier Kreise 291.
an den *einen* gezogenen Tangenten berühren auch den *andern*.

Zwei Kreise haben hiernach vier gemeinsame Tangenten. Die beiden durch den äusseren Aehnlichkeitspunkt gehenden Tangenten heissen äussere, die durch den inneren gehenden innere.

Anm. Anwendung der Lehre von den inneren und äusseren Tangenten zweier Kreise auf die Theorie des Schattens einer dunklen Kugel unter dem Einfluss einer leuchtenden, insbesondere auf die Theorie der Sonnen- und Mondfinsternisse. — Construction der Aehnlichkeitspunkte zweier Kreise mittelst der Centrallinie und zweier paralleler Radien. — Construction der gemeinsamen Tangenten zweier Kreise mittelst der Aehnlichkeitspunkte.

Ist durch einen Aehnlichkeitspunkt zweier Kreise ($S$) eine gemeinsame Secante gezogen, die den Kreis $O$ in $A$ und $B$, den Kreis $O_1$ in $A_1$ und $B_1$ schneidet, so ist

$$\frac{SA}{SA_1} = \frac{SO}{SO_1} = \frac{SB}{SB_1} \text{ (290, 241)};$$

folglich:

$$SA \,.\, SB_1 = SB \,.\, SA_1;$$

292. d. h.: **Zieht man aus einem Aehnlichkeitspunkte zweier Kreise eine gemeinsame Secante, so sind die Producte aus den Abständen je zweier nicht homologer Schnittpunkte vom Aehnlichkeitspunkte einander gleich.**

**125.*** *Zwei gemeinsame Secanten.* — Ist durch $S$ noch eine zweite Secante mit den Schnittpunkten $C$ und $D$, $C_1$ und $D_1$ gezogen, so ist

$$\frac{SC}{SC_1} = \frac{SO}{SO_1} = \frac{SB}{SB_1};$$

also

$$SC \,.\, SB_1 = SB \,.\, SC_1;$$

293. d. h.: **Auf allen durch einen Aehnlichkeitspunkt zweier Kreise gezogenen Secanten sind die Producte aus den Abständen je zweier nicht homologer Schnittpunkte vom Aehnlichkeitspunkte einander gleich.**

Zwei solche nicht homologe Schnittpunkte eines Aehnlichkeitsstrahles zweier Kreise heissen **potenzhaltende Punkte** in Bezug auf den Aehnlichkeitspunkt.

Anm. Was wird aus den Sätzen 292 und 293, wenn eine Secante in eine Tangente übergeht?

Sei $r$ der Radius des Kreises $O$, und $r_1$ der des Kreises $O_1$, ferner $S$ der äussere und $T$ der innere Aehnlichkeitspunkt beider Kreise, so ist

$$\frac{SO}{SO_1} = \frac{r}{r_1} = \frac{TO}{TO_1};$$

d. h.: Die Punktepaare $ST$ und $O_1O$ sind harmonisch, oder:

294. **Die Aehnlichkeitspunkte zweier Kreise sind harmonisch zu ihren Mittelpunkten, der innere theilt die Centrallinie im Verhältniss der Radien.**

Anm. Wo liegen die Aehnlichkeitspunkte, und was wird aus den gemeinsamen Tangenten zweier Kreise in den 5 einzelnen, in Nr. 105 zusammengestellten Fällen? Ferner, wenn eine der beiden Kreislinien in einen Punkt oder eine Gerade übergeht?

Die über $ST$ (Fig. 78) als Durchmesser beschriebene Kreislinie hat nun nach 255 die Eigenschaft, dass für jeden ihrer Punkte $X$ das Verhältniss seiner Abstände von $O$ und $O_1$ dasselbe ist, nämlich $r:r_1$. Man hat also:

$$\frac{XO}{XO_1} = \frac{r}{r_1}.$$

Zieht man nun aus $X$ an die Kreislinien $O$ und $O_1$ bezw. die Tangenten $XY$ und $XY_1$, so ist $OY = r$, $O_1Y_1 = r_1$; daher sind nach der letzten Proportion die rechtwinkligen Dreiecke $\overline{OXY}$ und $\overline{O_1XY_1}$ ähnlich (247), und die Winkel $OXY$ und $O_1XY_1$ einander gleich. Da diese Winkel aber die Hälften derjenigen Winkel sind, welche die aus $X$ an jede Kreislinie gezogenen Tangenten mit einander bilden (187), so hat man den Satz:

Der geometrische Ort eines Punktes, von welchem aus zwei Kreise unter gleichem Winkel erscheinen, ist die über der Verbindungsstrecke ihrer Aehnlichkeitspunkte als Durchmesser beschriebene Kreislinie. 295.

Anm. Specieller Fall, wenn die Kreise gleich gross sind.

**126.*** *Drei Kreise.* — Es seien drei Kreise $O_1$, $O_2$, $O_3$ gegeben; ferner sei

$S_1$ der äussere, $T_1$ der innere Aehnlichkeitspunkt von $O_2$ und $O_3$;
$S_2$ » » $T_2$ » » » » $O_3$ » $O_1$;
$S_3$ » » $T_3$ » » » » $O_1$ » $O_2$.

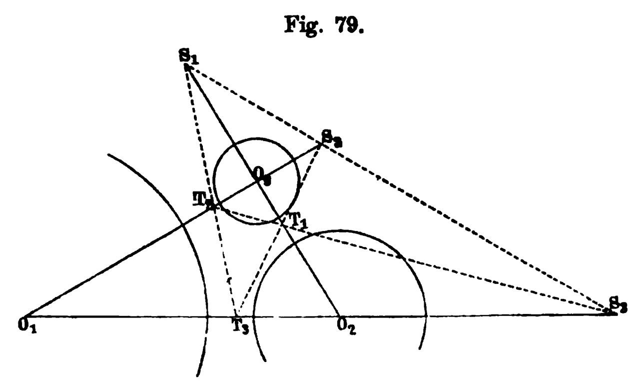
Nehmen wir an, dass zwei Kreise ihren äusseren oder ihren inneren Aehnlichkeitspunkt liefern, jenachdem sie gleiche oder entgegengesetzte Vorzeichen haben, so sind folgende Zusammenstellungen der Zeichen möglich:

| | $O_1$ | $O_2$ | $O_3$ |
|---|---|---|---|
| 1) | + | + | + |
| 2) | + | + | − |
| 3) | + | − | + |
| 4) | − | + | +*) |

Da in jedem dieser vier Fälle der Satz 283 gilt, so liegen auf einer Geraden: 1) $S_1S_2S_3$, 2) $T_1T_2S_3$, 3) $T_1S_2T_3$, 4) $S_1T_2T_3$; d. h.:

*) Stellt man durch Umkehrung aller Zeichen die noch übrigen 4 Fälle her, so sieht man leicht, dass dieselben keine neuen Beziehungen liefern.

Fig. 79.




296. Die drei äusseren Aehnlichkeitspunkte dreier Kreise liegen auf einer Geraden, ebenso je zwei innere mit dem dritten äusseren

Die 4 Geraden, auf welchen je drei Aehnlichkeitspunkte dreier Kreise liegen, heissen Aehnlichkeitsaxen, und zwar diejenige die äussere, auf welcher die äusseren Aehnlichkeitspunkte liegen, die andern die inneren.

Werden zwei Kreise ($O_1$ und $O_2$) von einem dritten ($O_3$) berührt, so sind die Punkte $T_1$ und $T_2$ die Berührungspunkte, und der zweite Theil des Satzes 296 lautet jetzt:

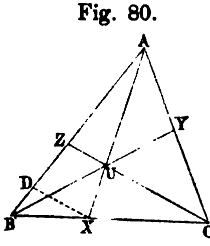
297. Der äussere Aehnlichkeitspunkt zweier Kreise, die von einem dritten berührt werden, liegt mit den beiden Berührungspunkten auf derselben Geraden.

## II. Die Collineation.

### 1) Das vollständige Viereck.

**127.*** *Vorbemerkung.* — Durch Ziehen einer zu einer Dreiecksseite parallelen Strecke zwischen den beiden andern Seiten erhielt man auf einfachste Weise ein ähnliches Dreieck in perspectivischer Lage. — Dem entsprechend wird durch Ziehen einer nicht parallelen Strecke $ZU$ zwischen den Seiten eines Dreiecks $ABX$ in einfachster Weise ein collineares Dreieck $AZU$ in perspectivischer Lage abgeschnitten. Es wird nun zu bestimmen sein, welche Beziehungen zwischen den durch diese Construction entstehenden Strecken stattfinden, wenn man sowohl

Fig. 80.



die Seiten des Dreiecks, wie die Strecke *ZU* beliebig verlängert denkt. Der Kürze wegen mögen die Geraden, auf welchen die Seiten des Dreiecks liegen, seine Seitenlinien heissen.

**128.*** *Das Doppelverhältniss.* — Die zwischen den Seiten zweier ähnlicher Dreiecke bestehende Beziehung $\frac{SA}{SA_1} = \frac{SB}{SB_1}$ (Formel (1) Nr. 109) kann in der Form geschrieben werden:

$$\frac{SA}{SA_1} \cdot \frac{SB_1}{SB} = 1.$$

Die linke Seite dieser Formel heisst ein Doppelverhältniss. Ein einfaches Verhältniss ist positiv, wenn seine beiden Strecken gleiche, negativ, wenn sie entgegengesetzte Richtung haben. Ein Doppelverhältniss ist hiernach positiv oder negativ, je nachdem seine beiden Verhältnisse gleiche oder entgegengesetzte Vorzeichen haben.

Demnach kann die Beziehung zwischen den Abständen von vier harmonischen Punkten (Formel (1) Nr. 112) $\frac{AC_1}{BC_1} = \frac{AC_2}{BC_2}$ in der Form geschrieben werden:

$$\frac{AC_1}{BC_1} \cdot \frac{BC_2}{AC_2} = -1,$$

weil das erste Verhältniss negativ, das zweite positiv ist.

In dem letzten Doppelverhältniss kann man den Nenner $BC_1 . AC_2$ aus dem Zähler $AC_1 . BC_2$ dadurch herstellen, dass man jeden Endfactor mit dem folgenden Anfangsfactor (demnach den letzten Endfactor mit dem ersten Anfangsfactor) zu einem Producte verbindet. Dadurch erhält man $C_1B . C_2A$, welches Product mit $BC_1 . AC_2$ gleiches Vorzeichen hat. — Mit Rücksicht auf diesen Zusammenhang zwischen Zähler und Nenner kann man das letzte Doppelverhältniss abgekürzt in der Form schreiben

$$(AC_1 . BC_2),$$

wodurch gleichzeitig die Reihenfolge der Punkte (vgl. Fig. 70) ausgedrückt ist. Hiernach kann man die Beziehung zweier harmonischer Punktepaare in dem Satze aussprechen:

Das Doppelverhältniss zwischen den Abständen zweier harmonischer Punktepaare ist gleich $(-1)$, und umgekehrt. 298

**129.*** *Das Tripelverhältniss.* — Eine Gerade (Fig. 80) schneide die Seitenlinien eines Dreiecks *ABX*, und zwar *AB*

in $Z$, $BX$ in $C$, $XA$ in $U$. Zieht man dann $XD \parallel CZ$, und verbindet $A$ mit $C$, so ist

$$\overline{BXD} \sim \overline{BCZ};\ \overline{AUZ} \sim \overline{AXD};$$

also: $$\frac{XC}{BC} = \frac{DZ}{BZ};\ \frac{AU}{XU} = \frac{AZ}{DZ};$$

multiplicirt: $$\frac{XC.AU}{BC.XU} = \frac{AZ}{BZ},$$

oder: $$XC.BZ.AU = BC.AZ.XU;$$

299. d. h.: Werden die Seitenlinien eines Dreiecks von einer Geraden geschnitten, so ist unter den 6 Abständen der Schnittpunkte von den Endpunkten der zugehörigen Seiten das Product von drei nicht anstossenden Strecken gleich dem Producte der drei anderen.

Die letzte Formel kann man auch schreiben:

$$\frac{XC}{BC} \cdot \frac{BZ}{AZ} \cdot \frac{AU}{XU} = 1, \text{ oder } \frac{XC}{CB} \cdot \frac{BZ}{ZA} \cdot \frac{AU}{UX} = -1,$$

oder, da der Nenner aus dem Zähler auf dieselbe Weise hervorgeht, wie beim Doppelverhältniss harmonischer Punkte:

$$(XC.BZ.AU) = -1.$$

Anm. In dieser Formel folgt auf jede Ecke des Dreiecks der Schnittpunkt auf einer anstossenden Seite und dann der andere Endpunkt derselben Seite. Nach dieser Bemerkung ist die Formel für jedes Dreieck leicht herzustellen.

Die linke Seite der letzten Formel heisst ein Tripelverhältniss (Dreieckschnittverhältniss). Demnach kann Satz 299 auch so ausgesprochen werden:

300. Das Tripelverhältniss zwischen den Abständen der Ecken eines Dreiecks von den Schnittpunkten einer seine Seitenlinien schneidenden Geraden ist gleich $-1$.

301. Umgekehrt: Drei Punkte auf den Seitenlinien eines Dreiecks liegen auf einer Geraden, wenn das Tripelverhältniss ihrer Abstände von den Ecken des Dreiecks gleich $-1$ ist.

Ist $ZU \parallel BX$, so rückt $C$ in unendliche Entfernung, folglich ist $BC = XC$, und die Formel $\frac{XC}{BC} \cdot \frac{BZ}{AZ} \cdot \frac{AU}{XU} = 1$ geht über

in $\frac{BZ}{AZ} = \frac{XU}{AU}$. Die Aehnlichkeit erweist sich hierdurch, wie vorauszusehen war, als specieller Fall der Collineation.

Anm. Die Figur 80 enthält im Ganzen 6 Dreiecke, deren Seitenlinien von je einer (nicht durch eine Ecke gehenden) Geraden geschnitten werden. Es schneidet nämlich

| | $AX$, | $BY$, | $CZ$, |
|---|---|---|---|
| die Dreiecke | $\overline{BCY}$, $\overline{BCZ}$, | $\overline{CAZ}$, $\overline{CAX}$, | $\overline{ABX}$, $\overline{ABY}$. |

Nach 299 ist 1) für das Dreieck $\overline{ABX}$, geschnitten von $CZ$:

$$XC \,.\, BZ \,.\, AU = BC \,.\, AZ \,.\, XU,$$

2) für das Dreieck $\overline{ACX}$, geschnitten von $BY$:

$$CB \,.\, XU \,.\, AY = XB \,.\, AU \,.\, CY.$$

Durch Multiplication dieser beiden Formeln erhält man:

$$XC \,.\, BZ \,.\, AY = AZ \,.\, XB \,.\, CY,$$

oder:
$$\frac{XC}{BX} \cdot \frac{YA}{CY} \cdot \frac{ZB}{AZ} = +1,$$

oder:
$$(XC \,.\, YA \,.\, ZB) = +1;$$

d. h.: Verbindet man einen beliebigen Punkt der Ebene 302.
($U$) mit den Ecken eines Dreiecks ($\overline{ABC}$), so ist das Tripelverhältniss zwischen den Abständen der Ecken von den Schnittpunkten dieser Verbindungslinien gleich $+1$.

Umgekehrt: Drei durch die Ecken eines Dreiecks 303.
gezogene Geraden gehen durch einen Punkt, wenn das Tripelverhältniss der Abstände ihrer Schnittpunkte von den Ecken des Dreiecks gleich $+1$ ist.

Anm. Die Sätze 302 u. 303 sind reciprok zu 300 u. 301. (Vgl. Nr. 76.)

**130.*** *Das Quadrupelverhältniss.* — Eine Gerade $AC$ (Fig. 80) schneide die Seitenlinien eines Vierecks $\overline{BXUZ}$, und zwar $BZ$ und $XU$ in $A$, $BX$ und $ZU$ in $C$. Dann ist nach 299

1) für das Dreieck $\overline{BXU}$, geschnitten von $AC$:

$$BC \,.\, XA \,.\, UY = XC \,.\, UA \,.\, BY,$$

2) für das Dreieck $\overline{BZU}$, geschnitten von $AC$:

$$BA \,.\, ZC \,.\, UY = ZA \,.\, UC \,.\, BY;$$

also, wenn man die linke Seite jeder dieser Formeln mit der rechten Seite der anderen multiplicirt:

$$BC \,.\, XA \,.\, ZA \,.\, UC = BA \,.\, ZC \,.\, XC \,.\, UA.$$

Durch Verlängerung je zweier gegenüberliegender Seiten eines Vierecks ($BXUZ$) bis zu den Schnittpunkten ($A$ und $C$) entsteht ein vollständiges Viereck (s. Anm. zu Nr. 78), in welchem die Schnittpunkte je zweier Gegenseiten die dritten Ecken heissen mögen. Die letzte Formel enthält nun den Satz:

304. Bildet man im vollständigen Viereck die vier Producte aus den Abständen der dritten Ecken von je zwei gegenüberliegenden Ecken, so geben zwei dieser Producte, die verschiedene Ecken und dritte Ecken enthalten ($CB . CU$, $AZ . AX$), mit einander multiplicirt, dasselbe Product, wie die beiden andern ($CZ . CX$, $AB . AU$).

Anm. Satz 304 würde, wenn die schneidende Linie die Seiten des Vierecks in vier (statt in zwei) verschiedenen Punkten träfe, die Erweiterung von 299 auf das Viereck sein.

Die letzte Formel kann man auch schreiben:

$$\frac{BC}{XC} \cdot \frac{XA}{UA} \cdot \frac{UC}{ZC} \cdot \frac{ZA}{BA} = 1,$$

oder, da der Nenner aus dem Zähler auf dieselbe Weise hervorgeht, wie beim Tripelverhältniss:

$$(BC . XA . UC . ZA) = +1.$$

Die linke Seite der letzten Formel heisst ein Quadrupelverhältniss (Viereckschnittverhältniss). Demnach kann Satz 304 auch so ausgesprochen werden:

305. Im vollständigen Viereck ist das Quadrupelverhältniss zwischen den Abständen seiner Ecken von seinen dritten Ecken gleich $+1$.

Endlich kann die letzte Formel auch geschrieben werden:

$$\frac{BC}{XC} \cdot \frac{XA}{BA} = \frac{ZC}{UC} \cdot \frac{UA}{ZA},$$

oder: $$(BC . XA) = (ZC . UA).$$

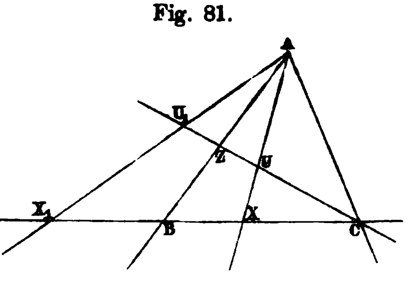
Der Inbegriff beliebig vieler durch einen Punkt ($A$) gehenden Geraden (Strahlen) wird ein Strahlenbüschel genannt (speciell Strahlenbündel, wenn die Geraden parallel sind) und durch ($A$) bezeichnet. $A$ heisst der Scheitel des Strahlenbüschels. In Fig. 80 wird der dreigliedrige Strahlenbüschel ($A$) von der Geraden $ZC$ in den Punkten $Z$, $U$, $C$, und von der Geraden $BC$ in den Punkten $B$, $X$, $C$ geschnitten. Die letzte Formel sagt nun aus, dass in diesem Falle das Doppelverhältniss ($BC . XA$) für jede Richtung der schneidenden Geraden

denselben Werth hat. Da dasselbe für alle parallelen Geraden, d. h. auch für jede Lage der schneidenden Geraden stattfindet (nach den Eigenschaften ähnlicher Dreiecke), so gilt allgemein der Satz:

Für alle Geraden, welche einen dreigliedrigen Strahlenbüschel ($A$) in den Punkten $B$, $X$, $C$ schneiden, hat das Doppelverhältniss ($BC.XA$) denselben Werth. 306.

Ein vierter Strahl des Strahlenbüschels ($A$) werde von der Geraden $CU$ in $U_1$, von $CX$ in $X_1$ geschnitten. Dann ist

Fig. 81.




1) für das Dreieck $\overline{CZB}$, geschnitten von $AX$:

$CX.BA.ZU = BX.ZA.CU$

2) für dasselbe Dreieck, geschnitten von $AX_1$:

$$CX_1 . BA . ZU_1 = BX_1 . ZA . CU_1;$$

also, wenn man die linke Seite jeder dieser Formeln mit der rechten Seite der andern multiplicirt:

$$CX . ZU . BX_1 . CU_1 = CX_1 . ZU_1 . BX . CU,$$

oder:
$$\frac{CX}{BX} \cdot \frac{BX_1}{CX_1} = \frac{CU}{ZU} \cdot \frac{ZU_1}{CU_1},$$

oder:
$$(CX . BX_1) = (CU . ZU_1);$$

d. h.: Ein viergliedriger Strahlenbüschel schneidet alle Geraden unter demselben Doppelverhältniss. 307.

Ist dieses Doppelverhältniss gleich $-1$, so sind die vier Punkte harmonisch (298), und der letzte Satz nimmt die specielle Form an:

Ein durch vier harmonische Punkte gehender (*harmonischer*) Strahlenbüschel schneidet jede Gerade in 4 harmonischen Punkten. 308.

Anm. Wie sind die harmonischen Punkte beschaffen, wenn die [schn]eidende Gerade zu einem Strahle parallel oder senkrecht ist?

In Fig. 71 ist ($C$) ein harmonischer Strahlenbüschel; man [ha]t also den Satz:

Zwei sich schneidende Geraden bilden mit den [Ha]lbirungslinien ihrer Winkel einen harmonischen [St]rahlenbüschel. 309.

**131.*** *Collineare Punktreihen.* — Der Inbegriff beliebig vieler auf einer Geraden ($a$) liegenden Punkte wird eine **Punktreihe** genannt und durch ($a$) bezeichnet; $a$ heisst der **Träger** der Punktreihe. Zwei Punktreihen sind collinear, wenn ihre Träger so gelegt werden können, dass die Verbindungslinien je zweier homologer Punkte durch denselben Punkt gehen. Demnach sind zwei perspectivisch liegende Punktreihen ($CXBX_1$ und $CUZU_1$ Fig. 81) stets collinear. Der Schnittpunkt ihrer Träger ist sich selbst homolog und wird daher **homologer Doppelpunkt** genannt. Aus 307 folgt nun:

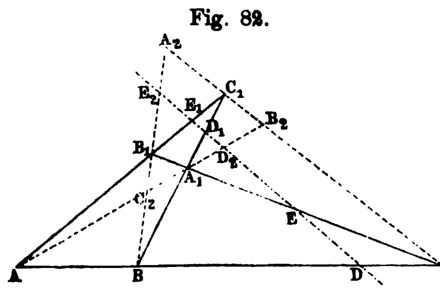
310 **In zwei collinearen Punktreihen ist das Doppelverhältniss aus vier beliebigen Punkten der einen Reihe gleich dem Doppelverhältniss aus den vier homologen Punkten der anderen Reihe (und umgekehrt).**

**132.*** *Collineare Strahlenbüschel.* — Verbindet man zwei Punkte der Ebene, $P$ und $P_1$, mit vier Punkten einer Punktreihe ($A, B, C, D$), so entstehen zwei collineare Strahlenbüschel ($P$) und ($P_1$). Da der Träger der Punktreihe von beiden Büscheln geschnitten wird, so wird auch eine beliebige Gerade von jedem der beiden Büschel unter demselben Doppelverhältniss ($AB . CD$) geschnitten (307). Man hat also den Satz:

311. **Zwei collineare Strahlenbüschel schneiden jede Gerade unter gleichen Doppelverhältnissen (und umgekehrt).**

In dem vollständigen Viereck $\overline{ABA_1B_1}$ (Fig. 82) sind die Diagonalen $AA_1, BB_1, CC_1$. (Letztere, welche die dritten Ecken $C$ und $C_1$ verbindet, heisst **dritte Diagonale.**) Denkt man sich noch $A$ und $A_1$ mit $A_2$ verbunden, so sind die viergliedrigen Strahlenbüschel ($A$) und ($A_1$) perspectivisch; denn es schneiden sich:

Fig. 82.




| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| [illegible] | $AC$, $A_1C_1$ | $AB_2$, $A_1B_2$ | $AC_1$, $A_1C$ | $AA_2$, $A_1A_2$ |
| in | $B$ | $C_2$ | $B_1$ | $A_2$. |

Es sind also (nach 311) auf der schneidenden Geraden $CA_2$ die Doppelverhältnisse der entsprechenden Strecken für beide Strahlenbüschel gleich, d. h.

$$(CB_2 \,.\, C_1A_2) = (C_1B_2 \,.\, CA_2),$$

oder: $$\frac{CB_2}{C_1B_2} \cdot \frac{C_1A_2}{CA_2} = \frac{C_1B_2}{CB_2} \cdot \frac{CA_2}{C_1A_2},$$

oder: $$\left(\frac{CB_2}{C_1B_2} \cdot \frac{C_1A_2}{CA_2}\right)^2 = 1; \quad \frac{CB_2}{C_1B_2} \cdot \frac{C_1A_2}{CA_2} = -1,$$

(da das erste Verhältniss negativ, das zweite positiv ist). Die Büschel ($A$) und ($A_1$) sind hiernach harmonisch (dasselbe lässt sich, wenn man in der letzten Darstellung überall $A$ und $B$ vertauscht, auch für ($B$) und ($B_1$) nachweisen). Nennt man nun die Schnittpunkte ($A_2$, $B_2$, $C_2$) der Diagonalen die Nebenecken des vollständigen Vierecks, so giebt die letzte Formel (nach 308) den Satz:

Auf jeder Diagonale eines vollständigen Vierecks sind die Ecken und Nebenecken harmonische Punkte. 312.

Anm. Ist $B_1B \parallel C_1C$, so rückt $A_2$ ins Unendliche, also ist $B_2$ die Mitte von $C$ und $C_1$ (252), und $AB_2$ Mittellinie des Dreiecks $ACC_1$. (Wie lässt sich nun der Satz 312 in Bezug auf dieses Dreieck aussprechen?) Ist auch $B$ die Mitte von $AC$, so erhält man wieder den Satz 275.

Nennt man die Strecken $AA_2$, $BB_2$, $CC_2$, welche die Ecken des Vierecks mit den Nebenecken verbinden, seine Nebendiagonalen, so erhält man durch die Bemerkung, dass auch die Seitenlinie $B_1A_1$ durch den Strahlenbüschel ($A$) in harmonischen Punkten geschnitten wird, den Satz:

Auf jeder Seite eines vollständigen Vierecks sind die drei Ecken und der Schnittpunkt einer Nebendiagonale harmonische Punkte. 313.

**133.*** *Involutorische Punktreihen.* — Wie vier Geraden (die Seiten eines Vierecks) sich in sechs Punkten (den Ecken und dritten Ecken) schneiden, so lassen sich reciprok durch vier Punkte (die Ecken eines Vierecks) sechs Geraden ziehen (die Seiten und Diagonalen).

Statt der Geraden $A_2C$ schneide eine beliebige Gerade $E_2D$ die Seiten und Diagonalen des Vierecks $ABA_1B_1$ in den unktepaaren: $DE$, $D_1E_1$, $D_2E_2$. Denkt man sich dann $A$ und mit $E_2$ verbunden, so folgt aus der Perspectivität der rahlenbüschel ($A$) und ($A_1$), geschnitten von $BB_1$ und $E_2D$ (311):

r ($A$) $\quad (BC_2 \,.\, B_1E_2) = (DD_2 \,.\, E_1E_2);$

r ($A_1$) $\quad (BC_2 \,.\, B_1E_2) = (D_1D_2 \,.\, EE_2);$

lglich: 1) $\quad (DD_2 \,.\, E_1E_2) = (D_1D_2 \,.\, EE_2).$

Drei Punktepaare, $DE$, $D_1E_1$, $D_2E_2$, welche der Bedingung genügen: $(DD_2 . E_1E_2) = (D_1D_2 . EE_2)$, bilden eine **involutorische Punktreihe.** Die beiden Punkte eines Paares heissen einander **zugeordnet.** Man kann daher die letzte Formel durch den Satz ausdrücken:

314. **Die Seiten und Diagonalen eines vollständigen Vierecks schneiden jede Gerade in einer involutorischen Punktreihe, wobei die Schnittpunkte zweier Gegenseiten oder Diagonalen einander zugeordnet sind.**

Vertauscht man in der Formel

$$1) \quad (DD_2 . E_1E_2) = (D_1D_2 . EE_2)$$

die Punkte $D$ mit $D_2$ und $E$ mit $E_2$ (was damit gleichbedeutend ist, dass man das Viereck $\overline{C_1B_1C_2A_1}$ anstatt $\overline{ABA_1B_1}$ betrachtet), so erhält man:

$$2) \quad (D_2D . E_1E) = (D_1D . E_2E).$$

Vertauscht man hierin endlich $D$ mit $D_1$ und $E$ mit $E_1$ (Viereck $\overline{CA_1C_2B}$), so erhält man:

$$3) \quad (D_2D_1 . EE_1) = (DD_1 . E_2E_1).$$

Vertauscht man in 2) die rechte und linke Seite und multiplicirt dann die drei Formeln 1), 2), 3), so bleibt:

$$4) \quad (E_1D_2 . ED_1 . E_2D) = +1,$$

315. d. h.: **In einer involutorischen Punktreihe ist das Tripelverhältniss zwischen den Abständen dreier nicht zugeordneter Punkte von den drei ihnen zugeordneten gleich 1.**

Schreibt man die Formel 1) als ein gleich 1 gesetztes Quadrupelverhältniss, und vertauscht die Buchstaben $A$ und $B$ mit einander, so bleibt die Formel ungeändert. Man hat also den Satz:

316. **Die Beziehung der Involution zwischen drei Punktepaaren bleibt unverändert, wenn man die Punkte eines Paares mit einander vertauscht.**

Vertauscht man in 4) das Paar $D$, $E$ mit $D_2$, $E_2$, so bleibt die Formel ungeändert. Man hat also den Satz:

317. **Die Beziehung der Involution zwischen dr[ei] Punktepaaren bleibt unverändert, wenn man zw[ei] Paare mit einander vertauscht.**

Anm. Die Formeln 1) und 4) dienen in gleicher Weise zur [Be]stimmung der Involution. Durch Vertauschung je zweier Punktepaare

1) und der beiden Punkte je eines Paares in 4) lassen sich jedesmal noch neue Formeln ableiten, welche äusserlich von den gegebenen verschieden sind, aber dieselben ersetzen können.

Ist die schneidende Gerade einer Seite oder Diagonale des Vierecks parallel (also z. B. $E_2D \parallel E_2B$), so rückt einer der 6 Punkte ($E_2$) in unendliche Entfernung. Und da nun $E_2D = E_2D_1$ ist, so geht Formel 4) über in

$$E_1D_2 \,.\, ED_1 = ED_2 \,.\, E_1D,$$

oder, wenn man $E_1D$ durch $E_1D_2 + D_2D$, und $ED_1$ durch $ED_2 + D_2D_1$ ersetzt:

$$E_1D_2(ED_2 + D_2D_1) = ED_2(E_1D_2 + D_2D),$$

oder:
$$E_1D_2 \,.\, D_2D_1 = ED_2 \,.\, D_2D.$$

Derjenige Punkt $D_2$ einer involutorischen Reihe, welcher dem unendlich fernen Punkte zugeordnet ist, heisst Mittelpunkt der Involution. Die letzte Formel drückt folgende Eigenschaft desselben aus:

Das Product der Abstände zweier zugeordneter Punkte vom Mittelpunkte der Involution hat für alle Punktepaare denselben Werth (und umgekehrt). 318.

Geht die schneidende Gerade durch den Schnittpunkt zweier Gegenseiten oder der beiden Diagonalen ($C$, $C_1$, $C_2$), so fallen in diesem Punkte zwei zugeordnete Punkte zusammen (z. B. $E$ und $D$ in $C$). Ein sich selbst zugeordneter Punkt der involutorischen Reihe heisst Doppelpunkt der Involution. — Geht die schneidende Gerade durch zwei dieser Punkte ($C$ und $C_1$), so erhält man zwei Doppelpunkte der Involution.*) Dieselben sind nach 312 mit dem Paare $A_2B_2$ harmonisch.

Dieses Resultat ergiebt sich auch, wenn man in der Formel 4)

$$\frac{E_1D_2}{ED_2} \cdot \frac{ED_1}{E_2D_1} \cdot \frac{E_2D}{E_1D} = 1,$$

$D$ und $E$ durch $S$, $D_1$ und $E_1$ durch $S_1$ ersetzt. Man erhält dann:

$$\frac{S_1D_2}{SD_2} \cdot \frac{SS_1}{E_2S_1} \cdot \frac{E_2S}{S_1S} = 1, \text{ oder } \frac{S_1D_2}{SD_2} \cdot \frac{SE_2}{S_1E_2} = -1,$$

wodurch die Punktepaare $S$, $S_1$ und $D_2E_2$ als harmonisch bezeichnet sind.

*) Aus Fig. 82 ist ersichtlich, dass, wenn die Gerade $D_2E_2$ in die Lage $B_2A_2$ übergeht, $E$ und $D$ in $C$, $E_1$ und $D_1$ in $C_1$ zusammenfallen.

Da die Beziehung der Involution unverändert bleibt, wenn man zwei Punktepaare mit einander vertauscht (317), so kann man auch $D_1$ und $E_1$ durch $S$, $D_2$ und $E_2$ durch $S_2$ ersetzen, und findet dann, dass auch das Paar $D$, $E$ mit $S_1$, $S_2$ harmonisch ist. Man hat also den Satz:

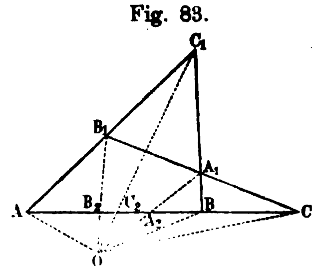
319. Die Doppelpunkte einer Involution sind harmonisch zu allen Punktepaaren derselben.

320. Und umgekehrt: Alle Punktepaare, welche mit einem gegebenen Paare harmonisch sind, bilden eine Involution.

Anm. In diesem Satze liegt die eigentlich geometrische Definition involutorischer Punktepaare Betrachtet man zwei Punkte, welche zu zwei gegebenen Paaren gleichzeitig harmonisch sein sollen, als Unbekannte, so sind dieselben durch die beiden Gleichungen, welche diese Beziehungen ausdrücken, vollständig bestimmt Also: Zu zwei gegebenen Punktepaaren giebt es immer ein gemeinsames harmonisches. Sind drei Punktepaare gegeben, zu denen das gesuchte harmonisch sein soll, so kann man sich aus den drei Gleichungen, welche diese Beziehungen ausdrücken, die beiden Unbekannten eliminirt denken. Das Resultat der Elimination ist die Bedingungsgleichung, welche die drei Punktepaare erfüllen müssen, um ein gemeinsames harmonisches Paar zu haben (vgl. Th. I, Nr. 96). Diese Bedingungsgleichung drückt die Beziehung der Involution aus. (Ausgeführt finden sich diese Rechnungen im „System der Raumlehre“, Th. I, Nr. 170 und 171). Also: Zu drei oder mehr gegebenen Punktepaaren giebt es nur dann ein gemeinsames harmonisches, wenn sie involutorisch sind.

**134.*** *Involutorische Strahlenbüschel.* — Ein beliebiger Punkt $O$ sei mit den Ecken eines vollständigen Vierecks $(\overline{ABCA_1B_1C_1})$ verbunden. Dann sind die durch die Punktreihe $(B_1C_3A_1C)$ gehenden Strahlenbüschel $(O)$ und $(C_1)$ perspectivisch. Es sind also auf der schneidenden Geraden $AC$ die Doppelverhältnisse der entsprechenden Strecken für beide Strahlenbüschel gleich, d. h.:

Fig. 83.




$$(AC_2 \,.\, BC) = (B_2C_2 \,.\, A_2C).$$

Demnach sind die Punktepaare $AA_2$, $BB_2$, $CC_2$ involutorisch. Ein Strahlenbüschel $(O)$ heisst involutorisch, wenn e eine Gerade $(AC)$ in einer involutorischen Punktreihe schneidet. Die beiden durch zugeordnete Punkte gehenden Strahlen heissen ebenfalls zugeordnet. Man hat hiernach den zu 31 reciproken Satz:

Die Verbindungslinien eines beliebigen Punkte

mit den Ecken und dritten Ecken eines vollständigen Vierecks bilden einen involutorischen Strahlenbüschel, wobei die nach zwei gegenüberliegenden Ecken oder dritten Ecken gerichteten Strahlen einander zugeordnet sind.

Der Satz 307 gestattet nun die unmittelbar klare Erweiterung:

Ein involutorischer Strahlenbüschel schneidet 322.
jede Gerade in einer involutorischen Punktreihe.

Dann folgt aus 311:

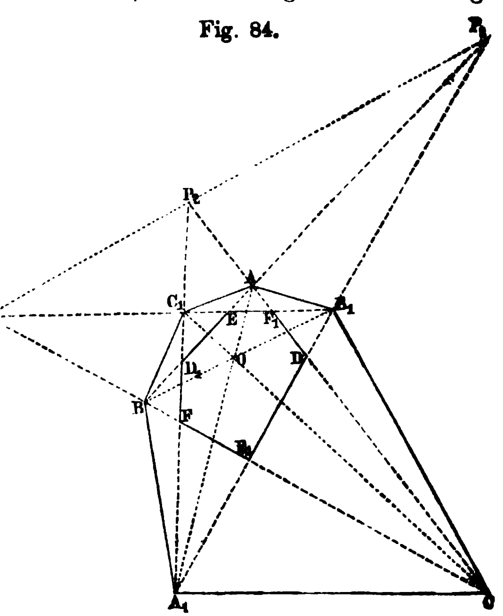
Eine involutorische Punktreihe giebt, mit jedem 323.
beliebigen Punkte verbunden, einen involutorischen Strahlenbüschel.

## 2) Das Brianchon'sche Sechseck und das Pascal'sche Sechsseit.

**135.*** *Vorbemerkung.* — Zwei Punktepaare bildeten die Ecken eines Vierecks, dessen Diagonalen die Träger dieser Punktepaare waren. — Drei Punktepaare ($AA_1$, $BB_1$, $CC_1$) bilden die Ecken eines Sechsecks, dessen Diagonalen die Träger dieser Punktepaare sind. Das Sechseck heisst ein Brianchonsches, wenn die drei Träger (die Verbindungslinien je zweier gegenüberliegender Ecken) durch denselben Punkt $O$ (Brianchonscher Punkt) gehen.

**136.*** Je drei :ht benachbarte :cken eines Sechs-:cks bilden ein :reieck ($\overline{ABC}$ und $\overline{{}_1B_1C_1}$). Die Ver-:ndungslinien je

Fig. 84.



zweier homologer Ecken dieser Dreiecke gehen durch denselben Punkt ($O$); folglich befinden sich die beiden Dreiecke in perspectivischer Lage. Nun ist nach 300

für $\overline{ABO}$, geschnitten von $A_1B_1P_3$

$$(AP_3 . BB_1 . OA_1) = -1,$$

für $\overline{BCO}$, geschnitten von $B_1C_1P_1$

$$(BP_1 . CC_1 . OB_1) = -1,$$

für $\overline{CAO}$, geschnitten von $C_1A_1P_2$

$$(CP_2 . AA_1 . OC_1) = -1.$$

Das Product dieser drei Formeln ist

$$(AP_3 . BP_1 . CP_2) = -1;$$

folglich liegen (nach 301) die Punkte $P_1$, $P_2$, $P_3$ auf derselben Geraden, und man hat den Satz:

324. Gehen die Verbindungslinien je zweier homologer Ecken zweier Dreiecke durch einen Punkt, so liegen die Schnittpunkte je zweier homologer Seiten auf einer Geraden (und umgekehrt). — Kurz: Perspectivisch liegende Dreiecke sind collinear.

Anm. Specieller Fall dieses Satzes, wenn $A_1$ auf $BC$, $B_1$ auf $CA$, $C_1$ auf $AB$ liegt.

Die Seiten der Dreiecke $\overline{ABC}$ und $\overline{A_1B_1C_1}$ bilden zusammen ein Sechsseit ($\overline{DE_1FD_1EF_1}$), welches nach 324 die Eigenschaft hat, dass die Schnittpunkte je zweier gegenüberliegender Seiten auf derselben Geraden ($P_1P_2P_3$) liegen. Ein solches Sechsseit heisst Pascal'sches, und die Gerade ($P_1P_2P_3$) Pascal'sche Linie. Der Satz 324 kann demnach auch so ausgesprochen werden:

| | |
|---|---|
| 325. Die Linien, welche die geraden, und diejenigen, welche die ungeraden Ecken eines Brianchon-schen Sechsecks verbinden, bilden ein Pascal-sches Sechsseit. | Die Punkte, in welchen die geraden, und diejenigen, in welchen die ungeraden Seiten eines Pascal-schen Sechsseits sich schneiden, bilden ei Brianchon'sches Sechsec |

Anm. Definition und Eigenschaften des Brianchon'schen Sechsec und des Pascal'schen Sechsseits sind einander reciprok. Es folgt dah aus jedem Satze der einen Figur ein reciproker für die andere.

Es sei $\overline{DE_1FD_1EF_1}$ (Fig. 84) ein dem Kreise einbeschri benes Sechseck. Dann ist nach 300

für $\overline{ABC}$, geschnitten von $B_1C_1P_1$: $(AE \cdot BP_1 \cdot CF_1) = -1$;
» » » » $C_1A_1P_2$: $(BF \cdot CP_2 \cdot AD_1) = -1$;
» » » » $A_1B_1P_3$: $(CD \cdot AP_3 \cdot BE_1) = -1$.

Multiplicirt man diese drei Formeln und beachtet, dass nach 256
$AE \cdot AD_1 = AF_1 \cdot AD$; $BF \cdot BE_1 = BD_1 \cdot BE$; $CD \cdot CF_1 = CE_1 \cdot CF$,
so erhält man:

$$(BP_1 \cdot CP_2 \cdot AP_3) = -1;$$

d. h.: Die Punkte $P_1, P_2, P_3$ liegen auf derselben Geraden (301). Man hat also den Satz:

Jedes einem Kreise einbeschriebene Sechsseit ist ein Pascal'sches. 326.

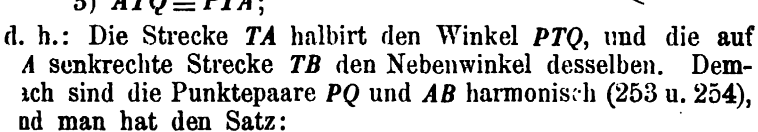
Da ferner Punkt und Tangente in Bezug auf die Kreislinie reciproke Gebilde sind, so folgt aus 273 der reciproke Satz:

Jedes einem Kreise umbeschriebene Sechseck ist ein Brianchon'sches. 327.

## 3) Die Kreislinie. — Pol und Polare.

**137.*** *Eine Kreislinie.* — Von einem Punkte $P$ seien zwei Tangenten, $PT$ und $PT_1$ an den Kreis $O$ gezogen. Der durch $P$ gezogene Durchmesser schneide die Kreislinie in den Punkten $A$ und $B$, und die Strecke $TT_1$ in $Q$. Dann ist $\overline{ATQ} \sim \overline{ABT}$ (245), folglich:

Fig. 85.




1) $ATQ = ABT$.

Ferner ist $PTO = ATB = R$, folglich, wenn man den gemeinsamen Winkel $ATO$ subtrahirt:

2) $PTA = OTB$.

Da nun $ABT = OTB$ ist (98), so folgt aus 1) und 2)

3) $ATQ = PTA$;

d. h.: Die Strecke $TA$ halbirt den Winkel $PTQ$, und die auf $A$ senkrechte Strecke $TB$ den Nebenwinkel desselben. Demnach sind die Punktepaare $PQ$ und $AB$ harmonisch (253 u. 254), und man hat den Satz:

Geht eine Gerade durch den Kreismittelpunkt, so sind ihre Schnittpunkte mit der Kreislinie harmonisch zu jedem ausserhalb des Kreises liegenden Punkte $P$ der Geraden, und dem Punkte $Q$, in dem 328.

die Gerade von der Verbindungsstrecke der Berührungspunkte der aus $P$ gezogenen Tangenten geschnitten wird.

Ist $PB_1$ eine beliebige durch $P$ gezogene Secante, so ist der Strahlenbüschel $B_1(PAQB)$ harmonisch (308), und da $B_1B \perp B_1A$, so ist $PB_1A = QB_1A$ (Umk. z. 309); folglich sind die Bogen $AA_1$ und $AA_2$, auf welchen diese Winkel als Peripheriewinkel stehen, einander gleich (Umk. z. 166), und ebenso die Bogen $BB_1$ und $BB_2$. Hieraus folgt weiter die Gleichheit der Sehnen $A_2B_1$ und $A_1B_2$ (162), sowie der Sehnen $A_1B_1$ und $A_2B_2$ (162). Man hat hiernach den Satz:

329. Zieht man durch einen Punkt ($P$ oder $Q$) Sehnenpaare von gleicher Länge ($A_1B_1 = A_2B_2$ oder $A_1B_2 = A_2B_1$) und verbindet wechselseitig die Endpunkte jedes Paares, so gehen diese Verbindungslinien bei allen Sehnenpaaren durch denselben Punkt ($Q$ oder $P$).

Anm. Die Verbindungsstrecken $A_1A_2$ und $B_1B_2$ sind stets parallel $TT_1$, mithin gilt der Satz auch von ihnen.

Aus der Gleichheit der Bogen $AA_1$ und $AA_2$ folgt weiter, dass $A_1QA = A_2QA$ ist. Demnach halbirt die Strecke $QA$ den Nebenwinkel von $A_1QB_1$, mithin die auf $QA$ senkrechte $QQ_1$ den Winkel $A_1QB_1$ selbst. Also ist der Strahlenbüschel $Q(PA_1Q_1B_1)$ harmonisch, und man hat den Satz:

330. Zieht man aus einem Punkte $P$ ausserhalb des Kreises beliebige Secanten, so ist der geometrische Ort des vierten harmonischen Punktes die Verbindungslinie der Berührungspunkte der aus $P$ gezogenen Tangenten.

Diejenige Gerade ($TT_1$), welche auf jeder durch einen Punkt $P$ gezogenen Secante den $P$ zugeordneten harmonischen Punkt trifft, heisst die Polare des Punktes $P$. Der Punkt $P$ heisst der Pol der Geraden $TT_1$, und $Q$ der dem Punkte $P$ zugeordnete Pol. Unmittelbar ergeben sich nun die Sätze:

331. Die Polare eines ausserhalb des Kreises liegenden Punktes ist die Verbindungslinie der Berührungspunkte der aus dem Punkte an die Kreislinie gezogenen Tangenten.

332. Der Pol einer Secante ist der Schnittpunkt der in ihren Schnittpunkten gezogenen Tangenten. (Der Pol eines Durchmessers ist der unendlich ferne Punkt der auf dem Durchmesser senkrecht stehenden Geraden.)

Die Polare eines auf der Kreislinie liegenden Punktes ist die Tangente in diesem Punkte. 333.

Der Pol einer Tangente ist ihr Berührungspunkt. (Derselbe ist als Pol sich selbst zugeordnet.) 334.

Ist $QA_2$ eine beliebige durch $Q$ gezogene Secante, deren Verlängerung die in $P$ auf $PQ$ errichtete Senkrechte in $P_1$ schneidet, so halbirt $PQ$ den Winkel $A_1PA_2$, folglich die auf $PQ$ senkrechte $PP_1$ den Nebenwinkel desselben. Demnach ist auch $P(P_1A_2QB_1)$ ein harmonischer Strahlenbüschel, $P_1$ der zugeordnete Pol von $Q$, und $PP_1$ (nach der Definition) die Polare von $Q$. Man hat also den Satz:

Die Polare eines beliebigen Punktes ist die auf dem Durchmesser in dem zugeordneten Pol errichtete Senkrechte. 335.

Da für alle Punkte der Geraden $PP_1$ der zugeordnete Pol $Q$ ist, und die Polare eines Punktes (nach der Definition) stets durch den zugeordneten Pol geht, so folgt weiter:

Die Polaren aller Punkte einer Geraden schneiden sich im Pole der Geraden. 336.

Die Pole aller durch einen Punkt gehenden Geraden liegen auf der Polare des Punktes. 337.

Anm. In diesen beiden Sätzen ist das zwischen Pol und Polare bestehende Verhältniss der Reciprocität ausgesprochen. (Wie lässt sich mittelst dieser Sätze 327 beweisen?) — Construction der Polare zu einem innerhalb des Kreises liegenden Punkte mittelst zweier durch ihn gezogenen Secanten, deren Pole verbunden werden. — Construction des Pols zu einer die Kreislinie nicht schneidenden Geraden mittelst zweier auf ihr angenommenen Punkte, deren Polaren sich schneiden. — Die Sätze 336 und 337 können auch so ausgesprochen werden: Bewegt sich ein Punkt auf einer Geraden vorwärts, so dreht sich seine Polare um den Pol der Geraden. — Dreht sich eine Gerade um einen Punkt, so bewegt sich ihr Pol auf der Polare des Punktes vorwärts.

Aus dem Zusatz zu 332 folgt nun:

Die Polare des Mittelpunktes eines Kreises ist die unendlich ferne Gerade. 338.

**138.*** *Mehrere Kreislinien.* — Die Polaren eines Punktes $P$ in Bezug auf zwei Kreislinien schneiden sich in einem Punkte $Q$, welcher der zugeordnete harmonische Pol zu $P$ heisst. Seien $S$ und $S_1$ die Schnittpunkte der beiden Kreislinien. Wenn dann eine beliebige Gerade ($PQ$) die eine Kreislinie in $A$ und $A_1$, die andre in $B$ und $B_1$, die gemeinsame Secante in $M$ schneidet, so ist nach 257

$$MS \,.\, MS_1 = MA \,.\, MA_1 = MB \,.\, MB_1$$

Wenn die beliebige Gerade eine dritte, durch $S$ und $S_1$ gehende Kreislinie in $C$ und $C_1$ schneidet, so ist ebenso

$$MS . MS_1 = MC . MC_1;$$

also: $$MA . MA_1 = MB . MB_1 = MC . MC_1;$$

d. h. die Punktepaare $AA_1$, $BB_1$, $CC_1$ bilden eine Involution, deren Mittelpunkt $M$ ist (318). Man hat also den Satz:

339 Alle Kreislinien, welche durch dieselben zwei Punkte gehen, werden von einer beliebigen Geraden in involutorischen Punktepaaren geschnitten, und der Schnittpunkt mit der gemeinsamen Secante ist der Mittelpunkt der Involution.

Da nun die Paare $AA_1$, $BB_1$, $CC_1$ ein gemeinsames harmonisches Paar haben, und $PQ$ das gemeinsame harmonische Paar zu $AA_1$ und $BB_1$ ist, so ist $PQ$ auch zu $CC_1$ harmonisch; d. h.: durch den Punkt $Q$ geht auch die Polare von $P$ in Bezug auf die dritte Kreislinie. Man hat also den Satz:

340. Die Polaren eines Punktes in Bezug auf alle Kreislinien, die sich in denselben zwei Punkten schneiden, gehen durch einen Punkt.

Betrachtet man auch die gemeinsame Secante als Kreislinie des Systems aller durch zwei Punkte gehenden Kreislinien, so rückt für sie der zweite Schnittpunkt der beliebigen Geraden $PQ$ in unendliche Entfernung; mithin liegt der ihm zugeordnete erste Schnittpunkt in der Mitte von $PQ$ (252), und man hat den Satz:

341. Die Verbindungsstrecke zweier zugeordneter harmonischer Pole wird durch die gemeinsame Secante des Systems halbirt.

**139.*** *Aehnlichkeitspolaren.* — Durch den äusseren Aehnlichkeitspunkt $S_3$ zweier Kreise $O_1$ und $O_2$ sei eine Secante gezogen, welche $O_1$ in $A_1$ und $B_1$, $O_2$ in $A_2$ und $B_2$ schneidet. Da $S_3$, $A_1$, $B_1$ in gerader Linie liegen, so schneiden sich (336 und 333) die Polare von $S_3$ in Bezug auf $O_1$, sowie die Tangenten in $A_1$ und $B_1$ in einem Punkte $P_1$, welcher der Pol der Secante in Bezug auf $O_1$ ist. — Ebenso schneiden sich die Polare von $S_3$ in Bezug auf $O_2$, und die Tangenten in $A_2$ und $B_2$ im Pole ($P_2$) der Secante in Bezug auf $O_2$. Man nennt die Polaren des äusseren Aehnlichkeitspunktes zweier Kreise seine äusseren Aehnlichkeitspolaren.

Es seien nun die Punkte $B_1$ und $A_2$ die Berührungspunkte einer dritten Kreislinie $O$. Nennt man dann die aus dem Aehn-

lichkeitspunkte zweier Kreislinien ($O_1$ und $O_2$) durch die Berührungspunkte einer dritten ($O$) gehende Secante die Berührungssecante von $O$, so kann das letzte Resultat in dem Satze ausgesprochen werden:

Werden zwei Kreise von einem dritten berührt, 342.
so geht jede ihrer äusseren Aehnlichkeitspolaren durch den Pol der Berührungssecante im zugehörigen Kreise.

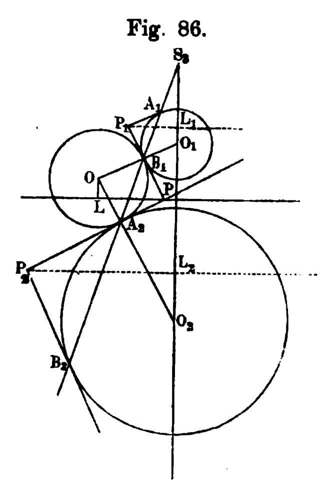


Fig. 86.

Die in $B_1$ und $A_2$ an $O$ gezogenen Tangenten schneiden sich in $P$ und sind einander gleich (186). Da dieselben gleichzeitig Tangenten an $O_1$ und $O_2$ sind, so ist hiernach $P$ ein Punkt der Potenzlinie von $O_1$ und $O_2$ (260), und die durch $P$ auf $O_1O_2$ gefällte Senkrechte ist diese Potenzlinie selbst.

Nun sind in Bezug auf $O$ und $O_2$ homolog: $B_1$ und $B_2$, $B_2P_2$ und $B_1P$ (als Parallelen), $P$ und $P_2$ (als Schnittpunkte dieser Parallelen mit der homologen Doppellinie $PP_2$), endlich $PL$ und $P_2L_2$ (als Parallelen). Ebenso lässt sich zeigen, dass in Bezug auf $O$ und $O_1$ die Geraden $PL$ und $P_1L_1$ homolog sind. Man hat also den Satz:

Werden zwei Kreise von einem dritten berührt, 343.
so ist ihre gemeinsame Secante mit jeder ihrer äusseren Aehnlichkeitspolaren homolog in Bezug auf den zugehörigen und den Berührungskreis.

Wenn $O$ ausser von $O_1$ und $O_2$ noch von einem dritten Kreise $O_3$ berührt wird, so seien die äusseren Aehnlichkeitspunkte

$$\text{ir} \qquad \overset{S_3}{O_1 \text{ und } O_2}, \quad \overset{S_1}{O_2 \text{ und } O_3}, \quad \overset{S_2}{O_3 \text{ und } O_1}.$$

)ann sind nach dem letzten Satze homologe Linien in Bezug uf $O$ und $O_2$:

) die Polare von $S_3$ zu $O_2$ und die Potenzlinie von $O_1$ und $O_2$,
2) » » » $S_1$ » $O_2$ » » » » $O_3$ » $O_2$.

olglich sind der Schnittpunkt der Polaren von $S_3$ und $S_1$ zu $)_2$ (d. h. der Pol der Geraden $S_3S_1$ zu $O_2$) und der Schnitt-

punkt der Potenzlinien von $O_1$, $O_2$ und $O_3$, $O_2$ (d. h. der Potenzpunkt der drei Kreise $O_1$, $O_2$, $O_3$) homologe Punkte in Bezug auf $O$ und $O_2$. — Da nun die Verbindungslinie dieser homologen Punkte (nach 280) durch den inneren Aehnlichkeitspunkt (den Berührungspunkt) von $O_2$ und $O$ geht, so hat man den Satz:

344. Werden drei Kreise von einem vierten berührt, so liegt ihr Potenzpunkt in gerader Linie mit jedem Berührungspunkte und dem Pol ihrer äusseren Aehnlichkeitsaxe in dem zugehörigen Kreise.

Da die drei in diesem Satze erwähnten Punkte in gerader Linie liegen, so gehen (nach 336) ihre Polaren in Bezug auf irgend einen der drei berührten Kreise (z. B. $O_1$) durch denselben Punkt. Und da die Polare des Berührungspunktes von $O$ und $O_1$ die gemeinsame Tangente dieser Kreise ist, so lautet der zu 344 reciproke Satz:

345. Werden drei Kreise von einem vierten berührt, so geht ihre äussere Aehnlichkeitsaxe durch denselben Punkt mit jeder ihrer Berührungstangenten und der Polare ihres Potenzpunktes in dem zugehörigen Kreise.

Anm. Soll ein Kreis construirt werden, der drei gegebene Kreise berührt, so findet man mittelst des Satzes 344 auf jedem der gegebenen Kreise den Berührungspunkt, kann also den gesuchten Kreis durch drei seiner Punkte finden. Dagegen bestimmt der Satz 345 zu jedem der drei gegebenen Kreise die Berührungstangente, lehrt also den gesuchten Kreis durch drei seiner Tangenten finden. — Modificirung dieser Aufgabe (Apollonisches*) Problem) einerseits durch Hinzufügung der „Berührung von innen", andrerseits durch Ausartung eines oder mehrerer der gegebenen Kreise in einen Punkt oder eine Gerade.

### 4) Die Projection als specieller Fall der Collineation.

**140.*** Die Collineation zweier Gebilde heisst Projection, wenn die Gebilde in verschiedenen Gebieten liegen. Ist eins dieser Gebiete eine Stufe höher als das andere, so sagt man, das im ersten liegende Gebilde sei auf das zweite Gebiet projicirt. Das im zweiten Gebiet liegende Gebilde heisst dann die Projection des andern. — Sind beide Gebiete von gleicher Stufe, so ist es gleich, welches Gebilde man als ursprüngliches, und welches man als Projection betrachtet.

Anm. Man kann also Gebilde der Ebene auf eine (in der Ebene liegende) Gerade projiciren, ebenso Punkte einer Geraden auf eine andere Gerade.

---

*) Apollonius aus Perga, geb. 247 v. Chr., lehrte in Alexandrien und Pergamus.

Man projicirt ein Gebilde auf ein Gebiet, indem man aus einem gegebenen Punkte (Projectionspunkt, Augenpunkt) durch alle Punkte (Eckpunkte) des gegebenen Gebildes Geraden (Projectionsstrahlen) zieht. Dann bilden die Schnittpunkte dieser Geraden mit dem Gebiete (Projectionslinie, Projectionsebene) die Projection des gegebenen Gebildes. (Schiefe Projection.)

Anm. Wird nach diesem Verfahren der dem Auge sichtbare Theil der Oberfläche eines Körpers auf eine Ebene projicirt, so heisst die Projection das Bild des Körpers.

Lässt man den Projectionspunkt in unendliche Entfernung rücken, so sind die Projectionsstrahlen parallel. (Parallele Projection.)

Anm. Die parallele Projection ist also ein specieller Fall der Affinität.

Insbesondere können die Projectionsstrahlen auf der Projectionslinie oder Projectionsebene senkrecht stehen. (Senkrechte Projection oder Projection im engeren Sinne.)

Aus dem Begriffe der Projection folgen nun für die Geometrie folgende, die senkrechte Projection betreffenden Sätze:

Die Projection eines Punktes (auf eine Gerade) ist 346.
der Fusspunkt der von dem Punkte auf die Gerade gefällten Senkrechten.

Die Projection einer Strecke ist die Strecke 347.
zwischen den Projectionen ihrer Endpunkte.

Anm. Wann fällt ein Punkt mit seiner Projection zusammen, wann eine Strecke mit der ihrigen? Wann ist die Projection einer Strecke der gegebenen Strecke gleich? Warum ist sie im Allgemeinen kleiner, und niemals grösser? Wann ist sie gleich Null?

Jede Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks ist 348.
die Projection der Hypotenuse auf die Kathetenlinie.

Die Projectionen paralleler Strecken verhalten 349.
sich (auch dem Vorzeichen nach) wie diese.

Projicirt man ein Stück des ersten Schenkels eines 350.
Winkels auf den zweiten, so ist die Projection mit dem zweiten Schenkel gleichgerichtet, wenn der Winkel spitz, entgegengesetzt gerichtet, wenn er stumpf ist.

# Rechnende Geometrie.

**141.** *Vorbemerkung.* — In Nr. 20 ist gezeigt worden, dass jede Strecke durch eine Zahl dargestellt werden kann, indem sie durch eine bestimmte Strecke gemessen wird, deren Länge man gleich 1 setzt. Ist man nun im Stande, für jede Rechnung mit Strecken eine geometrische Bedeutung anzugeben, so kann man Sätze und Aufgaben, welche sich auf die Grösse von Strecken beziehen, durch Formeln, bezw. Gleichungen ausdrücken. Jede Umgestaltung einer Formel liefert dann einen neuen Satz, und die Auflösung einer Gleichung die Lösung der geometrischen Aufgabe.

Nun ist bereits bekannt, dass Summe und Differenz zweier Strecken wieder eine Strecke (15, 16), ihr Quotient aber eine Zahl ist (19). Es ist also noch zu untersuchen, welche Bedeutung das Product zweier Strecken hat.

## 1) Der Flächenraum als Streckenproduct.

**142.** *Masseinheit.* — Wie zwei Strecken, so kann man auch zwei Figuren (Flächenräume) durch einander messen, indem man bestimmt, wie oft die eine in der anderen enthalten ist. An der Figur aber, welche man als Mass benutzen will, ist nicht nur die Grösse, sondern auch die Gestalt beliebig. Es ist allgemein üblich, das Quadrat als Massfigur zu nehmen.

Nur eine Figur, das Rechteck, lässt sich direct durch das Quadrat messen, d. h in Quadrate zerlegen; die Messung der übrigen Figuren wird durch Rechnung bewerkstelligt.

**143.** *Das Rechteck.* — Es sei $m$ das gemeinsame Mass zweier anstossender Seiten ($a$, $b$) eines Rechtecks, und $p$-mal in $a$, $q$-mal in $b$ enthalten, so dass

Fig. 87.

b

a

$$a = pm, \quad b = qm$$

ist. Theilt man dann $a$ in $p$ und $b$ in $q$ gleiche Theile, und zieht durch die Theilpunkte jeder Seite

Parallelen zur andern, so zerfällt das Rechteck in congruente Quadrate ($M$). — Setzt man $m = 1$, so geben die Zahlen $p$ und $q$ die Länge der Seiten $a$ und $b$ an, und jedes der erhaltenen Quadrate hat die Längeneinheit als Seite. Setzt man auch $M = 1$, so ist die Fläche des Rechtecks durch die Zahl ausgedrückt, welche angiebt, in wieviel Quadrate das Rechteck zerfällt.

Es kommt jetzt darauf an, diese Zahl zu bestimmen. Dazu bieten sich der Reihe nach 3 Methoden.

1) Man zählt alle Quadrate einzeln.

2) Da alle Quadrate in $q$ wagerechten Reihen stehen, deren jede $p$ Quadrate enthält, so genügt es, die Quadrate einer senkrechten und einer wagerechten Reihe zu zählen, und die erhaltenen Zahlen zu multipliciren.

3) Da jede senkrechte Reihe soviel Quadrate enthält, wie die Seite $b$ Längeneinheiten, und jede wagerechte Reihe soviel Quadrate, wie die Seite $a$ Längeneinheiten, so genügt es, statt der Quadrate die Längeneinheiten der Seiten $a$ und $b$ zu zählen ($a$ und $b$ durch $m$ zu messen), und die erhaltenen Zahlen zu multipliciren.

Die Anzahl der Quadrate ist nach jeder dieser Zählungen $pq$.

Anm. Zur wirklichen Ausmessung eines Rechteckes durch eine der beiden ersten Methoden würde man ein wirkliches Flächenmass (etwa eine hölzerne quadratische Tafel) gebrauchen. (Wie würde die Ausmessung nach diesen Methoden bewerkstelligt werden?) Die dritte Methode erfordert nur ein Längenmass zur Messung der Strecken $a$ und $b$, und zeigt, wie die Flächenmessung durch Längenmessungen und eine Rechnung ersetzt werden kann.

Man versteht nun unter dem *Producte zweier Strecken*, die durch eine Längeneinheit gemessen sind, den Flächenraum des mit dem Producte ihrer Masszahlen multiplicirten Quadrates, dessen Seite die Längeneinheit ist.

Anm. Setzt man dieses Quadrat $= 1$, so erhält man die in Nr. 114 gegebene vorläufige Erklärung des Productes zweier Strecken, welche dort nur einen arithmetischen, keinen geometrischen Sinn hatte.

Aus dieser Erklärung und der vorher gegebenen Bestimmung der Fläche des Rechtecks folgt unmittelbar der Satz:

Die Fläche eines Rechtecks ist gleich dem Pro- 351.
ducte zweier anstossenden Seiten.

Sind die beiden Strecken eines Productes einander gleich, so geht das Product in das arithmetische Quadrat der einen Strecke über, und aus 351 folgt:

352. Die Fläche eines Quadrates ist gleich dem (arithmetischen) Quadrat einer Seite.

**144.** *Das Parallelogramm.* — Ein Parallelogramm ist nach 140 einem Rechteck mit gleicher Grundlinie und Höhe gleich. Sind $a$ und $b$ zwei anstossende Seiten dieses Rechtecks, so ist $a$ die Grundlinie, und $b$ die Höhe des Parallelogramms; also folgt aus 351:

353. Die Fläche eines Parallelogramms ist gleich dem Producte aus Grundlinie und Höhe.

Anm. Sind $a$ und $b$ zwei anstossende Seiten eines Parallelogramms, $h_1$ und $h_2$ die auf $a$, bezw. $b$ stehenden Höhen, so ist $ah_1 = bh_2$ oder $\frac{a}{b} = \frac{h_2}{h_1}$; in Worten?

**145.** *Das Dreieck.* — Aus 141 und 353 folgt:

354. Die Fläche eines Dreiecks ist gleich dem halben Product aus Grundlinie und Höhe.

Sind $a$, $b$, $c$ die Seiten eines Dreiecks, $h_1$, $h_2$, $h_3$ die bezw. darauf stehenden Höhen, so ist nach 354:

$$\frac{ah_1}{2} = \frac{bh_2}{2} = \frac{ch_3}{2},$$

oder:
$$\frac{a}{b} = \frac{h_2}{h_1}; \quad \frac{b}{c} = \frac{h_3}{h_2}; \quad \frac{c}{a} = \frac{h_1}{h_3};$$

355. d. h.: Zwei Höhen eines Dreiecks verhalten sich umgekehrt wie die zugehörigen Seiten.

**146.** *Das Trapez.* — Ist von einem Dreieck, dessen Grundlinie $a$, dessen Höhe $h$ ist, durch eine Parallele zu $a$ ein Dreieck abgeschnitten, dessen Grundlinie $a_1$, Höhe $h_1$ ist, so ist die Fläche des übrig bleibenden Trapezes (nach 354):

$$F = \frac{ah}{2} - \frac{a_1 h_1}{2}.$$

Nun ist (271, 243)

$$\frac{a}{h} = \frac{a_1}{h_1} \text{ oder } ah_1 = a_1 h,$$

also
$$F = \frac{ah}{2} + \frac{a_1 h}{2} - \frac{ah_1}{2} - \frac{a_1 h_1}{2} = \frac{a + a_1}{2} \cdot (h - h_1),$$

d h., da $h - h_1$ die Höhe des Trapezes ist:

356. Die Fläche eines Trapezes ist gleich dem Product aus seiner Höhe und der halben Summe der parallelen Seiten.

**147.** *Polygone.* — Sind $a, b, c$ .. die Seiten eines Polygons, welches einem Kreise mit dem Radius $\varrho$ umbeschrieben ist, so zerfällt dasselbe, wenn man den Mittelpunkt des Kreises mit seinen Ecken verbindet, in Dreiecke, deren Grundlinien $a, b, c$ ... sind, deren Höhen alle gleich $\varrho$ sind. Demnach ist der Flächenraum des Polygons

$$F = \frac{a\varrho}{2} + \frac{b\varrho}{2} + \ldots = \frac{\varrho(a+b+\ldots)}{2},$$

oder, wenn $\frac{a+b+\ldots}{2} = p$ gesetzt wird:

$$F = p\varrho;$$

d. h.: Die Fläche eines dem Kreise umbeschriebenen Polygons ist gleich dem halben Product aus Umfang und Radius. 357.

Anm. Andere geradlinige Figuren müssen, wenn ihr Flächenraum berechnet werden soll, in Dreiecke zerlegt werden.

## 2) Vergleichung der Flächenräume mehrerer Figuren.

**148.** *Quotient von Flächenräumen.* — Die Flächen zweier Dreiecke, $F$ und $F_1$, verhalten sich (147) wie die Producte aus Grundlinie und Höhe, also

$$1)\quad \frac{F}{F_1} = \frac{ah}{a_1 h_1}.$$

Ist nun einer der an $a$ und $a_1$ anliegenden Winkel in beiden Dreiecken gleich ($\beta = \beta_1$), so sind die diesen Winkel enthaltenden rechtwinkligen Dreiecke ähnlich (245), und es ist (nach 243):

$$\frac{h}{h_1} = \frac{c}{c_1}.$$

Dies in 1) eingesetzt, giebt:

$$2)\quad \frac{F}{F_1} = \frac{ac}{a_1 c_1},$$

d. h.: Die Flächenräume zweier Dreiecke, die in einem Winkel übereinstimmen, verhalten sich, wie die Producte der diesen Winkel einschliessenden Seiten. 358.

Ist auch der andere an $a$ und $a_1$ anliegende Winkel in beiden Dreiecken gleich ($\gamma = \gamma_1$), so sind sie ähnlich (345), und es ist (nach 243):

$$\frac{c}{c_1} = \frac{a}{a_1}.$$

Dies in 2) eingesetzt, giebt:

$$3)\quad \frac{F}{F_1} = \frac{a^2}{a_1^2},$$

359. d. h.: Die Flächen ähnlicher Dreiecke verhalten sich wie die Quadrate homologer Seiten.

Theilt man zwei ähnliche Polygone durch Diagonalen, die von zwei Ecken ausgehen, in Dreiecke, so sind dieselben paarweise ähnlich (271). Sind nun im ersten Polygon $a_0$, $a_1$, $a_2$, $a_3$ ... die Seiten, $d_1$, $d_2$, $d_3$ ... die von der Ecke $(a_0 a_1)$ ausgehenden Diagonalen, und $D_1$, $D_2$, $D_3$ ... die Flächenräume der durch diese Diagonalen der Reihe nach abgeschnittenen Dreiecke, und ebenso im zweiten $b_1$, $b_2$ ... die Seiten, $e_1$, $e_2$ ... die Diagonalen, $E_1$, $E_2$ ... die Dreiecksflächen, so ist (nach 359)

$$\frac{D_1}{E_1} = \frac{a_1^2}{b_1^2} = \frac{d_1^2}{e_1^2};\quad \frac{D_2}{E_2} = \frac{d_1^2}{e_1^2} = \frac{d_2^2}{e_2^2};\quad \frac{D_3}{E_3} = \frac{d_2^2}{e_2^2} = \frac{d_3^2}{e_3^2};\ \ldots$$

folglich $$\frac{D_1}{E_1} = \frac{D_2}{E_2} = \frac{D_3}{E_3} = \ldots = \frac{a_1^2}{b_1^2},$$

also (nach Th. I, 108)

$$\frac{D_1 + D_2 + D_3 + \ldots}{E_1 + E_2 + E_3 + \ldots} = \frac{a_1^2}{b_1^2};$$

360. d. h.: Die Flächen ähnlicher Polygone verhalten sich wie die Quadrate homologer Seiten oder Diagonalen.

Nach 222 können Kreislinien als regelmässige Polygone betrachtet werden, die nach 284 stets ähnlich sind. Demnach folgt aus 360:

361. Die Flächen zweier Kreise verhalten sich wie die Quadrate ihrer Durchmesser oder Radien.

**149.** *Summe von Flächenräumen.* — Sind $a$ und $b$ die Katheten, $c$ die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, $c_1$ und $c_2$ bezw. die Projectionen von $a$ und $b$ auf $c$, so ist [nach 259, 1)]:

$$a^2 = c_1 c;\quad b^2 = c_2 c,$$

362. also $$a^2 + b^2 = (c_1 + c_2)c = c^2,$$

welche Formel den schon bekannten Pythagoräischen Satz (15[illegible]) ausdrückt.*)

*) Die mit diesem Satze in Zusammenhang stehende Aufgabe: Dr[illegible] ganze Zahlen $a$, $b$, $c$ zu finden, die der Bedingung genügen:

$$a^2 + b^2 = c^2,$$

wird dadurch gelöst, dass man in der Formel

$$(p^2 - q^2)^2 + (2pq)^2 = (p^2 + q^2)^2$$

Sind die Seiten $a$, $b$, $c$ des rechtwinkligen Dreiecks homologe Seiten von drei ähnlichen Polygonen, deren Flächenräume bezw. durch $F_1$, $F_2$, $F_3$ ausgedrückt sind, so ist nach 360:

$$\frac{F_1}{F_3} = \frac{a^2}{c^2}; \quad \frac{F_2}{F_3} = \frac{b^2}{c^2}; \text{ also } \frac{F_1 + F_2}{F_3} = \frac{a^2 + b^2}{c^2},$$

oder, da nach 362 $a^2 + b^2 = c^2$ ist:

$$F_1 + F_2 = F_3;$$

d. h.: Bilden die homologen Seiten dreier ähnlicher Polygone ein rechtwinkliges Dreieck, so ist die Fläche des Hypotenusen-Polygons gleich der Summe der Flächen der Katheten-Polygone. 363.

Anm. Von diesem Satze ist der pythagoräische ein specieller Fall. Statt der Polygone können (nach 361) auch Kreisflächen eintreten.

Sind $a$, $b$, $c$ die Seiten eines beliebigen Dreiecks, $c_1$ und $c_2$ bezw. die Projectionen von $a$ und $b$ auf $c$ (Fig. 88), und $h$ die zu $c$ gehörige Höhe, so ist (362)

$$a^2 = h^2 + c_1^2, \quad b^2 = h^2 + c_2^2,$$

also (wenn $a > b$ ist)

$$a^2 - b^2 = c_1^2 - c_2^2 = (c_1 + c_2)(c_1 - c_2).$$

Nun ist entweder

$$c_1 + c_2 = c, \quad \text{d. h.: } c_1 = c - c_2,$$

oder

$$c_1 - c_2 = c, \quad \text{d. h.: } c_1 = c + c_2,$$

je nachdem der Seite $a$ ein spitzer oder ein stumpfer Winkel gegenüberliegt; man erhält also durch Einsetzung dieser Werthe:

$$a^2 - b^2 = c(c \mp 2c_2) = c^2 \mp 2cc_2.$$

oder:

$$a^2 = b^2 + c^2 \mp 2cc_2;$$

d. h.: In jedem Dreieck ist das Quadrat einer Seite gleich der Summe der Quadrate der andern Seiten, vermehrt oder vermindert um das doppelte Product aus einer dieser Seiten und der Projection der andern auf sie, je nachdem die erste Seite einem stumpfen oder spitzen Winkel gegenüberliegt. 364.

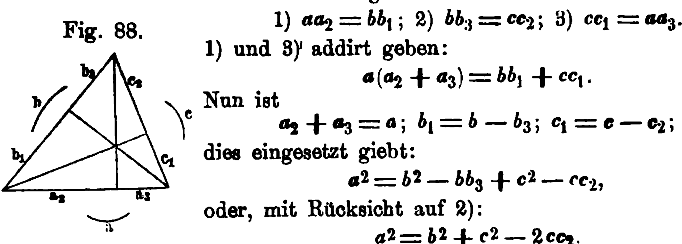
---

r $p$ und $q$ zwei beliebige (keinen gemeinsamen Factor enthaltende) ganze ıhlen nimmt (von denen eine durch 2 theilbar ist), und $a = p^2 - q^2$, $= 2pq$, $c = p^2 + q^2$ setzt. Die für $a$, $b$, $c$ sich ergebenden Zahlengruppen ie man durch Multiplication jeder Gruppe mit einer beliebigen Zahl verelfältigen kann) heissen Pythagoräische Dreieckszahlen. Aufstel-ıg derselben für die einziffrigen Werthe von $p$ und $q$! Aufsuchung zweier lcher Dreiecke, welche eine gleiche Kathete haben, und Zusammenlegung erselben zu einem schiefwinkligen Dreiecke. Welche Eigenschaften haben ’e Fläche und die Höhen desselben?

Anm. Dieser Satz heisst der allgemeine Pythagoräische. Er geht in den letzteren über, wenn der der ersten Seite gegenüberliegende Winkel ein rechter ist. Der Wortausdruck des Satzes vereinfacht sich, wenn man die Projection einer Seite auf eine andere Seite als positiv, auf die Verlängerung einer Seite als negativ ansieht.

Andere Ableitung von 364: Sind im Dreieck $abc$ (Fig. 88) die Höhen gezogen, so folgt aus der Aehnlichkeit je zweier rechtwinkliger Dreiecke, die einen Winkel des Dreiecks $abc$ gemeinsam haben:

Fig. 88.




1) $aa_2 = bb_1$; 2) $bb_3 = cc_2$; 3) $cc_1 = aa_3$.

1) und 3) addirt geben:

$$a(a_2 + a_3) = bb_1 + cc_1.$$

Nun ist

$$a_2 + a_3 = a;\ b_1 = b - b_3;\ c_1 = c - c_2;$$

dies eingesetzt giebt:

$$a^2 = b^2 - bb_3 + c^2 - cc_2,$$

oder, mit Rücksicht auf 2):

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2cc_2.$$

Sind $a_1$ und $b_1$ die Seiten eines anderen Dreiecks, welches die Grundlinie $c$ enthält, und dessen Spitze auf $h$ oder dessen Verlängerung liegt, so ist, da die Projectionen von $b$ und $b_1$ zusammenfallen,

$$a_1^2 = b_1^2 + c^2 - 2cc_2;$$

folglich:

$$a_1^2 - b_1^2 = a^2 - b^2.$$

Jeder Punkt von $h$ hat also die Eigenschaft, dass die Differenz der Quadrate seiner Abstände von den Endpunkten der Seite $c$ beständig denselben Werth hat. Dies giebt den Satz:

365. Der geometrische Ort eines Punktes, für welchen die Differenz der Quadrate seiner Abstände von zwei festen Punkten ($A$, $B$) eine gegebene Grösse $f^2$ hat, ist die auf $AB\ (= c)$ in der Entfernung $d = \frac{c^2 - f^2}{2c}$ von einem Endpunkte errichtete Senkrechte.

Anm. Die Strecke $d$ ist auf $AB$ selbst oder auf der Verlängerung abzutragen, je nachdem $c > f$, oder $c < f$ ist.

Die nach der Seite $c$ gehende Mittellinie $t$ theilt das Dreieck in zwei Dreiecke mit den Seiten $a$, $t$, $\frac{c}{2}$; $b$, $t$, $\frac{c}{2}$. In diesen Dreiecken ist nach 364, wenn $t_1$ die Projection von $t$ auf $c$ ist:

$$a^2 = t^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 + 2t_1 \cdot \frac{c}{2};$$

$$b^2 = t^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 - 2t_1 \cdot \frac{c}{2};$$

also durch Addition:

$$a^2 + b^2 = 2t^2 + 2\left(\frac{c}{2}\right)^2;$$

d. h.: In jedem Dreieck ist die Summe der Quadrate 366.
zweier Seiten gleich dem doppelten Quadrat der halben dritten Seite, vermehrt um das doppelte Quadrat der nach der dritten gezogenen Mittellinie.

Sind $a_1$ und $b_1$ die Seiten eines anderen Dreiecks, welches die Stücke $c$ und $t$ enthält, so ist

$$a_1^2 + b_1^2 = 2t^2 + 2\left(\frac{c}{2}\right)^2 = a^2 + b^2.$$

Die Spitze eines aus $c$ und $t$ gebildeten Dreiecks hat also die Eigenschaft, dass die Summe der Quadrate ihrer Abstände von den Endpunkten der Seite $c$ beständig denselben Werth hat. Da nach 168 der geometrische Ort dieser Spitze eine Kreislinie ist, so hat man den Satz:

Der geometrische Ort eines Punktes, für welchen 367.
die Summe der Quadrate seiner Abstände von zwei festen Punkten ($A$, $B$) eine gegebene Grösse $2f^2$ hat, ist die aus der Mitte von $AB$ $(=c)$ mit dem Radius $\sqrt{f^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2}$ beschriebene Kreislinie.

### 3) Construction der Wurzeln einer Gleichung.

**150.** *Vorbemerkung.* — Sind zur Lösung einer geometrischen Constructionsaufgabe Strecken in fester Lage gegeben, so lässt sich die Lösung der Aufgabe oft auf die Aufsuchung einer oder mehrerer noch unbekannter Strecken zurückführen. Gelingt es dann, zwischen den bekannten und den unbekannten Strecken, mittelst der in der Aehnlichkeitslehre und im Abschnitt über rechnende Geometrie aufgestellten Sätze, ebensoviele Gleichungen aufzustellen als Unbekannte angenommen sind, so erhält man durch Elimination dieser Unbekannten bis auf eine (nach Th. I, Nr. 97) eine Gleichung, aus der man, wenn sie vom ersten oder zweiten Grade ist (oder sich in solche Gleichungen zerlegen lässt), die unbekannte Strecke construiren kann.

**151.** *Die Gleichung vom ersten Grade.* — Bedeuten $x$, $a$, $b$, $c$, ... Strecken, so ist die Normalform dieser Gleichung (vgl. Th. I, Nr. 92)

$$ax = bc \left(\text{oder } x = \frac{bc}{a}\right).$$

Indem man beiderseits durch $ab$ dividirt, folgt:

$$\frac{x}{b} = \frac{c}{a}.$$

Also kann $x$ nach Aufgabe 10 (S. 106) als vierte Proportionale zu $a$, $b$, $c$ construirt werden.

Eine allgemeinere Gestalt der Normalform ist

$$a_1 a_2 a_3 \ldots x = b b_1 b_2 b_3 \ldots \left(\text{oder } x = \frac{b b_1 b_2 b_3 \ldots}{a_1 a_2 a_3 \ldots}\right).$$

In diesem Falle setzt man

$$c = \frac{b b_1}{a_1} \left(x = \frac{c b_2 b_3 \ldots}{a_2 a_3 \ldots}\right),$$

und construirt $c$ in der vorher angegebenen Weise. Dann setzt man

$$d = \frac{c b_2}{a_2} \left(x = \frac{d b_3 \ldots}{a_3 \ldots}\right),$$

construirt $d$ ebenso, und setzt dieses Verfahren fort, bis die einfache Normalform hergestellt ist.

**152.** *Die rein quadratische Gleichung.* — Dieselbe lässt sich stets auf die Normalform bringen:

$$x^2 = ab.$$

Anm. Factoren, die etwa noch bei $x^2$ stehen, werden durch das soeben beschriebene Verfahren entfernt.

Demnach kann $x$ nach Aufgabe 13 (S. 113) als mittlere Proportionale zu $a$ und $b$ construirt werden.

Anm. Da es bei der Bestimmung von Strecken durch Gleichungen nur auf ihre absolute Grösse, nicht aber auf ihr Vorzeichen ankommt, so giebt die rein quadratische Gleichung nur eine Lösung einer geometrischen Aufgabe.

**153.** *Die gemischt quadratische Gleichung.* — Dieselbe lässt sich stets auf die Normalform bringen:

$$x^2 + ax = b^2.$$

Anm. Factoren bei $x^2$ werden, wie oben, weggeschafft, während die rechte Seite der Gleichung sich durch das soeben beschriebene Verfahren stets als Quadrat darstellen lässt.

Indem man auf beiden Seiten $\left(\frac{a}{2}\right)^2$ addirt (vgl. Th. , Nr. 99), erhält man:

$$\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 = b^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2.$$

Durch Vergleichung mit 362 folgt, dass $\left(x + \frac{a}{2}\right)$ Hypotenuse desjenigen rechtwinkligen Dreiecks ist, dessen Katheten $b$ und $\frac{a}{2}$ sind. Demnach ist $x + \frac{a}{2}$ leicht zu construiren.

Setzt man nun $b^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = c^2$, also $x + \frac{a}{2} = \pm c$, so folgt:

$$x_1 = + c - \frac{a}{2};\; x_2 = - c - \frac{a}{2}.$$

Aus $x + \frac{a}{2}$ findet man also $x$, indem man $\frac{a}{2}$ auf der Strecke $c$ ab-, oder an dieselbe anträgt.

Anm. Die gemischt quadratische Gleichung liefert also im Allgemeinen zwei Lösungen einer geometrischen Aufgabe. Da $\frac{a}{2} < c$, so ist eine der gefundenen Strecken positiv, die andere negativ. — Sind die Wurzeln einer rein oder gemischt quadratischen Gleichung imaginär, so ist die Aufgabe in dem beabsichtigten Sinne nicht lösbar, und man bezeichnet die durch die Strecke $x$ zu bestimmenden Punkte selbst als imaginäre. (Beispiel: Wie weit sind die Schnittpunkte einer Secante von dem auf ihr senkrechten Durchmesser entfernt, wenn $a$ der Abstand der Secante vom Mittelpunkt, $r$ der Radius des Kreises, und $a > r$ ist? — Bezeichnet man die gesuchte Strecke durch $x$, so findet sich: $x^2 = r^2 - a^2 = -(a^2 - r^2)$; also sind die Wurzeln der Gleichung, die Strecken $x_1$ und $x_2$, und die Endpunkte derselben, d. h. die Schnittpunkte der Secante mit der Kreislinie, imaginär.)

Ist $n$ ein Zahlfactor, der bei einer Strecke $a$ steht, so ist auch $na$ eine Strecke, und kann gleich $a_1$ gesetzt werden. Steht aber $n$ bei einem Quadrate, so setzt man $na^2 = a_1{}^2$, und construirt $a_1$ als mittlere Proportionale zwischen $na$ und $a$.

Aus der Gleichung

$$x^4 + pa^2x^2 = qa^4,$$

worin $p$ und $q$ beliebige Zahlen sind, erhält man:

$$\left(x^2 + \frac{p}{2}a^2\right)^2 = a^4\left(q + \frac{p^2}{4}\right);$$

$$x^2 + \frac{p}{2}a^2 = a^2\sqrt{q + \frac{p^2}{4}}.$$

Construirt man nun $\frac{a}{2} \cdot pa = b^2$; $a \cdot \left(q + \frac{p^2}{4}\right)a = c^2$; $ac = d^2$, so geht die letzte Gleichung über in

$$x^2 + b^2 = d^2,$$

woraus $x$ sich construiren lässt.

## 4) Das regelmässige Polygon und der Kreis.

### a. Allgemeine Polygone.

**154.** *Das einbeschriebene n-Eck und 2n-Eck.* — Sei $s_1$ die Seite des $n$-Ecks, $s_2$ die des $2n$-Ecks, beide beschrieben in den Kreis mit dem Radius $r$; sei ferner $F_1$ die Fläche des Dreiecks $\overline{ODA}$ (Fig. 89), $F_2$ die des Dreiecks $\overline{D_1DA}$, dann ist (nach 354)

Fig. 89.

$$F_1 = \frac{OD \cdot AC}{2} = \frac{rs_1}{4}$$

$$F_2 = \frac{AD \cdot AD_1}{2} = \frac{s_2\sqrt{4r^2 - s_2^2}}{2}$$

(da $AD_1^2 = DD_1^2 - AD^2$).

Nun hat Dreieck $\overline{ODA}$ gleiche Höhe ($AC$), aber nur halbe Grundlinie ($OD = \frac{1}{2}D_1D$) mit $\overline{D_1DA}$; folglich ist (nach 144):

$$2F_1 = F_2,$$

oder:

$$rs_1 = s_2\sqrt{4r^2 - s_2^2}.$$

Indem man aus dieser Gleichung $s_1$ oder $s_2$ bestimmt, erhält man:

$$1)\quad s_1 = \frac{s_2\sqrt{4r^2 - s_2^2}}{r}.$$

$$2)\quad s_2 = \sqrt{2r^2 - r\sqrt{4r^2 - s_1^2}}.$$

**155.** *Das einbeschriebene und umbeschriebene n-Eck.* — Ist $t_1$ die Seite des dem Kreise umbeschriebenen regelmässigen $n$-Ecks, so folgt aus der Aehnlichkeit der Dreiecke $\overline{OAC}$ und $\overline{OA_1D}$ (Fig. 89):

$$\frac{A_1D}{DO} = \frac{AC}{CO},$$

oder:

$$\frac{t_1}{2r} = \frac{s_1}{2\sqrt{r^2 - \frac{s_1^2}{4}}} \quad \text{(da } CO^2 = OA^2 - CA^2\text{)}.$$

Indem man aus dieser Gleichung $t_1$ oder $s_1$ bestimmt, erhält man:

3) $t_1 = \frac{2rs_1}{\sqrt{4r^2 - s_1^2}}$.

4) $s_1 = \frac{2rt_1}{\sqrt{4r^2 + t_1^2}}$.

### b. Specielle Polygone.

**156.** *Das Sechseck.* — Der Centriwinkel des regelmässigen Sechsecks ist (nach 213) gleich $\frac{2}{3}R$, demnach ist sein Bestimmungsdreieck gleichseitig (103), und es ist

$$s_6 = r.$$

Anm. Construction des regelmässigen Sechsecks in einen Kreis, indem man den Radius sechsmal nach einander als Sehne einträgt.

**157.** *Das Viereck.* — Der Centriwinkel des regelmässigen Vierecks ist gleich $R$, demnach ist sein Bestimmungsdreieck gleichschenklig rechtwinklig, und man hat (362)

$$s_4^2 = 2r^2,$$

oder:

$$s_4 = r\sqrt{2}.$$

Anm. Construction des regelmässigen Vierecks in einen Kreis mittelst zweier auf einander senkrechter Durchmesser.

**158.** *Das Zehneck.* — Berechnung. — Der Centriwinkel des regelmässigen Zehnecks ist gleich $\frac{2}{5}R$, demnach jeder Basiswinkel seines Bestimmungsdreiecks $\frac{4}{5}R$. Halbirt man daher den Basiswinkel $B = 2\alpha$ des Bestimmungsdreiecks $\overline{OAB}$ (Fig. 90), so ist $\overline{OCB}$ gleichschenklig (Umk. z. 98), also

$$OC = CB.$$

Ferner ist $\overline{ABC} \sim \overline{AOB}$ (245), d. h., da $OA = OB$, so ist auch

$$AB = CB.$$

Setzt man nun $AB = CB = OC = x$, so folgt aus der Aehnlichkeit von $\overline{ABC}$ und $\overline{AOB}$:

$$\frac{AC}{AB} = \frac{AB}{AO}, \text{ oder } \frac{r-x}{x} = \frac{x}{r},$$

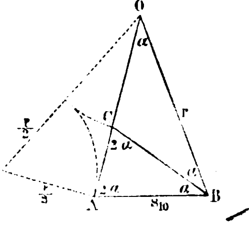
oder:

$$x^2 + rx = r^2.$$

Hieraus findet man, da $x = s_{10}$ ist:

$$s_{10} = \frac{r}{2}(\sqrt{5} - 1).$$

Fig. 90.



Construction. — Aus der Gleichung $x^2 + rx = r^2$ folgt
$$\left(x + \frac{r}{2}\right)^2 = r^2 + \left(\frac{r}{2}\right)^2.$$
Demnach trage man auf der Hypotenuse des aus $r$ und $\frac{r}{2}$ als Katheten construirten rechtwinkligen Dreiecks die kleinere Kathete $\frac{r}{2}$ ab; der Rest ist $s_{10}$.

**159.** Theilung einer Strecke nach dem goldnen Schnitt (stetige Theilung). — Aus der oben gefundenen Proportion
$$\frac{r-x}{x} = \frac{x}{r}$$
folgt, wenn wir die Werthe $r-x = AC$, $x = OC$, $r = OA$ einsetzen:
$$\frac{AC}{OC} = \frac{OC}{OA}.$$
Demnach ist die Strecke $OA$ im Punkte $C$ so getheilt, dass der grössere Theil die mittlere Proportionale ist zwischen dem kleineren Theile und der ganzen Strecke. — Diese Art der Theilung einer Strecke heisst stetige, oder Theilung nach dem goldnen Schnitt.

Die Construction der Seite des regelmässigen Zehnecks aus dem Radius des umbeschriebenen Kreises ist hiernach gleichzeitig die Lösung der

Aufgabe 14. — Eine gegebene Strecke nach dem goldnen Schnitt zu theilen. (S. Fig. 90.)

Umgekehrt kann man die Eigenschaft der Seite des regelmässigen Zehnecks durch den Satz ausdrücken:

368. Die Seite eines regelmässigen Zehnecks ist gleich dem grösseren Abschnitt des stetig getheilten Radius im umbeschriebenen Kreise.

**160.** *Das Fünfzehneck.* — Der Centriwinkel des regelmässigen Fünfzehnecks ist gleich $\frac{4}{15}R$, oder, da $\frac{4}{15} = \frac{2}{3} - \frac{2}{5}$ ist, gleich der Differenz zwischen den Centriwinkeln des regelmässigen Sechsecks und Zehnecks. Die Construction des regelmässigen Fünfzehnecks ist in dem hieraus folgenden Satze enthalten:

369. Die Seite eines regelmässigen Fünfzehnecks ist die dritte Seite des aus den Seiten des regelmässigen Sechs- und Zehnecks gebildeten Dreiecks im umbeschriebenen Kreise.

Die Berechnung der Seite des regelmässigen Fünfzehnecks erfolgt (wenn in dem eben beschriebenen Dreieck $ABC$ die Seite des Sechsecks $AB$, die des Zehnecks $AC$, und der Fusspunkt der aus $C$ auf $AB$ gefällten Höhe $C_1$ ist) mittelst der Formeln:

$$s_{10}^2 = s_6^2 + s_{15}^2 - 2 s_6 \, . \, BC_1 \ (364); \quad \frac{BC_1}{s_{15}} = \frac{\sqrt{r^2 - \frac{s_{10}^2}{4}}}{r},$$

(da $BCC_1 \sim$ dem halben Bestimmungsdreieck des Zehnecks.) Setzt man $s_6 = r$, und zur Abkürzung $s_{15} = x$, $s_{10} = y$, so findet sich:

$$x = \sqrt{r^2 - \frac{y^2}{4}} - \frac{y}{2}\sqrt{3},$$

oder, wenn man für $y$ seinen Werth einsetzt:

$$s_{15} = \frac{r}{4}\left[\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} - \sqrt{15} + \sqrt{3}\right].$$

**161.** ***Abgeleitete Polygone.*** — Mit Hilfe der Sätze 216 und 217 kann man construiren, und mittelst der Formeln 1) und 2) (Nr. 154) berechnen:

| aus dem regelmässigen | die regelmässigen Polygone von | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Sechseck . . . | 3. | 12. | 24. | 48. | ... | |
| Viereck . . . | | 8. | 16. | 32. | ... | |
| Zehneck . . . | 5. | 20. | 40. | 80. | ... | |
| Fünfzehneck . . . | | 30. | 60. | 120. | ... | Ecken. |

Und mit Hilfe der Formel 3) (Nr. 155) kann man aus jedem dieser Polygone, wenn es in den Kreis einbeschrieben ist, das entsprechende, dem Kreise umbeschriebene Polygon berechnen.

Anm. Ausser den oben erwähnten regelmässigen Polygonen lassen sich auf elementarem Wege (d. h. mit Lineal und Cirkel) nur noch diejenigen construiren, deren Seitenzahl von der Form $2^n + 1$, und durch keine andere Zahl theilbar ist. Dies trifft zu für $n = 2, 4, 8$ .., also für die regelmässigen Polygone von 5, 17, 257 ... Seiten. — Für die Seiten anderer regelmässiger Polygone muss man sich mit Näherungswerthen begnügen. So ist die Seite des in den Kreis beschriebenen regelmässigen iebenecks nahezu gleich der halben Seite des regelmässigen Dreiecks.

### c. Der Kreis.

**162.** Durch die oben erwähnten Formeln kann man Seite nd Umfang eines in oder um den Kreis beschriebenen regelmässigen Polygons von beliebig hoher Seitenzahl durch den Radius $r$ oder den Durchmesser $d$ ausdrücken, indem man von inem der vier Hauptpolygone (am einfachsten vom Sechseck)

ausgeht. Nun folgt aus den Sätzen 220, 223; 225, 227, dass die Zahl, welche das Verhältniss des Umfangs eines regelmässigen Polygons zum Durchmesser des umbeschriebenen oder einbeschriebenen Kreises ausdrückt, dem Verhältniss zwischen der Kreislinie und ihrem Durchmesser um so näher kommt, je grösser die Seitenzahl ist. Ferner bleibt die für ein umbeschriebenes Polygon berechnete Verhältnisszahl, wiewohl abnehmend, stets grösser, die für das einbeschriebene Polygon berechnete stets kleiner als das Verhältniss der Kreislinie zum Durchmesser. — Drückt man also alle diese (irrationalen) Verhältnisszahlen durch Decimalbrüche aus, so werden in den Zahlen für den Umfang des einbeschriebenen und den des umbeschriebenen $n$-Ecks um so mehr Anfangsstellen übereinstimmen, je grösser $n$ ist. Diese übereinstimmenden Stellen sind daher genaue Stellen derjenigen Zahl, welche das Verhältniss der Kreislinie zu ihrem Durchmesser ausdrückt. Diese Zahl wird kurz durch den Buchstaben $\pi$ bezeichnet und die Ludolphsche Zahl*) genannt. Sie ist nur in der Form eines unendlichen nicht periodischen Decimalbruchs bekannt, und nur näherungsweise zu bestimmen. Ihre ersten Stellen sind

370. $$\pi = 3{,}1415926535\ldots$$

Anm. Näherungswerthe von $\pi$ in kürzerer Form: 1) 3,1416. — Man kann ferner irgend einen abgekürzten Werth des Decimalbruches als gewöhnlichen Bruch schreiben, diesen in einen Kettenbruch verwandeln und dessen Näherungswerthe bestimmen (Th. I, Nr. 144 u. 148) Solche Näherungswerthe sind 2) der Archimedische,**) $\frac{22}{7}$, und der Metiussche,***) $\frac{355}{113}$. (Man verwandle diese Brüche in Decimalbrüche und überzeuge sich durch Vergleichung mit 370 von dem Grade ihrer Genauigkeit.) — Durch Methoden der Funktionslehre gestaltet sich übrigens die Berechnung von $\pi$ unvergleichlich einfacher, als durch die oben beschriebene, welche z. B. bei Benutzung des 192-Ecks nur die drei ersten Decimalstellen von $\pi$ liefert. Im Ganzen sind 500 Stellen berechnet.

**163.** *Umfang des Kreises.* — Bezeichnet man den Umfang des Kreises mit $u$, so ist nach dem Vorhergehenden $\frac{u}{2r} = \pi$,

371. oder $$u = 2r\pi.$$

Ist $\alpha$ der Centriwinkel eines Bogens $a$, so ist nach 287

372. $$\frac{a}{2r\pi} = \frac{\alpha}{4R}, \text{ oder } a = r\pi \cdot \frac{\alpha}{2R}.$$

---

*) Ludolph v. Ceulen (um 1586) berechnete $\pi$ bis auf 35 Stellen

**) Archimedes aus Syracus, 287—212 fand die nach ihm benannte Verhältnisszahl durch Berechnung des 96-Ecks.

***) Peter Metius, Prof. in Franeker (um 1550).

Anm. Für $r = 1$ ist $u = 2\pi$, also der dem rechten Winkel entsprechende Bogen $\frac{u}{4} = \frac{\pi}{2}$. — Für die Verwandlung der Kreislinie in eine gerade Strecke (Rectification) giebt es verschiedene Näherungsmethoden, die zum Theil auf den oben angeführten Näherungswerthen $\frac{u}{2} = \frac{22}{7} r$ oder $\frac{u}{2} = \frac{355}{113} r$ beruhen. Ihrer Einfachheit und Genauigkeit wegen verdient die folgende (von Ceradini, gegenwärtig in Rom) den Vorzug. Man zieht einen Durchmesser $AB$, dann in $A$ die Tangente, trägt im Mittelpunkt $O$ an $OA$ einen Winkel von $\frac{1}{3} R$ an, dessen Schenkel die Tangente in $C$ schneidet, trägt von $C$ aus über $A$ eine Strecke $CD = 3r$ auf der Tangente ab, und verbindet $D$ mit $B$; dann ist $DB$ nahezu gleich $\frac{u}{2}$ $(= r \,.\, 3{,}14153\ldots)$. — Weniger genau, aber noch einfacher, und gleichzeitig zur näherungsweisen Lösung anderer Aufgaben brauchbar ist die folgende:*) Ueber dem Durchmesser $AB$ (Fig. 91) wird ein gleichseitiges Dreieck construirt ($SAB$). Auf der zu $AB$ parallelen Tangente $A_1B_1$ wird dann von den Verlängerungen der Seiten $SA$ und $SB$ eine Strecke $A_1B_1$ abgeschnitten, welche nahezu gleich $\frac{u}{2}$ ist. — Jede durch $S$ gehende Secante $SX_1$ schneidet einen Bogen $TX$ und eine Strecke $TX_1$ ab, welche um so weniger von einander verschieden sind, je kleiner $X_1T$ ist. — Um hiernach in einen gegebenen Kreis ein annähernd regelmässiges $2n$-Eck zu zeichnen, theile man $A_1B_1$ in $n$ gleiche Theile, verbinde die Theilpunkte mit $S$ und ziehe durch die auf dem Halbkreise $\widehat{ATB}$ liegenden Theilpunkte die Durchmesser. (Genauere Construction durch alleinige Benutzung des an $T$ grenzenden Theilbogens.) Um einen spitzen Winkel $\varphi$ annähernd in $n$ gleiche Theile zu theilen, trage man ihn als Winkel $TOX$ in Fig. 91 ein, und theile die Strecke $X_1T$ in $n$ gleiche Theile. Der nach dem zunächst an $T$ liegenden Theilpunkte gehende Radius schneidet am genausten $\frac{1}{n}$ des gegebenen Winkels ab. (Wie verfährt man, wenn der gegebene Winkel $> R$ ist?)

Fig. 91.

**164.** *Flächenraum des Kreises.* — Nach 357 ist die Fläche eines dem Kreise umbeschriebenen Polygons gleich dem Product aus Umfang und halbem Radius. Betrachtet man die Kreislinie (nach 222) selbst als regelmässiges Polygon, so ist ihr Umfang (371) gleich $2r\pi$, der Radius gleich $r$, mithin der Flächenraum des Kreises

$$F = 2r\pi \,.\, \frac{r}{2} = r^2\pi. \qquad 373.$$

*) Schlömilch's Ztschr. Bd. 22, S. 339.

Ist $\alpha$ der Centriwinkel eines Sectors $s^2$, so ist nach 287

$$\frac{s^2}{r^2\pi} = \frac{\alpha}{4R}, \text{ oder } s^2 = r^2\pi \cdot \frac{\alpha}{4R}.$$

Setzt man hierin aus 372 den Werth $r\pi \cdot \frac{\alpha}{2R} = a$ ein, so folgt:

$$s^2 = \frac{ar}{2},$$

374. d. h.: **Die Fläche eines Sectors ist gleich dem Product aus dem Bogen und dem halben Radius.**

Anm. Ein specieller Fall von 374 ist 373. Mit Berücksichtigung von 354 lässt sich ein Dreieck angeben, welchem der Sector oder der ganze Kreis flächengleich ist. — Die Fläche eines Segments wird als Differenz von Sector und Dreieck berechnet.

# Anhang.

## Die Curven zweiter Ordnung.

**165.** *Vorbemerkung.* — In der elementaren Geometrie betrachtet man nur diejenigen Gebilde (ausser dem Punkte), welche durch eine einfache Bewegung entstehen (vgl. Einl. d), nämlich die gerade und die Kreislinie. Zwar ist die Bewegung des Punktes, welcher die letztere beschreibt, eine zusammengesetzte, aber die Strecke, deren Endpunkt dieser Punkt ist, führt durch ihre Drehung eine einfache Bewegung aus. Man sagt daher auch, elementar seien diejenigen Gebilde und Constructionen, welche durch Lineal und Cirkel hergestellt werden können.

Alle anderen Linien (Curven) ausser der Geraden und der Kreislinie entstehen durch eine zusammengesetzte Bewegung und unterscheiden sich durch das Gesetz dieser Bewegung. Von diesem Gesetze sei hier nur bemerkt, dass es sich durch eine Gleichung mit 2 Unbekannten ausdrücken lässt, und dass die Curve algebraisch oder transcendent genannt wird, je nachdem diese Gleichung algebraisch oder transcendent ist. (Vgl. Th. I, Nr. 91.) Man theilt die algebraischen Curven ein nach der Zahl der Punkte, in welchen sie von einer Geraden geschnitten werden können (oder auch nach der Zahl der Tangenten, die man von einem Punkte an sie ziehen kann), und sagt, eine Curve sei von der $n^{\text{ten}}$ Ordnung, wenn sie von einer Geraden in $n$ Punkten geschnitten werden kann (von der $n^{\text{ten}}$ Klasse, wenn von einem Punkte $n$ Tangenten an sie gezogen rden können). Hiernach ist die Gerade eine Curve $1^{\text{ter}}$ Ordng (der Punkt, als Grenzfall des Kreises betrachtet, eine urve $1^{\text{ter}}$ Klasse), die Kreislinie eine Curve $2^{\text{ter}}$ Ordnung (und er Klasse).

Es sollen nun im Folgenden die übrigen Curven $2^{\text{ter}}$ Ordng nach ihrer Entstehung und ihren wichtigsten Eigenschaften betrachtet werden. Zu diesem Zwecke ist das Gesetz,

welches der Entstehung der Kreislinie zu Grunde lag, zu verallgemeinern.

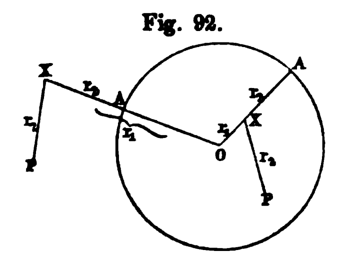
**166.** *Allgemeines Bewegungsgesetz der Curven 2ter Ordnung.* — Die Kreislinie war durch das Gesetz bestimmt, dass der Abstand eines ihrer Punkte ($X$) von einem festen Punkte $O$ eine Strecke von bestimmter Grösse ($r$) sei.

Dieses Gesetz wird verallgemeinert, wenn man einen zweiten festen Punkt $P$ annimmt, und bestimmt, dass Summe oder Differenz der Abstände ($r_1$ und $r_2$) eines Punktes ($X$) von den beiden festen Punkten ($O$ und $P$) eine Strecke von bestimmter Grösse ($r$) sei. Dieses Gesetz wird also lauten

$$r_1 \pm r_2 = r. \quad (OX \pm XP = r.)$$

(Fallen die Punkte $O$ und $P$ zusammen, so ist $r_1 = r_2$, und für das obere Zeichen $2r_1 = r$, oder $r_1 = \frac{r}{2}$. In diesem Falle ist also der geometrische Ort des Punktes $X$ wieder eine Kreislinie. Und die Kreislinie ist hierdurch als specieller Fall derjenigen Curve gekennzeichnet, welche der Punkt $X$ bei dem Bewegungsgesetze $r_1 + r_2 = r$ beschreibt.)

Fig. 92.




Beschreibt man um $O$ eine Kreislinie mit dem Radius $r$, welche die Strecke $OX$ oder ihre Verlängerung in $A$ schneidet (Fig. 92), so ist $XA = r_2 = XP$. Man kann also die Lage des Punktes $X$ auch durch das Gesetz bestimmen, dass die Abstände desselben von einem festen Punkte $P$ und einer festen Kreislinie (um $O$ mit $r$ beschrieben) einander gleich seien. In der Gleichung $r_1 \pm r_2 = r$ gilt das obere oder das untere Zeichen, je nachdem $P$ innerhalb oder ausserhalb des aus $O$ mit $r$ beschriebenen Kreises liegt. (Der Uebergangsfall, wobei $P$ auf der Kreislinie liegt, giebt die durch $O$ und $P$ bestimmte Gerade als geometrischen Ort des Punktes $X$.)

## 1) Bewegungsgesetz $r_1 + r_2 = r$. — Die Ellipse.

**167.** *Entstehung der Ellipse.* — Wenn eine Strecke u einen ihrer Endpunkte $O$ eine ganze Umdrehung macht, u 'n auf ihr liegender Punkt $X$ sich inzwischen so auf ihr b

wegt, dass er von einer aus $O$ beschriebenen Kreislinie und einem innerhalb derselben liegenden Punkte $P$ stets gleichweit entfernt ist, so beschreibt dieser Punkt $X$ eine krumme Linie, welche Ellipse genannt wird.

Jeder Richtung der sich drehenden Geraden entspricht ein Punkt $A$ der Kreislinie und ein Punkt $X$ der Ellipse. Zu jedem Punkte der Kreislinie gehört also ein Punkt der Ellipse. Wir nennen daher diese Kreislinie den Leitkreis der Ellipse, und den Punkt $A$ den Leitpunkt zu $X$.

Fig. 93.

Da $XA = XP$, so geht die in der Mitte ($B$) von $AP$ auf dieser Strecke errichtete Senkrechte durch $X$ (119). Da $X$ auch auf $OA$ liegt, so kann man hiernach zu jedem Punkte $A$ der Kreislinie den zugehörigen Punkt der Ellipse $X$ construiren, indem man $A$ mit $O$ und $P$ verbindet, und in der Mitte von $AP$ die Senkrechte errichtet, welche $OA$ in $X$ schneidet.

Kehrt der Punkt $A$ nach einer ganzen Umdrehung in seine frühere Lage zurück, so thut $X$ dasselbe. Und da aus dem Gesetze $r_1 + r_2 = r$ folgt, dass $r_1$ und $r_2 < r$, also kein Punkt der Ellipse um mehr als $r$ von $O$ und $P$ entfernt ist, so ist die Ellipse ebenso wie die Kreislinie eine im Endlichen bleibende, in sich zurückkehrende Curve.

**168.** *Secanten.* — Gelangt der Punkt $A$ durch eine halbe Umdrehung der Geraden in die Lage $A_2$, so erhält man einen 'sprechenden Punkt der Ellipse ($X_2$), welcher auf $OA_2$ liegt. ıher schneidet jede durch $O$ gezogene Gerade die Ellipse in ei Punkten. Allgemein:

Die Ellipse wird von jeder Geraden, die durch 375.
nen innerhalb ihres Umfanges liegenden Punkt ht, in zwei Punkten geschnitten.

Die durch $O$ und $P$ gehende Sehne der Ellipse (deren dpunkte $S$ und $S_1$ sind) heisst die grosse Axe.

Vervollständigt man das Dreieck $\overline{OXP}$ zum Parallelogramm $\overline{OXPX_1}$, so ist (nach 126)

$$OX_1 + X_1P = OA = r.$$

Demnach ist auch $X_1$ ein Punkt der Ellipse. (Der zugehörige Kreispunkt $A_1$ ist der Schnittpunkt der verlängerten Strecke $OX_1$ mit der Kreislinie.) Fällt insbesondere $X$ mit $S$, und in Folge dessen $X_1$ mit $S_1$ zusammen, so geht die Beziehung $OX_1 = PX$ über in

$$OS_1 = PS.$$

Da der Mittelpunkt ($M$) des Parallelogramms gleichzeitig Mitte der Strecke $OP$, also für jeden Punkt $X$ der Ellipse Mittelpunkt des Parallelogramms und ausserdem nach der letzten Formel auch Mitte der grossen Axe ist, so hat man den Satz:

376. Jede durch den Mittelpunkt der grossen Axe gehende Sehne der Ellipse wird in diesem Punkte halbirt.

Der Mittelpunkt der grossen Axe heisst demnach Mittelpunkt, und jede durch ihn gehende Sehne Durchmesser der Ellipse.

Wie die Punkte $X$ und $X_1$, so kann man nun auch die Punkte $O$ und $P$ mit einander vertauschen, da sie, wie jene, symmetrisch zu $M$ liegen. Dieselbe Ellipse kann daher auch mittelst eines aus $P$ mit $r$ beschriebenen Leitkreises construirt werden. Die Punkte $O$ und $P$ führen nun den gemeinsamen Namen Brennpunkte, und die aus beliebigen Punkten der Ellipse nach einem der Brennpunkte gezogenen Strecken: Leitstrahlen (Radien Vectoren). Das Bewegungsgesetz der Ellipse lässt sich hiernach auch so aussprechen:

377. Für jeden Punkt der Ellipse hat die Summe der aus ihm gezogenen Leitstrahlen denselben Werth.

Anm. Auf dieser Eigenschaft beruht die sogenannte Fadenconstruction der Ellipse.

Ferner hat man den Satz:

378. Die aus den Endpunkten eines Durchmessers gezogenen Leitstrahlen bilden ein Parallelogramm.

Für den Punkt $S$ geht die Formel $XA = XP$ über in

$$ST = SP;$$

379. d. h.: Jeder Endpunkt der grossen Axe liegt in der Mitte zwischen seinem Leitpunkt und demjenigen Brennpunkte, welcher nicht Mittelpunkt des Leitkreises ist.

Ist $S_1$ der zweite Endpunkt der grossen Axe, und $T_1$ sein Leitpunkt, so ist nach 379

$$S_1T_1 = S_1P.$$

Dies zur vorigen Formel addirt, giebt:

$$ST + S_1T_1 = SP + S_1P$$

oder:
$$2r - SS_1 = SS_1,$$

oder:
$$r = SS_1,$$

d. h.: Die grosse Axe der Ellipse ist gleich dem Radius des Leitkreises oder gleich der Summe der beiden Leitstrahlen eines Punktes der Ellipse. 380.

Der auf der grossen Axe senkrecht stehende Durchmesser der Ellipse heisst die kleine Axe.

Anm. Ist $X$ Endpunkt der kleinen Axe, so ist das Dreieck $OPX$ bei $P$ rechtwinklig.

**169.** ***Eine Tangente.*** — Aus der oben gegebenen Construction eines Punktes der Ellipse folgt, dass diese Curve der Weg des Schnittpunktes der durch die Strecken $OA$ und $BX$ bestimmten Geraden ist. Da aus jeder Strecke $OA$ nur eine Strecke $BX$ und ein Punkt $X$ hervorgeht, so schneiden auch die Strecken $OA$ und $BX$ die Ellipse nur in dem einen Punkte $X$. Bei der Umdrehung um $O$ kommt aber $OA$ zweimal in dieselbe Gerade zu liegen (nämlich das zweitemal nach einer Drehung um $2R$), während die Strecke $BX$, welche sich um den ausserhalb liegenden Punkt $O$ dreht, erst nach einer ganzen Umdrehung in die ursprüngliche Gerade zurückkehrt. Daher hat die durch $OA$ bestimmte Gerade (wie schon bekannt) zwei Punkte, dagegen die durch $BX$ bestimmte Gerade nur einen Punkt mit der Ellipse gemeinsam, ist also Tangente an dieselbe.

Wie der Punkt $X$ bei Umdrehung der Strecke $OA$ die Ellipse beschreibt, so die Tangente $BX$ die ganze Fläche der Ebene mit Ausnahme der von der Ellipse eingeschlossenen Figur. Man kann daher die Tangente ebenso wie den Punkt [a]s das die Ellipse erzeugende Gebilde ansehen, und sagt, dass [di]e Tangente in ihren verschiedenen Richtungen die Ellipse [u]mhüllt. Man sagt von einem Punkte, er liege auf der convexen oder concaven Seite der Ellipse, je nachdem er von [ir]gend einer Tangente getroffen wird oder nicht. Man kann [al]so nur von einem Punkte, welcher auf der convexen Seite [de]r Ellipse liegt, eine Tangente an diese Curve ziehen.

Da die Tangente *BX* den Winkel *AXP* halbirt, so ist auch *CXO* = *BXP*, und die in *X* auf der Tangente errichtete Senkrechte halbirt den Winkel *OXP*. Also:

381. Die Tangente in einem Punkte der Ellipse steht senkrecht auf der Halbirungslinie des Winkels der zugehörigen Leitstrahlen, und bildet mit diesen letzteren gleiche Winkel.

Hieraus folgt weiter:

382. Die Tangente in einem Endpunkte der kleinen Axe ist der grossen Axe parallel, und umgekehrt.

Da *OM* = *MP* (Fig. 93) und *PB* = *BA*, so ist *MB* ‖ *OA*, und aus der Aehnlichkeit der Dreiecke $\overline{OAP}$ und $\overline{MBP}$ folgt, dass *MB* = $\frac{1}{2}$*OA*. Da dies für jede Lage der Punkte *A* und *B* gilt, und da *B* der Fusspunkt der aus dem Brennpunkte *P* auf die Tangente gefällten Senkrechten ist, so hat man den Satz:

383. Die Fusspunkte der aus einem Brennpunkte der Ellipse auf beliebige Tangenten gefällten Senkrechten liegen auf der aus dem Mittelpunkte der Ellipse mit der halben grossen Axe beschriebenen Kreislinie.

Diese Kreislinie geht durch die Endpunkte der grossen Axe, und hat dort mit der Ellipse gemeinsame Tangenten. Man sagt daher, dass die Kreislinie und die Ellipse sich in diesen Punkten berühren.

Ist *L* ein beliebiger Punkt der Tangente *BC*, so ist das Dreieck $\overline{LBP}$ rechtwinklig, also liegt *B* auf der über *LP* als Durchmesser beschriebenen Kreislinie, und ist Schnittpunkt dieser und der über $SS_1$ als Durchmesser beschriebenen Kreislinie. Im Allgemeinen also liefert ein Punkt zwei Tangenten an die Ellipse, ebenso wie reciprok eine Gerade zwei Durchschnittspunkte mit derselben.

Anm. Hieraus folgt die Construction der Tangenten aus einem beliebigen Punkte *L* an die Ellipse, da der Punkt *B*, wie eben gezeigt, durch zwei geometrische Oerter bestimmt ist.

Rückt *L* in unendliche Ferne, so wird *PL* der Tangen[te] parallel, und die über *PL* beschriebene Kreislinie geht über die durch *P* senkrecht auf *PL* gezogene Gerade.

Anm. Durch diese Veränderung geht die vorige Aufgabe in f[ol]gende über: An eine Ellipse die Tangenten zu ziehen, die einer gegeben[en] Richtung parallel sind.

Ist $X_1$ der Endpunkt des durch *X* gezogenen Durchmesse[rs], so sind die Halbirungslinien der Winkel *OXP* und $OX_1P$ par[allel]

lel, mithin auch die auf diesen Linien senkrecht stehenden Tangenten, und man hat den Satz:

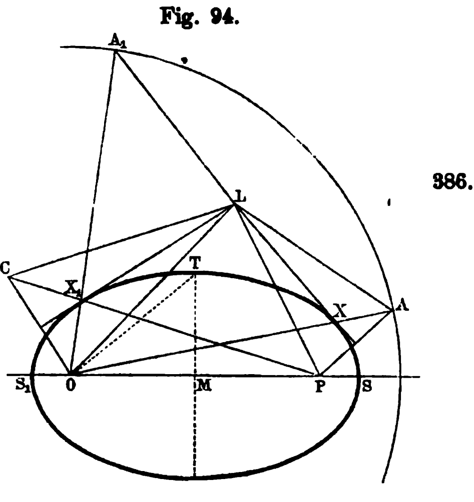
Die beiden in den Endpunkten eines Durchmessers gezogenen Tangenten sind parallel. 384.

Nach 383 liegen die Fusspunkte $B$, $C$, $B_1$, $C_1$ der aus den Brennpunkten auf diese Tangenten gefällten Senkrechten auf der die Ellipse in $S$ und $S_1$ berührenden Kreislinie. Da nun $BC_1$ stets eine Sehne derselben ist, so hat das Product $PB.PC_1$ für jeden Punkt $B$ der Kreislinie denselben Werth. Nun schneidet die durch den Mittelpunkt des Rechtecks $\overline{BCB_1C_1}$ gezogene Gerade $OP$ die Gegenseiten $B_1C$ und $BC_1$ so, dass $OC = PC_1$ ist (134). Also hat auch $PB.OC$ für jede Tangente denselben Werth; d. h.:

Das Product der von den Brennpunkten auf eine beliebige Tangente gefällten Senkrechten hat stets denselben Werth. 385.

**170.** *Zwei Tangenten.* — Es seien $X$ und $X_1$ (Fig. 94), die Berührungspunkte der aus $L$ an die Ellipse gezogenen Tangenten, $A$ der Leitpunkt von $X$ in dem aus $P$, und $C$ der Leitpunkt von $X_1$ in dem aus $O$ gezogenen Leitkreise. Dann ist $OA = PC = r$, $LO = LC$, $LA = LP$, also Dreieck $\overline{OLA} \cong \overline{CLP}$, Winkel $OLA = CLP$, und, durch Subtraction von $OLP$, $PLA = CLO$, $PLX = OLX_1$; d. h.:

Fig. 94.




Die von einem Punkte an die Ellipse gezogenen Tangenten bilden mit den nach den Brennpunkten gezogenen Geraden gleiche Winkel. 386.

Specieller Fall. — [illegible] $LX = R$. Dann ist auch [illegible] $A = R$, mithin $OL^2 +$ [illegible]$^2 = OA^2$, oder:

$$LO^2 + LP^2 = r^2.$$

N[illegible]n ist nach 367 der geometrische Ort des Punktes $L$ die a[illegible] $M$ mit $ML = \sqrt{\frac{r^2}{2} - OM^2}$ beschriebene Kreislinie. Setzt

man die halbe grosse Axe gleich $a$, die halbe kleine Axe gleich $b$, so ist (380) $2a = r$, $OT = TP = a$, $OM^2 = a^2 - b^2$, also $ML = \sqrt{a^2 + b^2} = TS$. Man hat also den Satz:

387. Der geometrische Ort eines Punktes, von dem aus zwei auf einander senkrecht stehende Tangenten an die Ellipse gehen, ist die aus dem Mittelpunkte der Ellipse mit der Entfernung der Endpunkte der beiden Axen beschriebene Kreislinie.

Ist $A_1$ der Leitpunkt von $X_1$ in dem aus $O$ beschriebenen Leitkreise, so ist $LA = LP$ (120), und aus demselben Grunde $LA_1 = LP$, mithin $LA_1 = LA$; ferner $OL = OL$, $OA_1 = OA$, $\overline{OLA_1} \cong \overline{OLA}$, und Winkel $LOX = LOX_1$, d. h.:

388. Gehen von einem Punkte zwei Tangenten an die Ellipse, so bildet jeder Leitstrahl des Punktes gleiche Winkel mit den nach demselben Brennpunkte gezogenen Leitstrahlen der Berührungspunkte.

Specieller Fall. — $X_1OX = 2R$. Dann ist $LOA = R$, mithin: $LA^2 - OL^2 = OA^2$, oder:

$$LP^2 - OL^2 = r^2.$$

Nun ist nach 365 der geometrische Ort des Punktes $L$ die auf der Verlängerung von $OP$ in der Entfernung $OK = \frac{OP^2 - r^2}{2OP}$ von $O$ oder $P$ errichtete Senkrechte. Ferner ist, wenn man den halben Abstand der Brennpunkte $OM$ gleich $c$ setzt, $OP = 2c$, ausserdem $r = 2a$; also $OK = \frac{c^2 - a^2}{c} = -\frac{b^2}{c}$. Man hat also den Satz:

389. Der geometrische Ort eines Punktes, von dem aus zwei Tangenten an die Ellipse gehen, deren Berührungspunkte mit einem Brennpunkte in gerader Linie liegen, ist die auf der Verlängerung der grossen Axe in der Entfernung $\frac{b^2}{c}$ von diesem Brennpunkte errichtete Senkrechte.

Diese Senkrechte heisst die zu dem Brennpunkte gehörige Directrix der Ellipse. Jedem Brennpunkte entspricht also eine Directrix. Die durch den Brennpunkt gehende, der Directrix parallele Sehne heisst der Parameter der Ellipse.

Wenn die in $X$ gezogene Tangente die beiden Directri-

linien in $L$ und $L_1$ schneidet, so ist $LOX = L_1PX = R$, und $LXO = L_1XP$ (381), also Dreieck $\overline{LOX} \sim \overline{L_1PX}$, und

$$\frac{OX}{PX} = \frac{LX}{L_1X}.$$

Fig. 95.

Wenn ferner die durch $X$ zur grossen Axe gezogene Parallele die beiden Directrixlinien in $H$ und $H_1$ schneidet, so ist Dreieck $\overline{HLX} \sim \overline{H_1L_1X}$, also:

$$\frac{LX}{L_1X} = \frac{HX}{H_1X},$$

folglich durch Vergleichung mit der vorigen Proportion:

$$\frac{OX}{PX} = \frac{HX}{H_1X}.$$

Hieraus folgt weiter:

$$\frac{OX + PX}{PX} = \frac{HX + H_1X}{H_1X}, \text{ oder } \frac{OA}{PX} = \frac{HH_1}{H_1X},$$

oder:

$$\frac{XP}{XH_1} = \frac{OA}{HH_1},$$

d. h.: Für jeden Punkt der Ellipse ist das Verhältniss seiner Entfernungen von einem Brennpunkt und der zugehörigen Directrix gleich dem Verhältniss zwischen der grossen Axe und der Entfernung der beiden Directrixlinien. 390.

Anm. Welchen Satz über den geometrischen Ort von $X$ (als Mittelpunkt einer Kreislinie) liefert die Umkehrung von 390?

Die Entfernung der Directrixlinien ist gleich $KO + OP +$ $PK$ $= \frac{2b^2}{c} + 2c = \frac{2(b^2 + c^2)}{c} = \frac{2a^2}{c}$. Demnach ist das eben ge annte Verhältniss $\frac{XP}{XH_1} = \frac{XO}{XH} = \frac{c}{a}$.

Da $XX_1 \perp LO$, so sind die Berührungspunkte $Y$ und $Y_1$ de aus $K$ an die Ellipse gezogenen Tangenten die Endpunkte

des Parameters. Ferner ist die Entfernung des Punktes $Y$ von der zu $O$ gehörigen Directrix gleich $OK$. Also ist nach der letzten Formel:

$$\frac{YO}{OK} = \frac{c}{a}; \quad YO = \frac{b^2}{c} \cdot \frac{c}{a} = \frac{b^2}{a}.$$

Die Grösse des Parameters $YY_1$ ist also $\frac{2b^2}{a}$

Anm. Die Grösse $\frac{c}{2a}$, d. h. das Verhältniss des Abstandes der Brennpunkte zur grossen Axe, heisst die Excentricität der Ellipse.

**171.** *Specielle Fälle der Ellipse.* — 1) Rückt $P$ nach $O$, während $r$ unverändert bleibt, so wird $r_1 = r_2$. Das Bewegungsgesetz der Ellipse heisst dann $2r_1 = r$. Demnach geht die Ellipse über in den aus $O$ mit $r$ beschriebenen Leitkreis. Die Kreislinie kann hiernach als Ellipse mit zusammenfallenden Brennpunkten betrachtet werden.

2) Entfernt sich $P$ von $O$, bis $OP = r$ ist, so ist in dem Dreieck $\overline{OXP}$ $OX + XP = OP$. Demnach ist der geometrische Ort von $X$ die Strecke $OP$, und die Ellipse geht über in diese, aus zwei zusammenfallenden Strecken bestehende Strecke.

3) Rücken die Brennpunkte einer Ellipse vom Mittelpunkte aus nach beiden Seiten in unendliche Entfernung, während die kleine Axe unverändert bleibt, so geht die Ellipse über in das in den Endpunkten der kleinen Axe senkrecht zu derselben stehende Parallelenpaar.

Alle drei besonderen Arten der Ellipse zeigen noch die den Curven zweiter Ordnung eigenthümliche Eigenschaft, von einer Geraden in 2 Punkten, bezw. einem Doppelpunkte, geschnitten zu werden.

## 2) Bewegungsgesetz $r_1 - r_2 = r$. — Die Hyperbel.

**172.** *Entstehung der Hyperbel.* — Wenn eine Gerade um einen ihrer Punkte $O$ eine ganze Umdrehung macht, und e auf ihr liegender Punkt $X$ sich inzwischen so auf ihr bewe dass er von einer aus $O$ beschriebenen Kreislinie und ein ausserhalb derselben liegenden Punkte $P$ stets gleichw entfernt ist, so beschreibt dieser Punkt $X$ eine krumme Lin welche Hyperbel genannt wird.

Jeder Richtung der sich drehenden Geraden entspric ein Punkt $A$ der Kreislinie und ein Punkt $X$ der Hyperb

Zu jedem Punkte der Kreislinie gehört also ein Punkt der Hyperbel. Wir nennen daher diese Kreislinie den **Leitkreis** der Hyperbel, und den Punkt $A$ den **Leitpunkt** zu $X$.

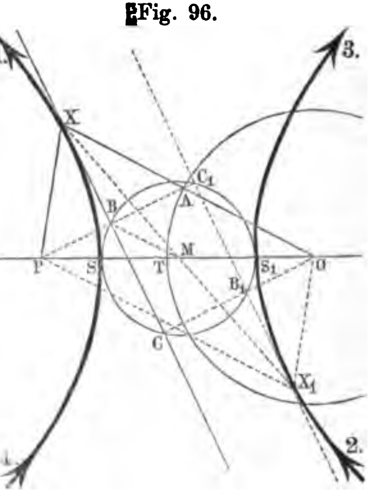



Fig. 96.

Da $XA = XP$, so geht die in der Mitte ($B$) von $AP$ auf dieser Strecke errichtete Senkrechte durch $X$. Da $X$ auch auf der Geraden $OA$ liegt, so kann man hiernach zu jedem Punkte $A$ der Kreislinie den zugehörigen Punkt der Hyperbel $X$ construiren, indem man $A$ mit $O$ und $P$ verbindet, und in der Mitte von $AP$ die Senkrechte errichtet, welche die Verlängerung von $OA$ in $X$ schneidet.

Kehrt der Punkt $A$ nach einer ganzen Umdrehung in seine frühere Lage zurück, so thut $X$ dasselbe. Da aber in der Formel $r_1 - r_2 = r$ die beiden Strecken $r_1$ und $r_2$ ins Unendliche wachsen können, ohne dass ihre Differenz sich ändert, so folgt, dass die Curve sich ins Unendliche erstreckt.

Soll $X$ ein unendlich ferner Punkt werden (in Fig. 96 nach 1. hin vorrücken), so muss $XP \parallel XO$ werden, und da Winkel $XAP = XPA$, so müssen diese Winkel Rechte werden, d. h. $PA \perp OA$ stehen. Folglich muss $PA$ Tangente an den Leitkreis sein. Man hat also die Sätze:

Der Leitpunkt eines unendlich fernen Punktes der Hyperbel ist der Berührungspunkt einer von dem festen Punkte ($P$) an den Leitkreis gezogenen Tangente. 391.

Jede Hyperbel hat zwei unendlich ferne Punkte. 392.

Nachdem der Schnittpunkt der Geraden $XP$ und $XO$ nach 1. hin in unendliche Entfernung gerückt ist, kommt er von entgegengesetzter Seite her (vgl. Nr. 58), nämlich von 2. her, aus unendlicher Entfernung wieder heran und beschreibt einen, von dem ersten völlig getrennten, Zweig der Curve. Auf diesem rückt er (nach 3. hin) abermals in unendliche Entfernung (nämlich dann, wenn $A$ auf dem Leitkreise in den zweiten Berührungspunkt der aus $P$ gezogenen Tangenten tritt), und

kommt (von 4. her) auf dem ersten Zweige aus unendlicher Entfernung wieder in die ursprüngliche Lage zurück.

Die Hyperbel ist also eine zweimal durch einen unendlich fernen Punkt gehende und auf diesem Wege in sich zurückkehrende Curve. Sie besteht aus zwei Zweigen, welche bezw. den Gesetzen $r_1 - r_2 = +r$ und $r_1 - r_2 = -r$ entsprechen, während für die unendlich fernen Punkte, welche die Grenzen beider Zweige bilden, gleichzeitig $r_1 - r_2 = \pm r$ ist.

Anm. Ebenso kann man von der Geraden sagen, sie sei eine Curve, welche einmal durch einen unendlich fernen Punkt geht und auf diesem Wege in sich zurückkehrt.

**173.** *Secanten.* — Gelangt der Punkt $A$ durch eine halbe Umdrehung der Geraden in die Lage $A_2$, so erhält man einen entsprechenden Punkt der Hyperbel ($X_2$), welcher auf $OA_2$ liegt. Daher schneidet jede durch $O$ gezogene Gerade die Hyperbel in zwei Punkten. Allgemein:

393. Die Hyperbel wird von jeder Geraden, die durch einen mit $O$ auf derselben Seite der Curve liegenden Punkt geht, in zwei Punkten geschnitten.

Anm. Wann liegen diese Punkte auf demselben, wann auf verschiedenen Zweigen der Hyperbel?

Die durch $O$ und $P$ gehende Sehne der Hyperbel (deren Endpunkte $S$ und $S_1$ sind) heisst die Hauptaxe.

Vervollständigt man das Dreieck $\overline{OXP}$ zum Parallelogramm $\overline{OXPX_1}$, so ist

$$PX_1 - OX_1 = OA = r.$$

Demnach ist auch $X_1$ ein Punkt der Hyperbel. (Der zugehörige Kreispunkt $A_1$ ist der Schnittpunkt der rückwärts verlängerten Strecke $OX_1$ mit der Kreislinie. Fällt insbesondere $X$ mit $S$, und in Folge dessen $X_1$ mit $S_1$ zusammen, so geht die Beziehung $OX_1 = PX$ über in

$$OS_1 = PS.$$

Da der Mittelpunkt ($M$) des Parallelogramms gleichzeitig Mitte der Strecke $OP$, also für jeden Punkt $X$ der Hyperbel Mitte des Parallelogramms, und ausserdem nach der letzten Forme auch Mitte der Hauptaxe ist, so hat man den Satz:

394. Jede durch den Mittelpunkt der Hauptaxe gehend Sehne der Hyperbel wird in diesem Punkte halbirt

Der Mittelpunkt der Hauptaxe heisst demnach Mittelpunkt, und jede durch ihn gehende Sehne Durchmesse der Hyperbel.

Wie die Punkte $X$ und $X_1$, so kann man nun auch die Punkte $O$ und $P$ mit einander vertauschen, da sie, wie jene, symmetrisch zu $M$ liegen. Dieselbe Hyperbel kann daher auch mittelst eines aus $P$ mit $r$ beschriebenen Leitkreises construirt werden. Die Punkte $O$ und $P$ führen nun den gemeinsamen Namen Brennpunkte, und die aus beliebigen Punkten der Hyperbel nach einem der Brennpunkte gezogenen Strecken: Leitstrahlen (Radien Vectoren). Das Bewegungsgesetz der Hyperbel lässt sich hiernach auch so aussprechen:

Für jeden Punkt der Hyperbel hat die Differenz 395.
der aus ihm gezogenen Leitstrahlen denselben Werth.

Ferner hat man den Satz:

Die aus den Endpunkten eines Durchmessers ge- 396.
zogenen Leitstrahlen bilden ein Parallelogramm.

Für den Punkt $S$ geht die Formel $XA = XP$ über in

$$ST = SP;$$

d. h.: Jeder Endpunkt der Hauptaxe liegt in der Mitte 397.
zwischen seinem Leitpunkt und demjenigen Brennpunkte, welcher nicht Mittelpunkt des Leitkreises ist.

Ist $S_1$ der zweite Endpunkt der grossen Axe, und $T_1$ sein Leitpunkt, so ist nach 397

$$S_1T_1 = S_1P.$$

Von dieser Formel die vorige subtrahirt, giebt:

$$S_1T_1 - ST = S_1P - SP,$$

oder:
$$2r - SS_1 = SS_1,$$

oder:
$$r = SS_1;$$

d. h.: Die Hauptaxe der Hyperbel ist gleich dem Ra- 398.
dius des Leitkreises oder gleich der Differenz der beiden Leitstrahlen eines Punktes der Hyperbel.

Die in der Mitte der Hauptaxe senkrecht stehende Gerade heisst die Nebenaxe der Hyperbel.

**174.** *Eine Tangente.* — Aus der oben gegebenen Construction eines Punktes der Hyperbel folgt, dass diese Curve d[...] Weg des Schnittpunktes der durch die Strecken $OA$ und $B$[...] bestimmten Geraden ist. Man gelangt nun durch eine w[...]tliche Wiederholung der an entsprechender Stelle bei der E[...]pse angestellten Betrachtung zu dem Resultat, dass die d[...]ch $BX$ bestimmte Gerade nur einen Punkt mit der Hyperb[...] gemeinsam hat. Sie ist also Tangente an dieselbe.

Wie der Punkt $X$ bei Umdrehung der Strecke $OA$ die

Hyperbel beschreibt, so die Tangente *BX* die ganze Fläche der Ebene, mit Ausnahme der beiden von den Hyperbelzweigen begrenzten Räume, in welchen die Brennpunkte liegen. Man kann daher die Tangente ebenso wie den Punkt als das die Hyperbel erzeugende Gebilde ansehen, und sagen, dass die Tangente in ihren verschiedenen Richtungen die Hyperbel umhüllt. Man sagt von einem Punkte, er liege auf der convexen oder concaven Seite der Hyperbel, je nachdem er von irgend einer Tangente getroffen wird oder nicht. Man kann also nur von einem Punkte, welcher auf der convexen Seite der Hyperbel liegt, eine Tangente an diese Curve ziehen.

Da die Tangente *BX* den Winkel *AXP* halbirt, so hat man den Satz:

399. Die Tangente in einem Punkte der Hyperbel halbirt den Winkel der zugehörigen Leitstrahlen.

Hieraus folgt weiter:

400. Die Tangente in einem Endpunkte der Hauptaxe ist der Nebenaxe parallel.

Da $OM = MP$ (Fig. 96) und $AB = BP$, so ist $MB \parallel OA$, und aus der Aehnlichkeit der Dreiecke $\overline{OAP}$ und $\overline{MBP}$ folgt, dass $MB = \frac{1}{2} OA$. Da dies für jede Lage der Punkte *A* und *B* gilt, und da *B* der Fusspunkt der aus dem Brennpunkte *P* auf die Tangente gefällten Senkrechten ist, so hat man den Satz:

401. Die Fusspunkte der aus einem Brennpunkte der Hyperbel auf beliebige Tangenten gefällten Senkrechten liegen auf der aus dem Mittelpunkte der Hyperbel mit der halben grossen Axe beschriebenen Kreislinie.

Diese Kreislinie geht durch die Endpunkte der Hauptaxe, und hat dort mit der Hyperbel gemeinsame Tangenten. Man sagt daher, dass die Kreislinie und die Hyperbel sich in diesen Punkten berühren.

Ist *L* ein beliebiger Punkt der Tangente *BC*, so ist das Dreieck $\overline{LBP}$ rechtwinklig, also liegt *B* auf der über *LP* als Durchmesser beschriebenen Kreislinie, und ist Schnittpunkt dieser und der über $SS_1$ als Durchmesser beschriebenen Kreislinie. Im Allgemeinen also liefert ein Punkt zwei Tangenten an die Hyperbel, ebenso wie reciprok eine Gerade zwei Durchschnittspunkte mit derselben.

Anm. Hieraus folgt die Construction der Tangenten aus einem beliebigen Punkte *L* an die Hyperbel, da der Punkt *B*, wie eben gezeigt, durch zwei geometrische Oerter bestimmt ist.

Rückt $L$ in unendliche Ferne, so wird $PL$ der Tangente parallel, und die über $PL$ beschriebene Kreislinie geht über in die durch $P$ senkrecht auf $PL$ gezogene Gerade.

Anm. Durch diese Veränderung geht die vorige Aufgabe in folgende über: An eine Hyperbel die Tangenten zu ziehen, die einer gegebenen Richtung parallel sind. Da $P$ ausserhalb des Berührungskreises liegt, so wird die in $P$ auf $PL$ errichtete Senkrechte die Kreislinie nicht immer schneiden; die Aufgabe hat demnach, wie leicht zu sehen, zwei, eine, oder keine Lösung, je nachdem der spitze Winkel, welchen die gegebene Gerade mit der Hauptaxe bildet, grösser, gleich, oder kleiner ist, als der spitze Winkel, den die Tangente eines unendlich fernen Punktes mit der Hauptaxe bildet.

Fig. 97.

Die zu den beiden unendlich fernen Punkten der Hyperbel gehörigen Tangenten heissen Asymptoten. Da die Asymptote diejenige durch $B$ gezogene Gerade ist, welche mit $OA$ (Fig. 97) parallel ist (denn beide Geraden stehen auf $AP$ senkrecht), so geht sie auch durch $M$, weil, wie oben bemerkt, $MB$ stets $\parallel OA$. Man hat also den Satz:

Die beiden Asymptoten schneiden sich im Mittelpunkte der Hyperbel. 402.

Anm. Die Asymptoten sind hiernach die aus dem Mittelpunkte an die Hyperbel gelegten Tangenten. — Aus der Definition der unendlich fernen Punkte und der Tangenten der Hyperbel folgt die Construction der Asymptoten. Man lege aus dem Brennpunkte $P$ die Tangenten $PA$ an den Leitkreis und errichte in der Mitte derselben ($B$) die Senkrechten. — Die Hyperbelzweige nähern sich den Asymptoten fortwährend, ohne sie jedoch in endlicher Entfernung zu erreichen.

Ist $X_1$ (Fig. 96) der Endpunkt des durch $X$ gezogenen Durchmessers, so sind die Halbirungslinien der Winkel $OXP$ und $OX_1P$ parallel. Dies sind aber die Tangenten in $X$ und $X_1$; man hat also den Satz:

Die beiden in den Endpunkten eines Durchmessers gezogenen Tangenten sind parallel. 403.

Nach 401 liegen die Fusspunkte $B$, $C$, $B_1$, $C_1$ der aus den Brennpunkten auf diese Tangenten gefällten Senkrechten auf der die Hyperbel in $S$ und $S_1$ berührenden Kreislinie. Da nun $BC_1$ stets eine Sehne derselben ist, so hat das Product

$PB.PC_1$ für jeden Punkt $B$ der Kreislinie denselben Werth. Nun schneidet die durch den Mittelpunkt des Rechtecks $BCB_1C_1$ gezogene Gerade $OP$ die Verlängerungen der Gegenseiten $B_1C$ und $BC_1$ so, dass $OC = PC_1$ ist. Also hat auch $PB.OC$ für jede Tangente denselben Werth; d. h.:

404. **Das Product der von den Brennpunkten auf eine beliebige Tangente gefällten Senkrechten hat stets denselben Werth.**

**175.** *Zwei Tangenten.* — Derjenige Winkel der Asymptoten, zwischen dessen Schenkeln ein Zweig der Hyperbel liegt, heisst Asymptotenwinkel. Von den durch den Mittelpunkt gezogenen Geraden schneiden nur diejenigen, welche die Asymptotenwinkel theilen, die Curve in 2 Punkten; die Asymptoten selbst (als Tangenten) treffen die Curve in je einem Punkte; alle übrigen durch $M$ gezogenen Geraden treffen sie gar nicht. Je nach der Beschaffenheit des Asymptotenwinkels heisst die Hyperbel rechtwinklig, spitzwinklig, stumpfwinklig. — Aus dem Begriff der Asymptoten folgt ferner:

405. Zwei Tangenten, die an denselben Hyperbelzweig gezogen sind, schneiden sich in einem Punkte, der mit diesem Zweige zwischen den Schenkeln desselben Asymptotenwinkels liegt; zwei Tangenten, die an verschiedene Hyperbelzweige gezogen sind, schneiden sich in einem Punkte, der ausserhalb der Schenkel der Asymptotenwinkel liegt.

406. Umgekehrt: Die Tangenten, welche von einem Punkte innerhalb der Schenkel des Asymptotenwinkels ausgehen, treffen beide den in demselben Raume liegenden Hyperbelzweig; die Tangenten, welche von einem Punkte ausserhalb der Schenkel des Asymptotenwinkels ausgehen, treffen jede einen anderen Zweig der Hyperbel.

Anm. Die folgende Betrachtung wird, wie Fig. 98 zeigt, den zweiten dieser beiden Fälle voraussetzen. Der erste unterscheidet sich nur dadurch, dass man statt des Winkels der Tangenten den Nebenwinkel zu setzen hat, wodurch Analogie mit den Sätzen der Ellipse entsteht.

Es seien $X$ und $X_1$ (Fig. 98) die Berührungspunkte d aus $L$ an die Hyperbel gezogenen Tangenten, $A$ der Leitpunl von $X$ in dem aus $P$, und $C$ der Leitpunkt von $X_1$ in de aus $O$ gezogenen Leitkreise. Dann ist $OA = PC = r$, $LO = L$ $LA = PL$, also Dreieck $\overline{OLA} \cong \overline{CLP}$, Winkel $OLA = CLP$, un durch Addition von $CLA$, $OLC = ALP$, $OLX_1 = PLX$; d. h.:

Die von einem Punkte an die Hyperbel gezogenen Tangenten bilden mit den nach den Brennpunkten gezogenen Geraden gleiche Winkel. 407.

Specieller Fall. — $X_1LX = R$. Dann ist auch $OLA = R$, mithin $OL^2 + LA^2 = OA^2$, oder:

$$LO^2 + LP^2 = r^2:$$

Nun ist nach 367 der geometrische Ort des Punktes $L$ die aus $M$ mit $ML = \sqrt{\frac{r^2}{2} - OM^2}$ beschriebene Kreislinie. Setzt man die halbe Hauptaxe gleich $a$, und $OM^2 - a^2 = b^2$, so ist (398) $2a = r$, also $ML = \sqrt{a^2 - b^2}$. Man hat also den Satz:

Fig. 98.

Der geometrische Ort eines Punktes, von dem aus zwei auf einander senkrecht stehende Tangenten 408.
an die Hyperbel gehen, ist die aus dem Mittelpunkte der Hyperbel mit dem Radius $\sqrt{a^2 - b^2}$ beschriebene Kreislinie.

Anm. Der Radius $\sqrt{a^2 - b^2}$ ist reell, imaginär, oder Null, je nachdem $a >, <, = b$ ist. — Im letzten Falle ist $M$ der einzige Punkt, in welchem sich zwei Tangenten unter rechtem Winkel schneiden. Mithin sind diese Tangenten die Asymptoten, und die Hyperbel ist rechtwinklig. — Da der Asymptotenwinkel stets kleiner ist, als der Winkel zweier an denselben Hyperbelzweig gehender Tangenten, so kann der letztere nur dann ein rechter sein, wenn der erstere spitz ist. Und da der Nebenwinkel des Asymptotenwinkels stets grösser ist, als der Winkel zweier an verschiedene Hyperbelzweige gehender Tangenten, so kann der letztere nur dann ein rechter sein, wenn der erstere stumpf ist. Ueberhaupt also kann der Winkel zweier Tangenten nur dann ein rechter sein, wenn der Asymptotenwinkel spitz ist. Dem Falle $a > b$ entspricht also die spitzwinklige, dem Falle $a < b$ die stumpfwinklige Hyperbel. (Die rechtwinklige Hyper- entspricht als specieller Fall der allgemeinen Hyperbel ebenso wie Kreis der Ellipse.)

Ist $A_1$ der Leitpunkt von $X_1$ in dem aus $O$ beschriebenen itkreise, so ist $LA = LP$ (120), und aus demselben Grunde $_1 = LP$, mithin $LA_1 = LA$; ferner $OL = OL$, $OA_1 = OA$, $\overline{LOA_1} \cong \overline{OLA}$, Winkel $LOA = LOA_1$, und $LOX + LOX_1 = 2R$, h.: Gehen von einem Punkte (ausserhalb der Schen- 409.

kel des Asymptotenwinkels) zwei Tangenten an die Hyperbel, so bildet jeder Leitstrahl des Punktes mit den nach demselben Brennpunkte gezogenen Leitstrahlen der Berührungspunkte zwei Winkel, deren Summe $2R$ ist.

Specieller Fall. — $X_1OX = 0$. Dann ist $LOA = R$, mithin: $LA^2 - OL^2 = OA^2$, oder:

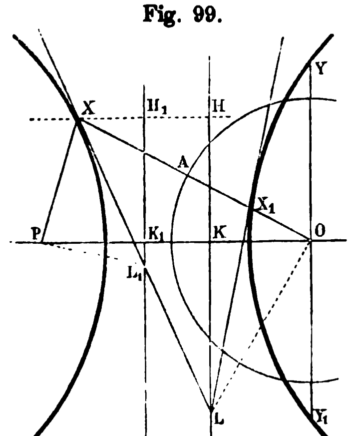
$$LP^2 - OL^2 = r^2.$$

Nun ist nach 365 der geometrische Ort des Punktes $L$ die auf $OP$ in der Entfernung $OK = \frac{OP^2 - r^2}{2OP}$ von $O$ oder $P$ errichtete Senkrechte. Ferner ist, wenn man den halben Abstand der Brennpunkte $OM$ gleich $c$ setzt, $OP = 2c$, ausserdem $r = 2a$; also $OK = \frac{c^2 - a^2}{c} = \frac{b^2}{c}$. Man hat also den Satz:

410. Der geometrische Ort eines Punktes, von dem aus zwei Tangenten an die Hyperbel gehen, deren Berührungspunkte mit einem Brennpunkte in gerader Linie liegen, ist die auf der Hauptaxe in der Entfernung $\frac{b^2}{c}$ von diesem Brennpunkte errichtete Senkrechte.

Diese Senkrechte heisst die zu dem Brennpunkte gehörige Directrix der Hyperbel. Jedem Brennpunkte entspricht also eine Directrix. Die durch den Brennpunkt gehende, der Directrix parallele Sehne heisst der Parameter der Hyperbel.

Fig. 99.




Wenn die in $X$ gezogene Tangente die beiden Directrixlinien in $L$ und $L_1$ schneidet, so ist $LOX = L_1PX = R$, und $LXO = L_1XP$ (399), also Dreieck $\overline{LOX} \sim \overline{L_1PX}$, und

$$\frac{OX}{PX} = \frac{LX}{L_1X}.$$

Wenn ferner die durch $X$ ur Hauptaxe gezogene Parallele lie beiden Directrixlinien in $H$ und $H_1$ schneidet, so ist Dreieck $\overline{HL} \sim \overline{H_1L_1X}$, also

$$\frac{LX}{L_1X} = \frac{HX}{H_1X},$$

folglich durch Vergleichung mit der vorigen Proportion:

$$\frac{OX}{PX} = \frac{HX}{H_1X}.$$

Hieraus folgt weiter $\frac{OX-PX}{PX} = \frac{HX-H_1X}{H_1X}$, oder $\frac{OA}{PX} = \frac{HH_1}{H_1X}$,

oder:

$$\frac{XP}{XH_1} = \frac{OA}{HH_1},$$

d. h.: **Für jeden Punkt der Hyperbel ist das Verhältniss seiner Entfernungen von einem Brennpunkt und der zugehörigen Directrix gleich dem Verhältniss zwischen der Hauptaxe und der Entfernung der beiden Directrixlinien.** 411.

Anm. Welchen Satz über den geometrischen Ort von $X$ (als Mittelpunkt einer Kreislinie) liefert die Umkehrung von 411?

Die Entfernung der beiden Directrixlinien ist gleich $OP - OK - PK_1 = 2c - \frac{2b^2}{c} = \frac{2(c^2-b^2)}{c} = \frac{2a^2}{c}$. Demnach ist das eben genannte Verhältniss $\frac{XP}{XH_1} = \frac{XO}{XH} = \frac{c}{a}$.

Da $XX_1 \perp LO$, so sind die Berührungspunkte $Y$ und $Y_1$ der aus $K$ an die Hyperbel gezogenen Tangenten die Endpunkte des Parameters. Ferner ist die Entfernung des Punktes $Y$ von der zu $O$ gehörigen Directrix gleich $OK$. Also ist nach der letzten Formel:

$$\frac{YO}{OK} = \frac{c}{a}; \quad YO = \frac{b^2}{c} \cdot \frac{c}{a} = \frac{b^2}{a}.$$

Die Grösse des Parameters $YY_1$ ist also $\frac{2b^2}{a}$.

Anm. Die Grösse $\frac{c}{2a}$, d. h. das Verhältniss des Abstandes der Brennpunkte zur grossen Axe, heisst die Excentricität der Hyperbel.

**176.** *Specielle Fälle der Hyperbel.* — 1) Rückt $P$ nach $O$, so wird $r_1 = r_2$, also $r = 0$. Die Hyperbel geht über in ein durch $O$ gehendes Paar von Geraden.

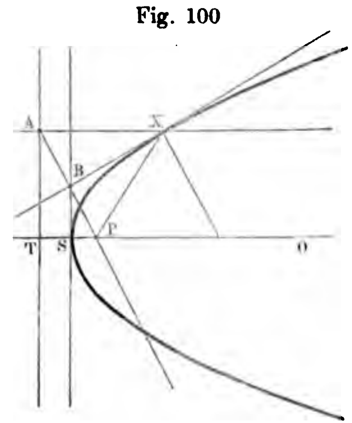
2) Entfernt sich $P$ von $O$, bis $OP = r$ ist, so ist in dem Dreieck $\overline{OXP}$ $OX - XP = OP$. Demnach ist der geometrische Ort von $X$ die durch $OP$ bestimmte Gerade mit Ausnahme der Strecke $OP$. Die beiden Theile der Geraden, welche zu beiden Seiten von $OP$ liegen, entsprechen den beiden Hyperbelzweigen.

### 3) Bewegungsgesetz $r_1 \pm r_2 = \infty$. — Die Parabel.

**177.** *Entstehung der Parabel.* — Die Entstehung der Ellipse und der Hyperbel beruhte auf der gemeinsamen Voraussetzung, dass der Radius des Leitkreises eine endliche Grösse habe. Halten wir den Schnittpunkt dieser Kreislinie mit der Strecke *OP* oder ihrer Verlängerung (*o*) fest, lassen aber den Punkt *O* sich von diesem Schnittpunkte auf der Geraden *o* ins Unendliche entfernen, so geht der Leitkreis in eine auf der letzteren senkrecht stehende Gerade über, *r* wächst ins Unendliche, und die Lage eines Punktes *X* der zu construirenden Curve wird jetzt durch das Gesetz bestimmt, dass die Abstände desselben von einem festen Punkte *P* und einer festen Geraden (Leitlinie) einander gleich seien. Da in der Lage des Punktes *P* zu dieser Geraden kein Gegensatz zwischen „innerhalb" und „ausserhalb" mehr stattfindet, so bildet die von *X* beschriebene Curve einen speciellen Fall sowohl der Ellipse als der Hyperbel.*) Ferner ist klar, dass die durch *O* und *X* gehende Gerade, welche früher um den Punkt *O* sich drehte, jetzt parallel mit der Geraden *o* vorwärts rücken wird.

Wenn eine Gerade parallel mit einer festen Geraden *o* sich verschiebt, und ein auf ihr liegender Punkt *X* sich inzwischen so auf ihr bewegt, dass er von einer auf *o* senkrecht stehenden festen Geraden und einem auf *o* liegenden Punkte *P* stets gleichweit entfernt ist, so beschreibt dieser Punkt *X* eine krumme Linie, welche Parabel genannt wird.

Fig. 100




Jeder Lage der sich verschiebenden Geraden entspricht ein Punkt *A* der Leitlinie und ein Punkt *X* der Parabel. Zu jedem Punkte der Leitlinie gehört also ein Punkt der Parabel. Dahr heisst *A* der Leitpunkt zu

Zu einem gegebenen Punkte *A* der Leitlinie findet man indem man durch *A* die Parallele zu *o* zieht, und in der Mit

*) Die Parabel geht also z. B. aus der Ellipse hervor, wenn m den einen Brennpunkt der letzteren in unendliche Entfernung rücken läs Mittelst dieser Bemerkung lassen sich Sätze, welche von der Ellipse gelt ohne Weiteres auf die Parabel übertragen.

von $AP$ die Senkrechte errichtet, welche jene Parallele in $X$ schneidet.

Aus der Entstehung der Curve folgt, dass bei unbegrenzter Vorwärtsbewegung der Geraden auch $X$ sich mit derselben ins Unendliche von $o$ entfernt, ebenso aber auch von der Leitlinie. Die Parabel ist also eine, wie die Ellipse, aus einem Zweige bestehende, aber, wie die Hyperbel, unbegrenzte Curve.

Betrachtet man die Leitlinie als eine, durch ihren unendlich fernen Punkt in sich selbst zurückkehrende Curve, so entspricht diesem unendlich fernen Punkte ein unendlich ferner Punkt der Parabel. Also:

Jede Parabel hat einen unendlich fernen Punkt, 412.
welcher gleichzeitig der unendlich ferne Punkt der sich verschiebenden Geraden ist.

*Secanten.* — Aus 375 folgt:

Die Parabel wird von jeder Geraden, die durch 413.
einen mit $P$ auf derselben Seite der Curve liegenden Punkt geht, in zwei Punkten geschnitten.

Die Gerade $o$ heisst die Axe der Parabel.

Aus 412 folgt weiter:

Jede Parallele zur Axe schneidet die Parabel in 414.
einem endlich und in dem unendlich fernen Punkte.

Mit dem Punkte $O$ rückt auch der Mittelpunkt der Strecke $OP$ in unendliche Entfernung. Daher:

Der Mittelpunkt der Parabel ist ihr unendlich 415.
ferner Punkt.

Aus 415 folgt, dass die zur Axe gezogenen Parallelen die Stelle der Durchmesser vertreten.

Der Punkt $P$ heisst Brennpunkt der Parabel, und die aus beliebigen Punkten der Curve nach dem Brennpunkte oder parallel zur Axe gezogenen Geraden: Leitstrahlen.

Für den Endpunkt der Axe $S$ (Scheitel der Parabel) geht die Formel $XA = XP$ über in

$$ST = SP,$$

d. h.: Der Scheitel der Parabel liegt in der Mitte 416.
zwischen seinem Leitpunkt und dem Brennpunkt.

**178.** *Eine Tangente.* — Während die sich verschiebende Gerade sammt dem Punkte $A$ in fortwährender Lagenänderung begriffen ist, dreht sich die Gerade $BX$ um den Punkt $P$, ohne jemals in eine vorige Richtung zurückzukehren. Denn in dem

Masse, als *A* nach der einen oder andern Seite sich von *T* entfernt, nähert sich *BX* der zu *o* parallelen, bezw. entgegengesetzten Richtung, und macht also überhaupt nur eine halbe Umdrehung, während *A* die ganze Leitlinie durchläuft. Demnach kann auch *BX* in jeder Richtung nur einen Punkt mit der Curve gemeinsam haben, und heisst daher Tangente der Parabel.

Die Tangente beschreibt im Verlauf ihrer Drehung denjenigen von der Parabel begrenzten Theil der Ebene, welcher den Brennpunkt nicht enthält. Sie umhüllt in ihren verschiedenen Richtungen die Parabel und kann als das dieselbe erzeugende Gebilde angesehen werden. Ein Punkt der Ebene liegt auf der convexen oder der concaven Seite der Parabel, je nachdem er von irgend einer Tangente getroffen wird oder nicht. Man kann also nur von einem auf der convexen Seite der Parabel liegenden Punkte eine Tangente an diese Curve ziehen.

Aus 381 folgt:

417. Die Tangente in einem Punkte der Parabel steht senkrecht auf der Halbirungslinie des Winkels der zugehörigen Leitstrahlen, und bildet mit diesen letzteren gleiche Winkel

418. Die Scheiteltangente steht auf der Axe senkrecht.

Da die Kreislinie, welche die Ellipse, bezw. Hyperbel in den Endpunkten ihrer Hauptaxe berührte, für die Parabel in ihre Scheiteltangente übergeht, so folgt weiter (383) der Satz:

419. Die Fusspunkte der aus dem Brennpunkte der Parabel auf beliebige Tangenten gefällten Senkrechten liegen auf der Scheiteltangente.

Ist *L* ein beliebiger Punkt der Tangente *BX*, so ist das Dreieck $\overline{LBP}$ rechtwinklig, also liegt *B* auf der über *LP* als Durchmesser beschriebenen Kreislinie, und ist Schnittpunkt dieser und der Scheiteltangente. Im Allgemeinen also liefert ein Punkt zwei Tangenten an die Parabel.

Anm. Hieraus folgt die Construction der Tangenten aus einem be liebigen Punkte *L* an die Parabel

Rückt *L* in unendliche Ferne, so geht die über *PL* b schriebene Kreislinie über in die durch *P* senkrecht auf *I* gezogene Gerade. Da diese nur einen Punkt mit der Scheit tangente gemeinsam hat, so kann man parallel zu einer geg benen Richtung nur eine Tangente an die Parabel ziehen.

Anm. Die Construction dieser Tangente folgt aus dem eben Gesagt

**179.** *Zwei Tangenten.* — Aus 386 folgt:

Die von einem Punkte an die Parabel gezogenen Tangenten bilden mit der nach dem Brennpunkte, und der parallel zur Axe gezogenen Geraden gleiche Winkel. ($PLX = OLX_1$, Fig. 101.) 420.

Fig. 101.

Specieller Fall. — $X_1LX = R$. — Addirt man $PLX = OLX_1$ und $X_1LP = X_1LA_1$, so folgt: $X_1LX = OLA_1$. Ist nun $X_1LX = R$, so ist auch $OLA_1 = R$, d. h. die drei Punkte $LAA_1$ liegen auf derselben Geraden, und zwar auf der Leitlinie. Man hat also den Satz:

Die von irgend einem Punkte der Leitlinie an die Parabel gezogenen Tangenten bilden einen rechten Winkel. 421.

Aus 388 folgt:

Gehen von einem Punkte zwei Tangenten an die Parabel, so bildet der Leitstrahl des Punktes gleiche Winkel mit den Leitstrahlen der Berührungspunkte. ($LPX = LPX_1$, Fig. 101.) 422.

Specieller Fall. — $X_1PX = 2R$. Dann ist $LPX = LPX_1 = R$, und $CLP = R$. Da nun $PLX = OLX_1$, oder, mit 2 multiplicirt, $PLA = OLC$, oder, durch Subtraction von $OLP$, $ALO = PLC$ ist, so folgt aus $LPX_1 = R$, dass auch $PLC$ und $ALO = R$ ist; d. h.: der Punkt $L$ liegt wieder auf der Leitlinie, und man hat den Satz:

Die Berührungssehne*) der von einem Punkte der Leitlinie an die Parabel gezogenen Tangenten geht durch den Brennpunkt. 423.

Anm. Hiernach gehen die beiden, an entsprechender Stelle bei der ipse und Hyperbel angenommenen speciellen Fälle für die Parabel in en einzigen über. Und wenn wieder die aus dem zweiten dieser Fälle vorgehende Gerade die Directrix der Parabel genannt wird, so kann n sagen, dass für die Parabel die Directrix mit der Leitlinie zusamnfällt. — Da der Punkt $C$ der Leitpunkt von $X_1$ in dem aus $P$ beiebenen Leitkreise ist, und da dieser Leitkreis ebenso wie der aus dem ndlich fernen Punkte $O$ beschriebene eine Gerade sein muss, so kann

*) Sehne, welche die Berührungspunkte verbindet.

es nur die unendlich ferne Gerade sein, mithin ist $C$ selbst der unendlich ferne Punkt der Geraden $PX_1$.

Die durch den Brennpunkt gehende, der Directrix parallele Sehne heisst der Parameter der Parabel.

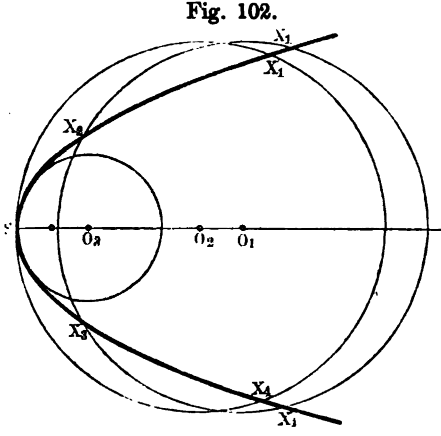
Aus dem Zusammenfallen der Directrix mit der Leitlinie folgt nach der Entstehung der Parabel der mit 390 analoge Satz:

424. **Für jeden Punkt der Parabel sind die Entfernungen vom Brennpunkt und der Directrix einander gleich.**

Anm. Welchen Satz über den geometrischen Ort von $X$ (als Mittelpunkt einer Kreislinie) liefert die Umkehrung von 424?

**180.** *Krümmung und Krümmungskreis.* — Aus einem Punkte $O_1$ der Axe sei mit dem Radius $r$ eine Kreislinie beschrieben, welche die Parabel in den vier Punkten $X_1$, $X_2$, $X_3$, $X_4$ schneidet. Bewegt sich diese Kreislinie so vorwärts, dass ihr Mittelpunkt, auf der Axe fortrückend, sich dem Scheitel $S$ der Parabel nähert, so nähern sich auch die Schnittpunkte $X_2$ und $X_3$ dem Punkte $S$, und, da sie in Folge der Symmetrie der ganzen Figur zur Axe stets gleichweit von $S$ entfernt sind, so fallen sie mit $S$ zusammen, wenn $O_2S = r$ ist. Dann also berührt die Kreislinie die Parabel im Punkte $S$, und schneidet sie ausserdem in zwei

Fig. 102.




neuen Punkten $X_1$ und $X_4$. — Wenn von diesem Augenblicke an die Kreislinie, indem sie beständig die Parabel in $S$ berührt, sich durch Verkleinerung ihres Radius zusammenzieht, so rückt ihr Mittelpunkt noch weiter an $S$ heran. Die Punkte $X_1$ und $X_4$, welche, wie $X_2$ und $X_3$, stets gleichweit von $S$ entfernt sind, nähern sich ebenfalls dem Punkte $S$, und fallen für einen gewissen Werth von $r$, der $\varrho$ heissen möge ($SO_3 = \varrho$), ebenfalls mit $S$ zusammen.

Die Kreislinie, deren Radius $\varrho$ ist, berührt also die [illegible]-rabel in vier, in $S$ zusammenfallenden Punkten. Verklein[illegible]rt sich die Kreislinie noch weiter, so werden zwei dieser Pun[illegible]e imaginär, die beiden anderen fallen nach wie vor im Be[illegible]-rungspunkte $S$ zusammen.

Aus der Entstehung der Kreislinie $O_3$ folgt, dass dieselbe unter allen, die Parabel in $S$ berührenden Kreislinien sich am genauesten an diese Curve anschliesst. Man sagt daher, dass die Parabel im Punkte $S$ dieselbe **Krümmung** habe wie die Kreislinie $O_3$, und versteht unter der Grösse der Krümmung einer Kreislinie den umgekehrten Werth ihres Radius $\left(\frac{1}{\varrho}\right)$. Eine Kreislinie hat in jedem ihrer Punkte gleich grosse Krümmung. Die Krümmung einer Geraden, welche als Kreislinie mit dem Radius $\infty$ betrachtet werden kann, ist hiernach gleich $\frac{1}{\infty}$ oder Null. — Die Strecke $\varrho$ heisst der **Krümmungsradius** der Parabel im Punkte $S$, die Kreislinie $O_3$ der **Krümmungskreis**.

Construirt man in einem beliebigen Punkte $X$ der Parabel die zur Tangente senkrechte Gerade, und lässt auf dieser, statt auf der Axe, den Mittelpunkt eines Schnittkreises sich bewegen, so fallen die beiden nächsten Schnittpunkte wieder gleichzeitig in einen Berührungspunkt zusammen. Verkleinert man dann den Radius des Berührungskreises, wie vorher, so fällt nur einer der noch übrigen beiden Schnittpunkte mit dem Berührungspunkte zusammen, nicht aber beide. Man erhält also eine Kreislinie, welche die Parabel in drei zusammenfallenden Punkten berührt und ausserdem in einem Punkte schneidet. Diese Kreislinie heisst der Krümmungskreis des Punktes $X$, und der umgekehrte Werth ihres Radius die Krümmung der Parabel im Punkte $X$.

Diese Betrachtungen lassen sich für die Ellipse und Hyperbel (wie für Curven im Allgemeinen) ebenso anstellen, wie für die Parabel. Man sagt, dass zwei Curven in einem Punkte eine **Berührung** $(n-1)^{\text{ter}}$ **Ordnung** haben, wenn sie $n$ in diesem Punkte zusammenfallende Punkte gemeinsam haben. Demnach hat der Krümmungskreis im Scheitel der Parabel eine Berührung dritter, in jedem anderen Punkte der Parabel eine solche zweiter Ordnung mit dieser Curve. Die gewöhnliche zweipunktige Berührung ist eine Berührung erster Ordnung.

Anm. In der Nähe des Endpunktes der grossen Axe unterscheidet sich die vierpunktig berührende Ellipse so wenig von der Parabel, dass bei der Berechnung von sehr langgestreckten Kometenbahnen aus dem in der Nähe jenes Punktes beobachteten Stücke eine parabolische Bahn, statt einer elliptischen, sich ergiebt. — Aus der Eigenschaft des Krümmungskreises im Scheitel der Parabel folgt, dass ein sphärischer Hohlspiegel einen parabolischen vertreten kann.

# Uebungssätze und Aufgaben.

## Vorbemerkung.

**Uebersicht der wichtigsten Methoden zur Lösung geometrischer Constructionsaufgaben.**

a) Die Methode der geometrischen Oerter. — Hängt die Lösung einer Aufgabe von der Bestimmung eines Punktes ab, so lassen sich oft aus den gegebenen Stücken zwei geometrische Oerter für diesen Punkt construiren, wodurch er bestimmt ist. (Sätze über geometrische Oerter: 86, 87, 120, 122, 167—170, 192—197, 236, 237, 255, 263, 267, 295, 365, 367 etc.)

b) Die analytische Methode. — Man stellt eine vorläufige Zeichnung von der gegenseitigen Lage der gegebenen und der gesuchten Stücke her. Findet es sich dann, dass die Lösung der Aufgabe von der Bestimmung eines einzigen Stückes $x$ abhängt, so führt der zwischen $x$ und den bekannten Stücken entweder schon bestehende, oder durch eine Hilfslinie herzustellende Zusammenhang auf ein andres unbekanntes Stück $y$, der Art, dass, wenn $y$ gefunden wäre, die Construction von $x$ nach einem bekannten geometrischen Satze (oder einer schon bekannten Aufgabe) sofort ausführbar wäre. Von $y$ gelangt man auf demselben Wege zu einem Stück $z$, u. s. w., bis schliesslich ein Stück $u$ erreicht wird, von welchem sofort zu erkennen ist, dass man es unmittelbar aus den gegebenen Stücken construiren kann. Hiermit ist die „Analysis" der Aufgabe beendet, und die Lösung besteht nun darin, dass man nach einander (den Weg der Analysis rückwärts verfolgend) $u, \dots z, y, x$ construirt. — Die Schwierigkeit dieser Methode besteht in der richtigen Auswahl der sich darbietenden Beziehungen und der möglichen Hilfslinien.

c) Die Methode der Aehnlichkeit. — Verlangt die Aufgabe die Construction einer Figur aus gegebenen Stücken (Bedingungen), so reichen mitunter die übrigen Stücke, mit

Ausnahme eines einzigen, zur Bestimmung der Gestalt der gesuchten Figur aus. Man kann dann aus diesen Stücken eine der gesuchten ähnliche Figur construiren, und zwar in beliebiger oder in ähnlicher Lage, je nachdem die gesuchte Figur beliebige oder bestimmte Lage haben soll. Aus der Hilfsfigur lässt sich dann die gesuchte in ähnlicher Lage construiren.

d) Die Methode der Umkehrung. — Soll eine Figur $x$ in bestimmter Lage zu einer gegebenen Figur $a$ gezeichnet werden, so zeigt die nach b) ausgeführte vorläufige Zeichnung mitunter, dass die umgekehrte Aufgabe, $a$ in Zusammenhang mit einer gegebenen Figur $x$ zu zeichnen, leicht lösbar ist. Kann man nun aus den Bedingungen der Aufgabe eine mit $x$ ähnliche Figur $x_1$ zeichnen, so construirt man die zugehörige Figur $a_1$, und vervollständigt die Figur $a$ zu einer Figur $(ax)$, welche mit $(a_1x_1)$ ähnlich ist.

e) Die Methode der Drehung. — Handelt es sich, wie in d), um den Zusammenhang einer gegebenen und einer gesuchten Figur, so kann man mitunter in der vorläufigen Zeichnung die letztere durch eine Drehung von bestimmter Grösse in eine Stellung bringen, in welcher sie leicht zu construiren ist.

f) Die algebraische Methode. — Lässt sich die Lösung einer Aufgabe auf die Bestimmung einer oder mehrerer unbekannter durch bekannte Strecken zurückführen (durch die letzteren müssen die gegebenen Stücke oder Bedingungen vollständig ersetzt werden!), so kann man zwischen allen diesen Strecken ebensoviele (aus Sätzen der Aehnlichkeitslehre oder der rechnenden Geometrie zu entnehmende) Gleichungen aufstellen, als Unbekannte vorhanden sind, dann die letzteren algebraisch bestimmen, und schliesslich construiren. — In der Allgemeinheit ihrer Anwendbarkeit steht diese Methode auf gleicher Stufe mit b). Oft lässt sich eine Aufgabe nach beiden Methoden lösen. Dann ist die Lösung nach b) gewöhnlich in der Construction einfacher, aber schwieriger zu finden, als die nach f).

In der folgenden Aufgabensammlung giebt die Randnummer sowohl bei den zu lösenden Aufgaben, wie bei den abzuleitenden Sätzen denjenigen Satz des Buches an, auf welchem vorzugsweise die Lösung, bezw. Ableitung beruht. Weitere Sätze sind zur Erleichterung in einzelnen Fällen hinter der Aufgabe angegeben. Die Nummern, vor welchen ein A steht, verweisen auf eine frühere Aufgabe.

## A. Systematisch geordnete Sätze und Aufgaben.

Aus gegebenen Strecken $a$, $b$, $c$ eine Strecke $x$ zu
15. zeichnen unter der Bedingung: 1) $x=a+b$, 2) $x=a+b+c$, 3) $x=2a$, 4) $x=3a$ etc.

16. 5) $x=a-b$, 6) $x=a+b-c$, 7) $x=a-b+c$, 8) $x=a-b-c$.

Wenn $O$ der Mittelpunkt, $r$ der Radius, $A$, $B$ Punkte der Kreislinie sind, eine Kreislinie zu zeichnen aus den ge-
43. gebenen Stücken 9) $O$, $r$, 10) $A$, $r$. — In einer gegebenen Kreislinie 11) den Radius, 12) den Durchmesser zeichnen, der (oder dessen Verlängerung) durch einen gegebenen Punkt $P$ geht, 13) durch zwei gegebene Punkte $A$, $B$ die Sehne zu ziehen, 14) eine gegebene Strecke $a$ aus einem gegebenen Punkte $A$ als Sehne einzutragen.

56. **15.** Die Halbirungslinien zweier Nebenwinkel stehen auf einander senkrecht. — 16. Jede durch den Scheitel eines rechten Winkels ausserhalb desselben gezogene Gerade bildet mit den Schenkeln Winkel, deren Summe gleich $R$ ist.

59. **17.** Die im Scheitel eines Winkels auf den Schenkeln nach aussen errichteten Senkrechten bilden einen Winkel, welcher mit dem gegebenen zusammen $2R$ beträgt.

66. **18.** Die Halbirungslinien zweier correspondirender oder Wechselwinkel sind parallel.

71. **19.** Sind zwei verschränkte oder Gegenwinkel gleich, so steht die schneidende Gerade zu den Parallelen senkrecht.

76. **20.** Die Halbirungslinien zweier verschränkten oder Gegenwinkel stehen auf einander senkrecht. — 21. Ist im Dreieck $\alpha+\beta=\gamma$, so ist $\gamma=R$.

78. **22.** Der Winkel der Senkrechten, welche von einem Punkte auf zwei sich schneidende Geraden gefällt werden, ist gleich einem der Winkel, welche die Geraden bilden. — 23. Die Senkrechte, welche im rechtwinkligen Dreieck aus dem Scheitel des rechten Winkels auf die Gegenseite gefällt wird, theilt das Dreieck in zwei neue Dreiecke, deren Winkel denen des ersten gleich sind.

83. **24.** Die Summe der fünf spitzen Winkel eines Stern-Fünfecks (vgl. das Stern-Siebeneck Fig. 27) beträgt $2R$.

84. **25.** Der Winkel der Senkrechten, welche von einem Punkte zwischen den Schenkeln eines Winkels auf die Schenkel gefällt werden, beträgt mit dem gegebenen Winkel zusammen $2R$. — 26. Die Halbirungslinien der vier Aussenwinkel eines Vierecks

bilden ein Viereck, in welchem je zwei gegenüberliegende Winkel zusammen $2R$ betragen.

Ein Dreieck zu construiren aus den gegebenen Stücken: 94.
27) $a$, $b$, $c$, 28) $a$, $a$, $b$, 29) $a$, $a$, $a$, 30) $a$, $b$, $\gamma$, 31) $a$, $\beta$, $\gamma$, 32) $a$, $\beta$, $\alpha$ (77), 33) congruent zu einem gegebenen Dreieck. — 34) Einen Winkel construiren, welcher $n$-mal so gross ist als ein gegebener. — Durch einen gegebenen Punkt eine Gerade zu ziehen, welche 35) eine geg. Gerade unter einem geg. Winkel schneidet (65), 36) von den Schenkeln eines geg. Winkels gleiche Stücke abschneidet.

**37.** Im gleichschenkligen Dreieck sind die Aussenwinkel an der Basis einander gleich. — 38. Im gleichsch. D. sind durch einen Winkel die übrigen bestimmt (Rechnungsbeispiele!). — 39. Ist in zwei gleichsch. D. der Winkel an der Spitze, oder ein Basiswinkel gleich, so sind auch die anderen Winkel gleich. — 40. Im gleichsch.-rechtwinkligen D. ist jeder spitze Winkel gleich $\frac{1}{2}R$. — 41. Im gleichsch. D. schneidet eine zu einer Seite gezogene Parallele ein neues gleichsch. D. ab. — 42. Verlängert man einen Schenkel des gleichsch. D. über die Basis um eine beliebige Strecke, und trägt auf dem andern Schenkel von der Basis aus die gleiche Strecke ab, so wird die Basis durch die Verbindungslinie der Endpunkte dieser Strecken halbirt. — 43. Ist im gleichsch. D. ein Basiswinkel doppelt so gross als der Winkel an der Spitze, so theilt die Halbirungslinie des Basiswinkels das Dreieck in zwei gleichsch. D. — 44. Verlängert man jede von zwei Seiten eines Dreiecks über den gemeinsamen Endpunkt um die andere, so sind die Geraden, welche die Endpunkte dieser Verlängerungen mit denen der dritten Seite verbinden, einander parallel. 98.

**45)** Durch einen Schnittpunkt zweier Kreislinien eine Gerade so zu ziehen, dass die Centriwinkel der abgeschnittenen Bogen gleich sind (70).

**46.** Der Winkel, welchen die Basis eines gleichsch. D. mit der auf einen Schenkel gefällten Höhe bildet, ist gleich dem halben Winkel an der Spitze. — 47. Ist in einem Dreieck die Verbindungslinie einer Ecke mit der Mitte der Gegenseite gleich der Hälfte dieser Seite, so ist der Winkel an jener Ecke gleich $R$. 99.

**48.** Bildet eine von der Spitze eines gleichsch. D. nach der Basis gezogene Strecke mit letzterer einen Winkel von $R$, so ist diese Strecke gleich der Summe (oder Differenz) aus den Abschnitten der Basis. — 49. Ist in einem recht- 100.

winkligen Dreieck ein spitzer Winkel doppelt so gross als der andere, so ist die Hypotenuse doppelt so gross als die kleinere Kathete. — 50. Trägt man auf den Seiten eines gleichseitigen Dreiecks von den Ecken aus drei gleiche Strecken ab, und verbindet die Endpunkte derselben, so entsteht ein neues gleichseitiges Dreieck. — 51. Ist in A. 50 die abgetragene Strecke gleich ⅓ der Seite, so stehen die Seiten des einen Dreiecks auf denen des andern senkrecht (A. 49).

52) In ein gegebenes gleichseitiges Dreieck ein zweites so zu zeichnen, dass die Seiten des einen auf denen des andern senkrecht stehen. — 53) Einen rechten Winkel in 3 gleiche Theile zu theilen. — 54) Durch vier gegebene Punkte, von denen keine drei in gerader Linie liegen, drei Geraden zu ziehen, welche ein gleichseitiges Dreieck bilden.

101. **55.** Die Halbirungslinie des Aussenwinkels an der Spitze eines gleichsch. D. ist der Basis parallel. — 56. Liegen auf den Schenkeln eines Winkels $O$ die Punktreihen $A$, $B$, $C$, ... und $A_1$, $B_1$, $C_1$ ... so, dass $OA = AA_1 = A_1B = BB_1 = B_1C = CC_1 \ldots$ ist, so ist, wenn $AOA_1 = \alpha$ gesetzt wird, $A_1AB = 2\alpha$, $BA_1B_1 = 3\alpha$, $B_1BC = 4\alpha$, etc. — 57. Verlängert man einen Schenkel des gleichsch. D. über die Spitze hinaus um sich selbst, und verbindet den Endpunkt der Verlängerung mit dem der Basis, so steht diese Linie auf der Basis senkrecht (vgl. A. 49). — 58. Verlängert man eine Seite ($a$) eines Dreiecks über jeden ihrer Endpunkte hinaus um die dort anstossende Seite und verbindet die Endpunkte mit der dritten Ecke, so ist der Winkel der Verbindungslinien gleich $R + \frac{1}{2}\alpha$. — 59. Trägt man auf einer Seite ($a$) eines Dreiecks eine andere Seite ($b$) ab (an) und verbindet den Endpunkt mit der Spitze, so bildet diese Linie mit der dritten Seite den Winkel $\pm \frac{1}{2}(\beta - \gamma)$, $[R \pm \frac{1}{2}(\beta - \gamma)]$.

**60)** Die Senkrechte im Endpunkt einer Strecke zu errichten, ohne die Strecke zu verlängern..

Im gleichschenkligen Dreieck sind die nach den Schenkeln
106. gehenden 61. Höhen, 62. Mittellinien, 63. die Halbirungslini<sup></sup>
der Basiswinkel, 64 die Strecken, welche die Endpunkte d Basis mit zwei gleichweit von ihnen entfernten Punkten d Schenkel verbinden, einander gleich. — 65. Die aus zwei Ecke eines Dreiecks auf die zwischen ihnen liegende Mittellinie g fällten Senkrechten sind einander gleich. — 66. Betragen d Winkel an der Spitze in zwei gleichsch. D. zusammen $2R$, betragen zwei ihrer Basiswinkel zusammen $1R$. — 67. D

Winkel, welchen in einem Dreieck die Halbirungslinie des Winkels $\alpha$ mit der aus derselben Ecke gefällten Höhe bildet, ist $\frac{1}{2}(\beta-\gamma)$.

**68)** Zu einer gegebenen Geraden eine Parallele zu ziehen, so dass die Summe der von zwei gegebenen Punkten auf dieselbe gefällten Senkrechten gleich einer gegebenen Strecke ist. — 69) Auf einer geg. Geraden einen Punkt zu bestimmen, dessen Verbindungslinien mit zwei gegebenen Punkten gleiche Winkel mit der Geraden bilden (99). — 70) In einem gegebenen Dreieck zu einer Seite diejenige Parallele zu ziehen, welche gleich der Summe (Differenz) der zwischen den Parallelen liegenden Abschnitte ist. — Ein gleichseitiges Dreieck zu zeichnen aus*) 71) $h_1$, 72) $a+h_1$, 73) $a-h_1$. — Ein rechtwinkliges Dreieck zu zeichnen aus 74) $a+b$, $c$, 75) $a-b$, $c$, 76) $a+b$, $\alpha$, 77) $a-b$, $\alpha$, 78) $a+c$, $b$, 79) $a+c$, $\alpha$, 80) $c-a$, $b$, 81) $c-a$, $\alpha$, 82) $c$, $\alpha-\beta$, 83) $p$, $\alpha$, 84) $p$, $\alpha-\beta$, 85) $p_3$, $\alpha$, 86) $a+h_3$, $\alpha$, 87) $a-h_3$, $\alpha$, 88) $p$, $\alpha=2\beta$. — Ein gleichschenkliges Dreieck zu zeichnen aus 89) $\alpha$, $h_2$, 90) $b+h_1$, $\alpha$, 91) $b-h_1$, $\alpha$, 92) $b+h_2$, $\beta$, 93) $b-h_2$, $\beta$, 94) $a+b$, $\alpha$, 95) $a-b$, $\alpha$, 96) $a$, $t_2$, 97) $b$, $t_2$, 98) $p$, $h_1$, 99) $p$, $\alpha$. — Ein schiefwinkliges Dreieck zu zeichnen aus 100) $a$, $b+c$, $\alpha$, 101) $b+c$, $\alpha$, $\beta$, 102) $b-a$, $c$, $\alpha$, 103) $b-a$, $c$, $\gamma$, 104) $a+b$, $\beta-\alpha$, $\gamma$, 105) $p$, $\alpha$, $\beta$, 106) $p$, $\alpha-\beta$, $\gamma$, 107) $p_2$, $\alpha$, $\beta$, 108) $a$, $\beta$, $m_2$, 109) $a$, $b-c$, $\beta-\gamma$. — 110) Ein Viereck zu zeichnen aus einer Seite, der Summe der anderen Seiten und den Winkeln.

**111.** In jedem Dreieck ist die Summe der Höhen kleiner 108.
als der Umfang. — 112. Im schiefwinkligen Dreieck ist die Summe der Höhen kleiner als die der Mittellinien.

**113.** Verbindet man einen Punkt innerhalb eines Dreiecks 110.
mit den Ecken, so ist die Summe der Verbindungsstrecken kleiner als der ganze, und grösser als der halbe Umfang des Dreiecks. — 114. In jedem Viereck ist die Summe zweier Gegenseiten kleiner als die der Diagonalen. — 115. Verbindet man einen Punkt innerhalb eines Sechsecks mit allen Ecken, so ist die Summe der Verbindungslinien grösser als die von drei nicht anstossenden Seiten. — 116. Jede Seite eines Dreiecks

*) Bezeichnungen im Dreieck: $abc$ Seiten, $\alpha\beta\gamma$ Winkel, $h_1h_2h_3$ Höhen, $t_1t_2t_3$ Mittellinien, $m_1m_2m_3$ Winkelhalbirende, $r$ Radius des Umkreises, $\varrho$ Radius des Inkreises, $\varrho_1\varrho_2\varrho_3$ Radien der Ankreise, $2p=a+b+c$, $2p_1=-a+b+c$, $2p_2=a-b+c$, $2p_3=a+b-c$, $f^2$ Fläche. Im rechtwinkligen D. ist $\gamma=R$, im gleichschenkligen $b=c$.

(Polygons) ist kleiner als der halbe Umfang. — 117. Liegen die Ecken eines Dreiecks auf den Seiten eines zweiten, so ist der Umfang des ersten kleiner als der des zweiten.

119. **118)** In ein gegebenes Dreieck ein gleichschenkliges Dreieck von gegebener Höhe so einzuzeichnen, dass die Basis des letzteren einer Seite des ersteren parallel ist. — 119) Die Halbirungslinie des Winkels zweier Geraden zu construiren, ohne die Geraden bis zu ihrem Schnittpunkte zu verlängern.

120. **120)** Auf einer geg. Geraden einen Punkt zu finden, der von zwei geg. Punkten gleichweit entfernt ist. — 121) Einen Punkt zu finden, der von drei geg. Punkten gleichweit entfernt ist.

122. **122)** Auf einer Seite eines Dreiecks einen Punkt zu finden, der von den beiden anderen Seiten gleichweit entfernt ist. — 123) Den Drehpunkt eines Spieltisches zu bestimmen (Punkt, um welchen man ein aus zwei congruenten Quadraten bestehendes Rechteck drehen muss, damit nach einer viertel Umdrehung die längere Seite in die Lage und Richtung der kürzeren komme).

126. **124.** Schneidet man auf den Seiten eines Parallelogramms von den Ecken aus vier gleiche Stücke ab, und verbindet die Endpunkte der Reihe nach, so entsteht ein neues Parallelogramm. — 125. Verbindet man die Halbirungspunkte zweier Gegenseiten eines Parallelogramms mit den Endpunkten einer Diagonale, so wird dadurch die andere Diagonale in drei gleiche Theile getheilt. — 126. Zieht man in einem gleichsch. D. aus einem Punkte der Basis Parallelen zu den Schenkeln, so ist die Summe derselben gleich einem Schenkel. — 127. Fällt man in einem gleichsch. D. aus einem Punkte der Basis Senkrechten auf die Schenkel, so ist die Summe derselben gleich einer zum Schenkel gehörigen Höhe. — 128. Fällt man aus einem beliebigen Punkte innerhalb eines gleichseitigen D. Senkrechten auf die drei Seiten, so ist ihre Summe gleich der Höhe des Dreiecks.

Eine gegebene Strecke zwischen die Schenkel eines gegebenen Winkels so einzutragen, dass sie 129) auf einem Schenkel senkrecht steht, 130) von beiden Schenkeln gleiche Stücke abschneidet, 131) einer gegebenen Geraden parallel ist. — 132) Zwischen zwei gegebene Parallelen eine gegebene Strecke so einzutragen, dass sie durch einen gegebenen Punkt geht. — 133) Durch einen von drei gegebenen Punkten eine Gerade so zu ziehen, dass sie von den beiden anderen Punkten gleich-

weit entfernt ist. — 134) Von zwei gegebenen gleichwinkligen Dreiecken das kleinere so in das grössere zu zeichnen, dass die Seiten des inneren von denen des äusseren gleichen Abstand haben (122). — 135) Ein Viereck zu zeichnen, von welchem drei Seiten und die Winkel an der vierten gegeben sind.

Im gleichschenkligen Trapez sind 136. je zwei an 127.
einer der parallelen Seiten liegende Winkel einander gleich, 137. die Diagonalen einander gleich. — Ein Viereck ist ein gleichschenkliges Trapez, wenn 138. die Diagonalen und zwei Gegenseiten gleich, 139. die Diagonalen gleich und zwei Gegenseiten parallel, 140. die anliegenden Winkel einer Seite sowie die ihrer Gegenseite einander gleich sind. — 141. Die Verbindungslinie der Mitten der nicht parallelen Seiten (die Mittellinie) eines gleichschenkligen Trapezes ist gleich der halben Summe, und das zwischen den Diagonalen liegende Stück dieser Linie gleich der halben Differenz der parallelen Seiten. — 142. Die Mitten der Seiten jedes Vierecks sind die Ecken eines Parallelogramms.

**143**) Durch einen Punkt zwischen den Schenkeln eines gegebenen Winkels diejenige Strecke zu ziehen, welche in diesem Punkte halbirt wird. — Ein Dreieck zu zeichnen, wenn gegeben sind 144) die Mitten der drei Seiten, 145) die Mitten zweier Seiten und der Fusspunkt irgend einer Höhe. — 146) Ein Fünfeck zu zeichnen, wenn die Mitten seiner Seiten gegeben sind (A. 142). — 147) Ein Viereck zu zeichnen, wenn gegeben sind seine Seiten und die Verbindungsstrecke der Mitten zweier Gegenseiten (A. 142).

**148.** Construirt man aus den Stücken eines gegebenen 128.
Dreiecks ein rechtwinkliges Dreieck so, dass die Hypotenuse gleich $a \pm b$ und ein Winkel gleich $\gamma$ ist, so ist die dem Winkel $\gamma$ gegenüberliegende Kathete gleich $h_2 \pm h_1$.

Ein Parallelogramm zu zeichnen aus*) 149) $a$, $b$, $\gamma$, 150) $a, b, c$, 151) $a, c, \gamma$, 152) $a, b, h_1$, 153) $c, h_1, \gamma$. 154) Ein gleichsch. D. zu zeichnen aus $a$, $h_1 \pm h_2$ (A. 148).

**155.** Die Mitten der Seiten eines gleichschenkligen Trapezes 129.
sind die Ecken eines Rhombus.

Einen Rhombus zu zeichnen aus 156) $a$, $\gamma$, 157) $a$, $c$, 158) $a$, $h_1$.

**159.** Die Halbirungslinien der Winkel eines Parallelo- 130.

---

*) Bezeichnungen im Parallelogramm: $ab$ Seiten, $\gamma$ Winkel, $h_1$ Höhen, $cd$ Diagonalen, $\delta$ Winkel der Diagonalen.

gramms schliessen ein Rechteck ein. — 160. Die Mitten der Seiten eines Rhombus sind die Ecken eines Rechtecks (A. 66). — 161. Die Mitten der Seiten eines Rechtecks sind die Ecken eines Rhombus (105). — 162. Schneidet man auf der Diagonale $AC$ eines Quadrates $ABCD$ eine Seite bis $E$ ab, sodass $AB = AE$, und errichtet in $E$ auf der Diagonale die Senkrechte, welche $BC$ in $F$ schneidet, so ist $BF = FE = EC$.

Ein Rechteck zu zeichnen aus 163) $a$, $b$, 164) $a$, $c$; ein Quadrat aus 165) $a$. — 166) In ein gegebenes Quadrat ein zweites so zu zeichnen, dass eine Ecke des letzteren in einem auf einer Seite des ersteren gegebenen Punkte liegt.

131. **167.** Zieht man durch einen beliebigen Punkt einer Diagonale eines Parallelogramms Parallelen zu den Seiten, so sind diejenigen der neuen Parallelogramme, durch welche die Diagonale nicht geht, inhaltsgleich. — 168. Verbindet man einen beliebigen Punkt innerhalb eines Parallelogramms mit den Ecken, so sind die Summen der nicht benachbarten Dreiecke einander gleich. — 169. Von den beiden Diagonalen eines Parallelogramms ist diejenige die längere, welche die Scheitel der spitzen Winkel verbindet. — 170. Die durch die Ecken eines Vierecks zu den Diagonalen gezogenen Parallelen bilden ein Parallelogramm, dessen Fläche doppelt so gross ist als die des Vierecks.

133. Ein Dreieck zu zeichnen aus 171) $b$, $c$, $t_1$, 172) $a$, $t_1$, $h_1$, 173) $a$, $h_1$, $t_2$. — Ein Parallelogramm zu zeichnen aus 174) $a$, $e$, $d$, 175) $e$, $d$, $\delta$, 176) $a$, $e$, $\delta$, 177) $e$, $d$, $h_1$. — 178) Drei gegebene Strecken von einem Punkt aus so zu legen, dass ihre Endpunkte ($B$, $C$, $D$) in gerader Linie liegen, und $BC = CD$ ist.

134. **179**) In ein gegebenes Dreieck ein Parallelogramm zu zeichnen, von welchem der Schnittpunkt der Diagonalen gegeben ist. — 180) Durch die Ecken eines geg. Vierecks ein Parallelogramm zu legen, dessen Mittelpunkt ein im Innern des Vierecks gegebener Punkt ist. — 181) Innerhalb eines Rechtecks $\overline{ABCD}$ sind zwei Punkte $P$ und $Q$ gegeben. Man soll auf $AB$, $BC$, $CD$ die Punkte $A_1$, $B_1$, $C_1$ so bestimmen, da $PA_1A = B_1A_1B$, $A_1B_1B = C_1B_1C$, $B_1C_1C = QC_1D$ ist. (Anwe dung auf den Weg einer Welle, die von den Wänden ein rechteckigen Raums zurückgeworfen wird, sowie auf die Theo des Billards.)

135. **182**) Ein Parallelogramm zu zeichnen, dessen Mittelpun gegeben ist, und dessen Ecken auf den Seitenlinien eines ge Vierecks liegen (A. 143).

Ein Parallelogramm ist ein Rhombus, wenn 183. die Diagonalen auf einander senkrecht stehen, 184. eine Diagonale einen Winkel halbirt. — 185. Die Fusspunkte der vom Schnittpunkt der Diagonalen eines Rhombus auf die Seiten gefällten Senkrechten sind die Ecken eines Rechtecks. 136.

Einen Rhombus zu zeichnen aus 186) $\gamma$, $e$, 187) $e$, $d$, 188) $a$, $e \pm d$, 189) $\gamma$, $e \pm d$. — In ein geg. Dreieck einen Rhombus zu zeichnen, sodass 190) derselbe einen Winkel mit dem Dreieck gemeinsam hat, 191) eine Seite des Rhombus in eine Seite des Dreiecks und eine Ecke in einen auf einer andern Seite des Dreiecks gegebenen Punkt fällt.

**192.** Ein Parallelogramm ist ein Rechteck, wenn die Diagonalen einander gleich sind. — 193. Werden die Seitenlinien eines Quadrates durch zwei auf einander senkrechte Geraden geschnitten, so ist das von zwei Gegenseiten auf der ersten Geraden abgeschnittene Stück gleich dem von den andern Gegenseiten auf der zweiten Geraden abgeschnittenen Stücke. — 194. Stehen zwei gleich lange Strecken senkrecht auf einander, so ist jedes Rechteck, dessen Seiten durch ihre vier Endpunkte gehen, ein Quadrat. 137.

Ein Quadrat zu zeichnen aus 195) $e$, 196) $e \pm a$; dgl. ein Rechteck aus 197) $a$, $\delta$, 198) $e$, $\delta$. — 199) In ein geg. Quadrat ein gleichseitiges Dreieck zu zeichnen, so dass eine Ecke des Dreiecks mit einer Ecke des Quadrats zusammenfällt. — 200) Ein Quadrat zu zeichnen, dessen Seiten durch die Ecken eines gegebenen Vierecks gehen (A. 194).

Ein Parallelogramm in ein andres verwandeln 201) mit gleicher Grundlinie und gegebenem Winkel, 202) mit gleicher Grundlinie und gegebener Seite (3 Fälle), 203) mit gleichem Winkel und gegebener Seite (A. 202, 201), 204) mit gegebenem Winkel und gegebener Seite (A. 202, 201). — 205) Ein Parallelogramm durch Parallelen zu einer Seite in $n$ gleiche Theile zu theilen. 140.

**206.** Wenn die eine Diagonale eines Vierecks die andere halbirt, so halbirt sie auch die Fläche des Vierecks. — 207. Die oeren Abschnitte der Mittellinien eines Dreiecks theilen das- lbe in drei flächengleiche Dreiecke. 142.

Ein Dreieck in ein anderes verwandeln 208) mit eicher Grundlinie und gegebenem anliegenden Winkel, 209) it gleicher Grundlinie und gegebener Seite (3 Fälle), 210) mit g. Seite und geg. anliegendem Winkel (A. 209, 208), 211) mit leicher Grdl., sodass eine Seitenlinie durch einen geg. Punkt

geht, 212) mit gleicher Grdl., sodass die Spitze auf einer geg. Geraden liegt, 213) mit gleichem Winkel und geg. Grundlinie oder Höhe, 214) mit geg. Spitze, so dass die Grundlinie mit der des geg. Dreiecks in derselben Geraden liegt und einen Endpunkt gemeinsam hat (A. 213). — 215) Ein Polygon in ein andres zu verwandeln, welches eine Seite weniger hat. — 216) Ein Parallelogramm in einen Rhombus (mit Beibehaltung einer Diagonale) zu verwandeln. — 217) Ein Dreieck $\overline{ABC}$ in ein andres $\overline{A_1B_1C_1}$ zu verwandeln, so dass $C_1$ ein auf $AB$ gegebener Punkt ist, und $A_1B_1$ auf einer durch $C$ gehenden geg. Geraden liegt. — 218) Dgl., so dass $A_1$ mit $A$ zusammenfällt und $B_1C_1$ auf einer beliebig geg. Geraden liegt. — 219) Ein Dreieck, 220) ein Parallelogramm durch Linien, die von einer Ecke ausgehen, in $n$ gleiche Theile zu theilen; 221) dgl. ein Dreieck durch Linien, die von einem geg. Punkt einer Seite ausgehen. — 222) Innerhalb eines Dreiecks $\overline{ABC}$ ist ein Punkt $P$ gegeben. Man soll auf $BC$ einen Punkt $X$ so bestimmen, dass die Strecken $PA$ und $PX$ die Fläche des Dreiecks halbiren (A. 219, 214). — Ein Viereck zu halbiren durch eine 223) von einer Ecke, 224) von einem geg. Punkte einer Seite ausgehende Gerade (A. 219). — 225) Durch zwei auf den Seiten eines Dreiecks geg. Punkte zwei Strecken zu ziehen, welche die Fläche des Dreiecks in drei gleiche Theile theilen (A. 221).

144. Ein Dreieck in $n$ Theile zu theilen, die ein gegebenes Verhältniss haben, durch Linien, welche ausgehen 226) von einer Ecke, 227) von einem auf einer Seite, 228) von einem innerhalb, 229) ausserhalb des Dreiecks gegebenen Punkte.

154. **230.** Unter allen Strecken, die von einem Punkte nach einer Kreislinie gezogen werden können, ist diejenige die längste, welche durch den Mittelpunkt, und diejenige die kürzeste, deren Verlängerung durch den Mittelpunkt geht (109).

158 **231.** Die Geraden, welche durch den Mittelpunkt einer Kreislinie und die Schnittpunkte der einen von zwei parallelen Secanten gezogen werden, schneiden auf der anderen von den Schnittpunkten aus gleiche Stücke ab. — 232. Die Mitten aller parallelen Sehnen liegen auf einem Durchmesser. — 233. Ge. eine Kreislinie durch den Mittelpunkt einer zweiten, und ziel man parallel zur Verbindungslinie ihrer Mittelpunkte eine ge meinsame Secante, so ist die Summe der äusseren beide Abschnitte derselben gleich dem Durchmesser der erste Kreislinie.

**234)** Durch den einen Schnittpunkt zweier Kreislinien eine Gerade so zu ziehen, dass die entstehenden Sehnen einander gleich sind.

**235.** Fällt man aus den Endpunkten eines Durchmessers 162.
Senkrechten auf eine Secante, so haben die Endpunkte der Sehne gleichen Abstand von den Fusspunkten der Senkrechten.

**236.** Die Mitten aller gleich langen Sehnen einer Kreis- 163.
linie liegen auf einer Kreislinie. (Wie findet man den Radius derselben?) — 237. Construirt man aus beliebigen Punkten der einen von zwei Parallelen Kreislinien mit demselben Radius, so sind die auf der anderen entstehenden Sehnen einander gleich.

**238)** Mit gegebenem Radius eine Kreislinie zu zeichnen, welche jede von zwei gegebenen Geraden unter einer Sehne von gegebener Länge schneidet.

**239.** Der Winkel zweier Sehnen ist gleich der Summe der 164.
Peripheriewinkel, welche auf seinem und seines Scheitelwinkels Bogen stehen.

**240.** Liegen die Ecken eines Dreiecks auf einer Kreis- 165.
linie, so ist die Summe (Differenz) aus einem spitzen (stumpfen) Dreieckswinkel, und dem Winkel, welchen die gegenüberliegende Seite mit dem durch einen ihrer Endpunkte gehenden Durchmesser bildet, gleich *R*. — 241. Ist im rechtwinkligen Dreieck eine Kathete halb so gross als die Hypotenuse, so ist ihr Gegenwinkel halb so gross als der der anderen. — 242. Zieht man aus dem einen Schnittpunkte zweier Kreislinien die Durchmesser, so liegen deren Endpunkte mit dem anderen Schnittpunkt in gerader Linie.

**243.** Zwischen parallelen Sehnen eines Kreises liegen 166.
gleiche Bogen. — 244. Stehen zwei Sehnen senkrecht auf einander, so ist die Summe je zweier nicht benachbarter Bogen gleich einem Halbkreise. — 245. Verbindet man einen Punkt innerhalb (ausserhalb) der Kreisfläche mit den Endpunkten einer Sehne, so ist der Winkel der Verbindungslinien grösser (kleiner) als der mit dem Punkt auf derselben Seite der Sehne liegende, zu ihr gehörige Peripheriewinkel. — 246. Parallele aus den Endpunkten eines Durchmessers gezogene Sehnen sind gleich, und ihre Endpunkte liegen mit dem Mittelpunkt in gerader Linie. — 247. Fällt man von zwei Punkten eines Bogens, die gleichen Abstand von seinen Endpunkten haben, Senkrechten auf die zugehörige Sehne, so sind dieselben einander gleich. — 248. Liegen die Ecken eines Dreiecks auf

einer Kreislinie, so schneidet jede Mittelsenkrechte die Halbirungslinien des gegenüberliegenden Winkels und seines Aussenwinkels in einem Punkte der Kreislinie. — 249. Liegen die Ecken eines Sechsecks $(\overline{a_1 a_2 \ldots a_6})$, in welchem $a_1 \parallel a_4$ und $a_2 \parallel a_5$ ist, auf einer Kreislinie, so ist auch $a_3 \parallel a_6$. — 250. Verbindet man einen Punkt der Kreislinie mit den auf ihr liegenden Ecken eines gleichseitigen Dreiecks, so ist die mittlere Verbindungslinie gleich der Summe der beiden anderen. — 251. Bilden zwei Sehnen, die aus den Endpunkten einer dritten nach Punkten desselben Bogens gezogen sind, gleiche Winkel mit jener, so sind sie einander gleich. — 252. Zwei Sehnen (Secanten), welche sich so schneiden, dass ein Abschnitt der einen gleich einem Abschnitt der andern ist, sind einander gleich. — 253. Errichtet man auf einer Sehne in gleichem Abstande von ihren Endpunkten Senkrechten nach derselben Seite bis zur Kreislinie, so sind dieselben einander gleich. — 254. Gehört eine Sehne zu zwei verschiedenen, auf derselben Seite liegenden Kreisbogen, so schneiden die Schenkel aller zu dieser Sehne gehörigen Peripheriewinkel des äusseren Bogens gleiche Stücke auf dem inneren Bogen ab. — 255 Werden zwei gleich lange Sehnen von einer dritten so geschnitten, dass ein Abschnitt der einen gleich einem Abschnitt der andern ist, so sind auch die äusseren Abschnitte der dritten Sehne einander gleich. — 256. Geht eine von zwei gleich grossen Kreislinien durch den Mittelpunkt der andern, so sind auf jeder, mit der Verbindungslinie der Mittelpunkte parallelen, Sehne die äusseren Abschnitte dem Radius gleich. — 257. Schneidet die Verlängerung eines Durchmessers eine Secante so, dass der äussere Abschnitt derselben gleich dem Radius ist, so ist einer der beiden Bogen zwischen Durchmesser und Sehne das Dreifache des andern. — 258. Zieht man durch den einen Schnittpunkt zweier Kreislinien zwei gemeinsame Sehnen und verbindet deren Endpunkte mit dem anderen Schnittpunkte, so haben die beiden über den Sehnen stehenden Dreiecke gleiche Winkel unter einander und mit dem Dreieck, dessen Ecken der erste Schnittpunkt und die Mittelpunkte sind. — 259. Zieht man in einem Dreieck aus dem Scheitel des Winkels $\alpha$ die Linien $h_1$, $m_1$, $r$, so sind die Winkel $(h_1 m_1) = (m_1 r)$ $= \frac{\beta - \gamma}{2}$, und $(bh_1) = (cr)$. — 260. Verlängert man die Höhen eines spitzwinkligen Dreiecks über ihre Fusspunkte hinaus um ihre unteren Abschnitte, so liegen die Endpunkte der Verlän-

gerungen mit den Ecken des Dreiecks auf derselben Kreislinie. — 261. Beschreibt man um einen Schnittpunkt zweier gleicher Kreislinien eine Kreislinie, welche die anderen schneidet, so liegen von den vier neuen Schnittpunkten zweimal zwei in gerader Linie mit dem andern Schnittpunkte der beiden Kreislinien.

262) In einer geg. Geraden einen Punkt zu bestimmen, von dem aus eine geg. Strecke unter einem geg. Winkel erscheint. — Einen Punkt zu finden, von dem aus 263) zwei Seiten eines geg. Dreiecks unter geg. Winkeln, 264) die drei Seiten eines geg. Dreiecks unter gleichen Winkeln erscheinen. — Aus $a$ und $\alpha$ ein Dreieck zu zeichnen, in welchem 265) auf $a$ der Fusspunkt von $m_1$ gegeben ist, 266) die Mittellinie $t_1$ den Winkel $\alpha$ im Verhältniss von $p:q$ theilt. (Specieller Fall von A. 263). — 267) Ein Quadrat von einer geg. Ecke aus so zu zeichnen, dass die gegenüberliegenden Seiten durch zwei geg. Punkte gehen. 167.

Ein Dreieck zu zeichnen aus 268) $a$, $b$, $t_1$, 269) $a$, $\beta$, $t_1$, 270) $a$, $\alpha$, $t_1$, 168.

271) $a$, $t_1$, $h_1$, 272) $\beta$, $t_1$, $h_1$, 273) $a$, $\alpha$, $h_1$, 274) $a$, $b$, $h_3$, 275) $a$, $h_2$, $t_2$, 276) $a$, $h_2$, $t_1$, 277) $\alpha$, $h_2$, $t_3$, 278) $\alpha$, $h_2$, $h_3$, 279) $a$, $h_2$, $h_3$, 280) $a$, $\alpha$ und Differenz der durch $h_1$ gebildeten Abschnitte von $a$, 281) $a$, $h_2$, $t_3$ (127), 282) $\alpha$, $t_1$, $h_2$ (127), 283) $a$, $h_1$, $t_2$ (133), 284) $b+c$, $h_3$, $\beta$, 285) $b-a$, $c$, $h_2$, 286) $p$, $h_1$, $\beta$, 287) $p_2$, $h_3$, $\alpha$, 288) $h_3$, $\alpha$, $\beta$, 289) $a+h_3$, $b$, $\beta$, 290) $a-h_3$, $\alpha$, $\beta$, 291) $h_3$, $m_3$, $\gamma$, 292) $a$, $b$, $h_1 \pm h_2$ (A. 148), 293) $\alpha$, $\beta$, $h_1 \pm h_2$ (A. 148), 294) $a \pm b$, $h_1 \pm h_2$, $\alpha$ (A. 148), 295) $c$, $m_1$, $\beta-\gamma$ (A. 259), 296) wenn geg. ist die Lage von $a$ und die Fusspunkte von $h_2$ und $h_3$, 297) die Mitte von $b$ und die Fusspunkte von $h_2$ und $h_3$. 169.

298. Die Mitten aller aus einem Punkte der Kreislinie gezogenen Sehnen liegen auf einer Kreislinie. 170.

299. Von allen durch einen Punkt innerhalb der Kreisfläche gehenden Sehnen ist diejenige die kleinste, welche in diesem Punkte halbirt wird. 176.

300. Unter allen Senkrechten, die man von Punkten der Kreislinie auf eine ausserhalb derselben liegende Gerade fällen kann, ist diejenige die grösste, welche durch den Mittelpunkt geht, diejenige die kleinste, deren Verlängerung durch den Mittelpunkt geht. 177.

301. Liegen die Ecken eines Dreiecks auf einer Kreislinie, und fällt man aus einem Punkte der letzteren die Senk- 178.

rechten auf die Seiten, so liegen die Fusspunkte derselben in gerader Linie (Umk. z. 61).

179. 302) In der Verlängerung eines geg. Durchmessers einen Punkt so zu bestimmen, dass die aus ihm an die Kreislinie gezogene Tangente gleich einer geg. Strecke ist. — Einen Punkt so zu bestimmen, dass die von ihm an zwei gegebene Kreislinien gezogenen Tangenten 303) gleich geg. Strecken sind, 304) einen geg. Winkel bilden, der durch die auf die Verbindungslinie ihrer Mittelpunkte gefällte Senkrechte halbirt wird (84).

180. In eine geg. Kreislinie eine geg. Strecke als Sehne so einzutragen, 305) dass sie durch einen innerhalb der Kreisfläche geg. Punkt geht, 306) dass ihre Verlängerung durch einen ausserhalb der Kreisfläche geg. Punkt geht (163), 307) dass sie einer geg. Geraden parallel wird, 308) dass sie von einer geg. Sehne halbirt wird. — In eine geg. Kreislinie parallel einer geg. Geraden eine Sehne so zu zeichnen, dass sie 309) von einer geg. Sehne, 310) von einer geg. Kreislinie halbirt wird. — 311) Aus dem einen Endpunkt eines Durchmessers bis zu der im andern Endpunkt gezogenen Tangente eine Secante so zu ziehen, dass ihre beiden Abschnitte einander gleich sind (165).

185. 312) Ein Dreieck zu zeichnen, welches mit einem geg. Dreieck gleiche Winkel hat, und dessen Ecken auf einer geg. Kreislinie liegen.

186. **313.** Zieht man aus einem Punkte, dessen Abstand vom Kreismittelpunkte gleich dem Durchmesser ist, die Tangenten an die Kreislinie, so ist der Winkel derselben $\frac{2}{3} R$.

193. Eine Kreislinie zu construiren aus 314) $r$, $A$, $B$, 315) $A$, $B$, $C$,*)

194. 316) $r$, $A$, $a$, 317) $A$, $B$, $a$,

195. 318) $a$, $a_1$, $A$, 319) $a$, $a_1$, $B$,

196. 320) $a$, $b$, $A$, 321) $a$, $a_1$, $b$,

197. 322) $r$, $A$, $b$, 323) $r$, $a$, $b$.

198. 324) Zu einer Seite eines geg. Dreiecks eine Parallele so zu ziehen, dass die Seite gleich der Summe der zwischen den Parallelen liegenden Abschnitte ist. (106)

---

*) Bezeichnungen im Kreise: $r$ Radius, $O$ Mittelpunkt, $A$ $C$ Punkte der Kreislinie, $abc$ Tangenten mit verschiedener Richtung ($A$ liegt auf $a$, $B$ auf $b$, u. s. w.), $aa_1$ parallele Tangenten, $k_1$, $k_2$ .. gegebene Kreislinien, $K_1$, $K_2$ .. gegebene Punkte dieser Kreislinien.

325) Ein Dreieck zu zeichnen, von welchem die Fusspunkte 201.
der Höhen gegeben sind.

326. Verbindet man zwei Ecken eines Dreiecks mit dem 202.
Mittelpunkte des Inkreises, so ist der Winkel der Verbindungslinien gleich $R +$ dem halben Winkel an der dritten Ecke.

Ein Dreieck zu zeichnen aus $r$ und 327) $a, b$, 328) $a, h_1$, 329) $a, \beta$, 330) $a, h_2$, 331) $\alpha, \beta$, 332) $h_1, t_1$, 333) $h_1, \alpha$, 334) $t_1, \alpha$, 335) $b, \beta-\gamma$, 336) $c, \beta-\gamma$, 337) $a, \beta-\gamma$, 338) $b \pm c, \beta$, 339) $b-c, \gamma$, 340) $a, b \pm c$, 341) $\alpha, b \pm c$, 342) $\alpha, p$, 343) $a, t_2$, 344) $\alpha, t_2$; dgl. aus $\varrho$ und 345) $\alpha, \beta$, 346) $a, m_1$, 347) $a, \beta$, 348) $a, h_2$, 349) $\alpha, h_2$, 350) $h_1, t_1$; 351) dgl. ein gleichseitiges Dreieck aus $r \pm \varrho$.

352. In jedem Sehnenpolygon von gerader Seitenzahl ist 206.
die Summe des 1, 3, $5^{\text{ten}}$.. Winkels gleich der des 2, 4, $6^{\text{ten}}$.. — 353. Die auf einer Sehne in ihren Endpunkten errichteten Senkrechten schneiden auf jedem Durchmesser von seinen Endpunkten aus zwei gleiche Stücke ab (134). — 354. Sind in einem Sehnenviereck zwei anstossende Seiten gleich, so sind die ihnen anliegenden Winkel gleich den Winkeln der Diagonalen. — 355. Die Halbirungslinien der Winkel eines Vierecks bilden ein Sehnenviereck. — 356. Verbindet man drei beliebige Punkte auf den Seiten eines Dreiecks mit einander, so schneiden sich die Umkreise der drei äusseren Dreiecke in einem Punkte. — 357. Beschreibt man um die Seiten eines Sehnenvierecks als Durchmesser Kreislinien, so bilden die vier zweiten Schnittpunkte je zweier benachbarter Kreislinien ein neues Sehnenviereck. 358. Halbirt man in einem Sehnenviereck die Winkel an den Schnittpunkten der Diagonalen und der Verlängerungen je zweier Gegenseiten, so sind von den 6 Halbirungslinien zweimal drei parallel. 358. Construirt man über jeder Seite eines beliebigen Dreiecks $(\overline{ABC})$ nach aussen ein gleichseitiges Dreieck $(\overline{A_1BC}, \overline{B_1AC}, \overline{C_1AB})$, so schneiden sich die Linien $AA_1$, $BB_1$, $CC_1$ in demselben Punkte wie die Umkreise der gleichseitigen Dreiecke.

360. In jedem Tangentenpolygon von gerader Seitenzahl 207.
die Summe der 1, 3, $5^{\text{ten}}$.. Seite gleich der der 2, 4, $6^{\text{ten}}$... — .. Ist ein Rechteck dem Kreise einbeschrieben, so bilden in seinen Ecken gezogenen Tangenten einen Rhombus.

362. Verbindet man in einem regelmässigen Polygon von 208.
erader Seitenzahl ($n$) eine Ecke mit den Endpunkten der enüberliegenden Seite, so entsteht ein gleichschenkliges

Dreieck, in welchem ein Basiswinkel $\frac{n-1}{2}$ mal grösser ist als der Winkel an der Spitze.

211. **363**) In ein geg. gleichseitiges Dreieck ein anderes von geg. Seite so zu zeichnen, dass die Ecken des zweiten auf den Seiten des ersten liegen.

216. **364.** Trägt man auf jeder Seite eines Quadrats von beiden Endpunkten aus die halbe Diagonale ab, so sind die Endpunkte die Ecken eines regelmässigen Achtecks.

218. **365**) Ein gleichseitiges Dreieck so abzustumpfen, dass ein regelmässiges Sechseck entsteht.

229. **366.** Zwei Kreislinien können sich nicht gegenseitig halbiren (165).

230. Schneiden sich zwei gleiche Kreislinien, so sind 367. die abgeschnittenen Bogen der einen gleich denen der andern, und die Centrallinie wird durch die gemeinsame Sehne halbirt; 368. jede durch den Schnittpunkt dieser Linien zwischen den äusseren oder inneren Bogen gezogene Strecke wird in diesem Punkte halbirt.

**369**) Den geom. Ort für den Mittelpunkt eines Kreises zu bestimmen, der einen gegebenen Radius hat, und einen geg. Kreis unter einer Sehne von gegebener Länge ($s$) schneidet. — Eine Kreislinie zu construiren aus 370) $r, A, s$, 371) $r, a, s$, 372) $r, s_1, s_2$.

231. **373.** Jede durch den Berührungspunkt zweier Kreislinien gezogene Secante schneidet Bogen mit gleichen Centriwinkeln ab. Die nach den Schnittpunkten dieser Geraden gehenden Radien sind parallel. — 374. Die Sehnen, welche die Schnittpunkte zweier durch den Berührungspunkt zweier Kreislinien gehenden Secanten verbinden, sind parallel.

**375**) Aus drei gegebenen Mittelpunkten drei einander von aussen berührende Kreislinien zu zeichnen (202). — Drei einander von aussen berührende gleiche Kreislinien so zu zeichnen, dass jede 376) eine gegebene Kreislinie von innen, 377) zwei Seiten eines gleichseitigen Dreiecks berührt.

236. Eine Kreislinie zu construiren aus 378) $A, k_1, K_1$,

237. **379**) $a, a_1, k_1$, 380) $r, a, k_1$, 381) $r, A, k_1$, 382) $r, k_1, k_2$ 383) $K_1, k, k_1$ (concentrisch), 384) $A, k, k_1$, 385) $K, k, k$ (gleich gross), 386) $k, k, k$, 387) $r, k, k$.

239. **388**) Durch einen geg. Punkt eine Gerade zu ziehen, welche verlängert durch den nicht gegebenen Schnittpunkt von zwei geg. Geraden gehen würde. — Durch einen zwischen der

Schenkeln eines Winkels geg. Punkt eine Gerade so zu ziehen, dass die 389) auf ihr selbst, 390) auf den Schenkeln des Winkels abgeschnittenen Stücke ein gegebenes Verhältniss haben.

Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn die Seiten des einen 245.
391. denen des anderen parallel sind, 382. auf denen des anderen senkrecht stehen. — 393. Zwei rechtwinklige Dreiecke sind ähnlich, wenn ein spitzer Winkel, 394. gleichschenklige, wenn der Winkel an der Spitze oder ein Basiswinkel in beiden gleich ist. — 395. Verlängert man die Seiten zweier ähnlicher Dreiecke, bis je zwei homologe Seiten sich schneiden, so sind die drei Winkel an diesen Schnittpunkten einander gleich. — 396. Im gleichschenkligen Dreieck verhält sich der Schenkel zur Höhe auf der Basis, wie der obere Abschnitt der Höhe auf dem Schenkel zur Hälfte der Basis. — 397. Verlängert man die Höhen eines spitzwinkligen Dreiecks bis zur Peripherie des Umkreises, so ist jede Verlängerung gleich dem unteren Abschnitte der zugehörigen Höhe.

Ein Dreieck zu zeichnen, welches einem geg. Dreieck ähnlich ist, aus 398) $a$, 399) $h_1$. — 400) Dgl. ein rechtwinkliges Dreieck aus $c$, $a:b$. — 401) Dgl. ein gleichschenkliges aus $h_1$, $a:b$. — Dgl. ein Dreieck aus 402) $a$, $a:b$, $a:c$, 403) $a$, $b+c$, $b:c$, 404) $a$, $\beta$, $b:c$, 405) $a$, $\alpha$, $b:c$, 406) $a$, $r$, $b:c$, 407) $\alpha$, $\beta$, $a+h_1$, 408) $\alpha$, $h_1$, $b:c$. — 409) Durch einen von drei gegebenen Punkten eine Gerade so zu ziehen, dass dieser Punkt gleichen Abstand hat von den Fusspunkten der Senkrechten, die man von den beiden andern Punkten auf die Gerade fällen kann (33). — 410) Ein gleichseitiges Dreieck zu zeichnen, dessen Ecken auf drei gegebenen Parallelen liegen. (Ein Theil des Dreiecks ist durch die in A. 408 gegebenen Stücke bekannt.) — 411) Ein Dreieck zu zeichnen, wenn die Punkte gegeben sind, in denen die Verlängerungen seiner Höhen den Umkreis treffen (A. 397).

Ist das Punktepaar $A_1B_1$ harmonisch mit $AB$, und $M$ 252.
Mitte von $AB$, so ist 412. $AB \,.\, A_1B_1 = 2AA_1 \,.\, BB_1 = A_1 \,.\, AB_1$, 413. $AB^2 + A_1B_1{}^2 = (AA_1 + BB_1)^2$, 414. $MA_1 : MB_1$ $BA_1{}^2 : BB_1{}^2 = AA_1{}^2 : AB_1{}^2$, 415. $AA_1 \,.\, BA_1 = MA_1 \,.\, A_1B_1$, 3. $MA \,.\, A_1B_1 = AA_1 \,.\, BB_1$.

**417.** Wenn in einem Dreieck die Halbirungslinie eines 253.
nkels die Gegenseite halbirt, so ist das Dreieck gleichenklig. (Warum nicht nach 104?) — 418. Wenn die Basis es gleichschenkligen Dreiecks in drei gleiche Theile getheilt

ist, und die Theilpunkte mit der Spitze verbunden sind, so theilen die Verbindungslinien den Winkel an der Spitze nicht in drei gleiche Theile.

255. **419.** Einen Punkt zu bestimmen, dessen Abstände von den Ecken eines Dreiecks sich wie drei geg. Strecken verhalten. — 420. Ein Dreieck zu zeichnen aus $a$, $\alpha$ und dem Fusspunkt der Halbirungslinie von $\alpha$.

257. **421.** Sind durch einen Punkt $S$ der Kreislinie zwei Secanten gezogen, von denen die erste durch den Mittelpunkt geht, und ist in einem Punkte der ersten eine Senkrechte errichtet, so ist, wenn die Schnittpunkte der Secanten mit der Kreislinie $A$ und $B$, mit der Senkrechten $A_1$ und $B_1$ sind: $SA \,.\, SA_1 = SB \,.\, SB_1$. — 422. Wenn in einem Viereck auf den beiden Diagonalen oder auf zwei Gegenseiten die Producte aus den vom Schnittpunkt ausgehenden Abschnitten einander gleich sind, so ist es ein Sehnenviereck.

**423)** Zu drei gegebenen Strecken $a$, $b$, $c$ zwei andre $x$, $y$ zu finden, so dass $a : x = y : b$ und $x \pm y = c$ ist.

258. **424.** Ist im Dreieck $\overline{ABC}$ auf der Verlängerung von $BC$ ein Punkt $S$ so gelegen, dass $SA^2 = SB \,.\, SC$, so ist $SA$ Tangente an den Umkreis des Dreiecks. — 425. Jede Tangente ist grösser als der äussere Abschnitt einer aus ihrem Endpunkte gezogenen Secante, und kleiner als die ganze Secante. — 426. Ist eine Tangente doppelt so gross als der äussere Abschnitt einer aus ihrem Endpunkte gezogenen Secante, so ist die ganze Secante viermal so gross als ihr äusserer Abschnitt. — 427. Haben die Endpunkte zweier Secanten gleichen Abstand vom Mittelpunkte des Kreises, so ist das Product der von den Endpunkten ausgehenden Abschnitte auf der einen so gross wie auf der andern.

Eine Kreislinie zu zeichnen aus 428) $A, B, c$, 429) $a, b, C$ 430) $a, b, k_1$ (A. 429), 431) $A, B, k_1$ (A. 422), 432) $A, b, k_1$ (A. 421, 422, 428). — Dgl. eine Kreislinie, deren Mittelpunkt auf einer geg. Geraden liegt, aus 433) $A, b$ (A. 428), 434) $A. k_1$ (A. 431), 435) $a, k_1$ (A. 433), 436) $k_1, k_2$ (A 434). — 437) Du h einen geg. Punkt eine Gerade so zu ziehen, dass auf ihr dr h zwei geg. concentrische Kreislinien drei gleiche Stücke ab-schnitten werden.

259. **438.** Errichtet man in den Endpunkten der Hypoten e eines rechtwinkligen Dreiecks Senkrechten, welche von n Verlängerungen der Katheten $a$ und $b$ die Stücke $a_1$ un $b_1$ abschneiden, so ist $c^2 = aa_1 \pm bb_1$ und $ab = a_1 b_1$. — 439. t

im gleichschenkligen Trapez die Diagonale gleich der grösseren parallelen Seite $a$ (während $b$ die kleinere parallele und $c$ die nicht parallele Seite ist), so ist $c^2 = a(a-b)$, und $ab = a^2 - c^2$.

**440.** In jedem Sehnenviereck ist das Product der Diagonalen gleich der Summe der Producte aus je zwei Gegenseiten (Satz des Ptolemäus,*) 166, 245). — 441. Wenn in einem gleichschenkligen Dreieck ($a > b$) die Schenkel auf der Basis von ihren Endpunkten aus abgetragen, und die Endpunkte mit der Spitze verbunden werden, so ist jede dieser Verbindungslinien die mittlere Proportionale zwischen dem Schenkel und dem mittelsten Stück der Basis. — 442. Wenn in demselben Dreieck (A. 441) die Basiswinkel vom Winkel an der Spitze von beiden Schenkeln aus abgetragen werden, so ist jeder Schenkel mittlere Proportionale zwischen der Basis, und dem Schenkel des kleineren gleichsch. Dreiecks. — 443. Ist in einem Dreieck die Seite $a$ durch $m_1$ in die Abschnitte $a_1$ und $a_2$ getheilt, so ist $m_1{}^2 = bc - aa_1$ (257).

**444**) Durch den einen Schnittpunkt zweier Kreislinien eine Gerade so zu ziehen, dass die Summe der Sehnen einer geg. Strecke gleich ist (A. 258, 398).

Eine Kreislinie zu zeichnen, die eine gegebene Kreislinie 262.
rechtwinklig schneidet, aus 445) $O$, 446) $r$, $A$.

**447**) Eine Kreislinie zu zeichnen, die drei gegebene Kreis- 263.
linien rechtwinklig schneidet.

**448**) Eine Kreislinie zu zeichnen, die eine gegebene K. 264.
berührt, und mit einer anderen geg. K. eine gegebene Gerade zur Potenzlinie hat.

**449.** Sind $O$, $O_1$, $O_2$ die Mittelpunkte, $r$, $r_1$, $r_2$ die Radien 265.
dreier Kreislinien, so ist, wenn die gemeinsame Sehne der Kreise $O$ und $O_1$ gleich $2r_1$, und die von $O$ und $O_2$ gleich $2r_2$ ist, $OO_1{}^2 - OO_2{}^2 = r_2{}^2 - r_1{}^2$. (Kreis $O$ schneidet die Kreise $O_1$ und $O_2$ „im Durchmesser".) — 450. Der geom. Ort des Mittelpunktes eines Kreises, der zwei gegebene Kreise in ihren Durchmessern schneidet, ist eine zur Centrallinie dieser Kreise [se]nkrechte Gerade (ihr „zweiter Potenzort"), deren Fuss[pu]nkt man erhält, wenn man den Abstand des einen Mittel[pu]nktes von der Potenzlinie vom andern Mittelpunkt aus in [en]tgegengesetzter Richtung auf der Centrallinie abträgt. — [45]1. Alle Kreislinien, welche zwei geg. Kreislinien im Durch-

*) Cl. Ptolemäus, alexandrinischer Astronom und Mathematiker, im [zw]eiten Jahrhundert n. Chr.

messer schneiden, gehen durch dieselben zwei Punkte der Centrallinie. — 452. Alle Kreislinien, die eine geg. Kreislinie im Durchmesser schneiden, und deren Mittelpunkte auf einer Geraden liegen, schneiden sich in denselben zwei, mit dem Mittelpunkt der geg. Kreislinie in gerader Linie liegenden Punkten. — 453. Liegt ein Punkt auf dem zweiten Potenzort zweier Kreislinien, so ist die Differenz seiner Potenzen gleich der doppelten Differenz der Quadrate der Radien. — 454. Die zweiten Potenzörter dreier Kreislinien schneiden sich in einem Punkte. — 455. Sind $O$, $O_1$, $O_2$ die Mittelpunkte, $r$, $r_1$, $r_2$ die Radien dreier Kreislinien, so ist, wenn der Kreis $O$ den Kreis $O_1$ rechtwinklig, und den Kreis $O_2$ im Durchmesser schneidet, $OO_1^2 - OO_2^2 = r_2^2 + r_1^2$. — 456. Der geom. Ort des Mittelpunktes eines Kreises, der einen geg. Kreis rechtwinklig, und einen andern geg. Kreis im Durchmesser schneidet, ist eine zur Centrallinie dieser Kreise senkrechte Gerade (ihr „dritter Potenzort“), deren Fusspunkt $O$ durch A. 455 bestimmt ist. — 457. Alle Kreislinien, die eine geg. Kreislinie rechtwinklig, und eine andre geg. Kreislinie im Durchmesser schneiden, gehen durch dieselben zwei Punkte der Centrallinie. — 458. Liegt ein Punkt auf dem dritten Potenzort zweier Kreislinien, so ist die Differenz seiner Potenzen gleich dem doppelten Quadrat des Radius des im Durchmesser geschnittenen Kreises. — 459. Bei drei gegebenen Kreislinien schneiden sich je zwei dritte Potenzörter mit einem zweiten in demselben Punkte, ebenso je zwei dritte Potenzörter mit einer Potenzlinie.

267. **460)** In einem Dreieck einen Punkt zu bestimmen, dessen Abstände von den drei Seiten in gegebenen Verhältnissen stehen.

274. **461.** Der Schwerpunkt eines Dreiecks liegt in gerader Linie zwischen dem Mittelpunkte des Umkreises und dem Schnittpunkte der Höhen, und zwar doppelt so weit vom letzteren als vom ersteren. — 462. Der obere Abschnitt jeder Höhe im Dreieck ist doppelt so gross als die auf derselben Seite stehende Mittelsenkrechte. — 463. Die Verbindungslinie der Mitte einer Dreieckseite mit der Mitte des oberen Abschnittes der zugehörigen Höhe ist gleich dem Radius des Umkreises. — 464. In jedem Dreieck liegen die Mitten der Seiten, die Fusspunkte der Höhen, und die Mitten der oberen Abschnitte der Höhen auf einer Kreislinie. Der Mittelpunkt derselben liegt in der Mitte zwischen dem Schnittpunkte der Höhen und dem Mittelpunkte des Umkreises; ihr Radius

halb so gross als der des Umkreises. (Kreis der neun Punkte.)

Ein Dreieck zu zeichnen aus 465) $t_1$, $t_2$, $t_3$, 466) $t_1$, $t_2$, $h_1$, 467) $a$, $t_2$, $t_3$, 468) $t_1$, $t_2$, $h_3$, 469) $t_1$, $t_2$ und Winkel $(t_1 t_2)$, 470) $a$, $t_1 \pm t_2$, Winkel $(t_1 t_2)$, 471) $a$, $t_1 : t_2$, Winkel $(t_1 t_2)$. — 472) In einem geg. Dreieck einen Punkt so zu bestimmen, dass seine Verbindungslinien mit den Ecken die Fläche des Dreiecks in drei gleiche Theile theilen.

Eine Kreislinie zu zeichnen aus 473) $a$, $A$, $k_1$, 474) 279.
$a$, $k_1$, $K_1$, 475) $k_1$, $K_1$, $k_2$.

Methode c). — 476) In ein geg. Dreieck ein Quadrat 280.
so zu zeichnen, dass zwei Ecken auf einer Seite, die beiden andern Ecken auf den beiden andern Seiten liegen. — 477) In ein geg. Quadrat ein gleichseitiges Dreieck so zu zeichnen, dass eine Ecke des Dreiecks in eine Ecke des Quadrats, und die andern beiden Ecken in zwei Seiten des Quadrates fallen. — 478) Zwischen zwei Seiten eines geg. Dreiecks eine Strecke zu ziehen, welche gleich jedem der unteren Abschnitte dieser Seiten ist. — 479) In ein geg. Dreieck ein andres Dreieck so zu zeichnen, dass es einem geg. Dreieck ähnlich, und eine seiner Seiten einer Seite des ersten Dreiecks parallel ist. — 480) In einen geg. Halbkreis ein Quadrat so zu zeichnen, dass eine Seite in den Durchmesser fällt. — 481) In einen geg. Quadranten ein Quadrat so zu zeichnen, dass zwei Ecken auf dem Bogen, zwei auf den Radien liegen. — Ein Dreieck zu zeichnen aus 482) $\alpha$, $\beta$, $t_1$, 483) $\alpha$, $\beta$, $r$, 484) $\alpha$, $\beta$, $m_1$, 485) $h_1$, $t_2 : t_3$, Winkel $(t_2 t_3)$. — Ein Viereck zu zeichnen aus 486) einer Diagonale und den vier Winkeln, welche die andere Diagonale mit den Seiten bildet, 487) einer Seite und den vier Winkeln, welche die Diagonalen an den gegenüberliegenden Ecken mit den anderen Seiten bilden, 488) einer Seite, den anliegenden Winkeln und den Verhältnissen der anderen Seiten.

Methode d). — 489) Ein Dreieck aus gegebenen Winkeln so zu zeichnen, dass eine Ecke in einem geg. Punkte, und die andern Ecken in zwei geg. Geraden liegen. — 490) Aus einem geg. Punkte drei geg. Strecken so zu ziehen, dass ihre Endpunkte drei Ecken eines Quadrates sind. — 491) Ein Polygon zu zeichnen, welches einem geg. Polygon ähnlich ist, und von welchem drei Ecken auf den Seitenlinien eines geg. Dreiecks liegen. — 492) Durch zwei auf einer Geraden geg. Punktepaare zwei Parallelenpaare so zu ziehen, dass dieselben ein

Quadrat einschliessen. — 493) Ein Quadrat zu zeichnen, dessen Ecken auf vier gleichweit von einander entfernten geg. Parallelen liegen. — 494) Ein Dreieck zu zeichnen, dessen Ecken auf drei geg. concentrischen Kreislinien liegen (255). — 495) Ein geg. Dreieck so zu legen, dass seine Ecken auf den Seitenlinien eines anderen geg. Dreiecks liegen (167, A. 444).

289. **496**) An zwei gegebene Kreislinien die gemeinsamen Tangenten zu ziehen. — 497) In eine geg. Kreislinie eine geg. Strecke als Sehne so einzutragen, dass ihre Verlängerung eine andere geg. Kreislinie berührt.

297. **498**) Eine Kreislinie zu zeichnen aus $A$, $k_1$, $k_2$.

299. **499.** Die Mitten der Diagonalen eines vollständigen Vierecks liegen auf einer Geraden.

312. **500.** Im Dreieck $\overline{ABC}$ sei $MD \parallel AB$. Sei $M_1$ der Schnittpunkt von $MB$ und $AD$; $A_1$ der von $CM_1$ und $AB$. Ferner sei $M_2$ der Schnittpunkt von $MB$ und $A_1D$; $A_2$ der von $CM_2$ und $AB$, u. s. w. Dann ist $AB = 2 \,.\, A_1B = 3 \,.\, A_2B = 4 \,.\, A_3B$, u. s. w.

345. **501**) Eine Kreislinie zu zeichnen aus $k_1$, $k_2$, $k_3$. (Apollonisches*) Berührungsproblem.)

352. **502**) Die Formeln $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ geometrisch darzustellen. (Vgl. A. 167.)

354. **503.** Ist ein Dreieck einem zweiten, und dieses einem dritten so einbeschrieben, dass die Seiten des ersten denen des dritten parallel sind, und sind $F_1$, $F_2$, $F_3$ ihre Flächen, so ist $F_1 : F_2 = F_2 : F_3$. — 504. Die Fläche eines Sehnenvierecks, dessen Diagonalen senkrecht auf einander stehen, ist gleich der halben Summe der Producte je zweier Gegenseiten (A. 440).

Ein Dreieck in ein andres zu verwandeln, 505) mit gleicher Grundlinie und gegebenem Gegenwinkel, 506) welches einem geg. Dreieck ähnlich ist, 507) gleichschenklig mit geg. Winkel an der Spitze, 508) gleichseitig (A. 505, 507). — Ein gegebenes 509) gleichschenkliges, 510) ungleichseitiges Dreieck in ein Parallelogramm von gleichem Umfang zu verwandeln (145).

355. **511**) Ein Dreieck zu zeichnen aus $h_1$, $h_2$, $h_3$ (Meth. c).

356. **512.** Trapeze mit gleicher Höhe und Mittellinie sind flächengleich. — 513. Theilt man die Mittellinie eines Trapezes in $n$ gleiche Theile, und zieht durch die Theilpunkte zwischen den parallelen Seiten beliebige, sich nicht schneidende Strecken, so wird das Trapez in $n$ gleiche Theile getheilt. — 514. Verbindet man einen beliebigen Punkt der Mittellinie eines Tra-

*) Apollonius von Perga, alexandrinischer Mathematiker, um 200 v. Chr.

pezes mit den Ecken, so ist die Summe der an den Parallelen liegenden Dreiecke gleich der Summe der beiden anderen.

515) Ein Trapez in ein Rechteck zu verwandeln. — 516) Ein Parallelogramm durch Strecken, die von einem auf einer Seite geg. Punkt ausgehen, in $n$ gleiche Theile zu theilen.

**517.** Die Flächen zweier Dreiecke verhalten sich, wenn zwei ihrer Winkel Supplementwinkel sind, wie die Producte der diese Winkel einschliessenden Seiten. — 518. Zwei Dreiecke sind flächengleich, wenn sie in zwei Seiten übereinstimmen, und die eingeschlossenen Winkel Supplementwinkel sind. — 519. Construirt man über jeder Seite eines Dreiecks nach aussen ein Quadrat und verbindet die Endpunkte je zweier von derselben Ecke des Dreiecks ausgehender Quadratseiten, so sind die entstehenden Dreiecke unter sich und mit dem gegebenen flächengleich. — 520. Ein Viereck, dessen Fläche durch jede seiner Diagonalen halbirt wird, ist ein Parallelogramm. — 521. Die Fläche jedes Dreiecks ist gleich dem Producte seiner drei Seiten, dividirt durch den doppelten Durchmesser des Umkreises. — 522. Die Diagonalen eines Sehnenvierecks verhalten sich wie die Summen der Producte aus je zwei an einem ihrer Endpunkte zusammenstossenden Seiten. 358.

**523)** Von einem geg. Dreieck eine Seite einer geg. Geraden parallel zu machen, ohne dass der Inhalt geändert wird.

**524.** Stehen die Diagonalen eines Vierecks auf einander senkrecht, so sind die Summen der Quadrate aus je zwei Gegenseiten einander gleich, und die Summe der Quadrate der Diagonalabschnitte ist halb so gross als die Summe der Quadrate der Seiten. — 525. Sind von einem Punkte $P$ aus Senkrechten $PA_1$, $PB_1$, $PC_1$ auf die Seitenlinien $BC$, $CA$, $AB$ eines Dreiecks gefällt, so ist $AB_1^2 + CA_1^2 + BC_1^2 = AC_1^2 + BA_1^2 + CB_1^2$. — 526. Fällt man im gleichschenkligen Dreieck die Höhe auf einen Schenkel, so ist die Basis mittlere Proportionale zwischen der Summe der Schenkel und dem unteren Abschnitt des einen. 362.

Ein Quadrat zu zeichnen, welches 527) gleich der Summe, 528) gleich der Differenz zweier gegebener Quadrate, 529) $n$-mal so gross als ein gegebenes Quadrat ist.

**530.** Beschreibt man über der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks nach innen, und über den Katheten nach aussen Halbkreise, so ist die Summe der Flächen der beiden 363.

mondförmigen Figuren (lunulae Hippocratis*)) gleich der Fläche des Dreiecks.

**531**) Ein Polygon zu zeichnen, welches gleich der Summe zweier gegebener Polygone ist.

364. **532.** Errichtet man über den Seiten eines Dreiecks nach aussen Quadrate, und fällt aus jeder Ecke des Dreiecks die Senkrechte auf die zur Gegenseite parallele Seitenlinie des Quadrates, so sind von den entstehenden 6 Rechtecken je zwei an derselben Ecke des Dreiecks liegende flächengleich (141, 91).

366. **533.** Die Summe der Quadrate der Seiten eines Vierecks ist gleich der Summe der Quadrate der Diagonalen, vermehrt um das vierfache Quadrat der Verbindungsstrecke der Mitten der Diagonalen. — 534. Die Summe der Quadrate der Seiten eines Parallelogramms ist gleich der Summe der Quadrate seiner Diagonalen.

## B. Sätze und Aufgaben aus der rechnenden Geometrie.

**535.** Das Dreieck, welches aus den Seiten des demselben Kreise einbeschriebenen Fünfecks, Sechsecks und Zehnecks gebildet wird, ist rechtwinklig. — 536. Verlängert man die Höhe eines gleichseitigen Dreiecks über die Spitze hinaus um die Länge einer Seite, theilt die Verlängerung in sechs gleiche Theile und verbindet die Theilpunkte mit den Endpunkten der Grundlinie, so sind die Endpunkte der Verlängerung die Mittelpunkte des regelmässigen 6- und 12-Ecks über der Grundlinie als Seite, die Theilpunkte aber näherungsweise die Mittelpunkte des über derselben Seite stehenden 7, 8, 9, 10, 11-Ecks. (Fortsetzung dieser Construction!) — 537. Die Kreislinie ist näherungsweise gleich dem Umfange eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Katheten 3/5 und 6/5 des Durchmessers sind. — 538. In jedem Dreieck ist die Fläche gleich $\sqrt{pp_1p_2p_3}$, der Radius des Umkreises gleich $\frac{abc}{4\sqrt{pp_1p_2p_3}}$. — 539. Im Sehnenviereck ist $c=\sqrt{\frac{s_2s_3}{s_4}}$, $d=\sqrt{\frac{s_4s_3}{s_2}}$, $f^2=\sqrt{p_1p_2p_3p_4}$, $r=\frac{\sqrt{s_2s_3s_4}}{4f^2}$. — 540. Ist ein Viereck gleichzeitig Sehnen- und Tangentenviereck, so ist $f^2=\sqrt{aa_1bb_1}$, $r=\frac{1}{4}\sqrt{\frac{s_2s_3s_4}{aba_1b_1}}$, $\varrho=\frac{\sqrt{aba_1b_1}}{a+a_1}$.**)

---

*) Hippokrates von Chios, griechischer Mathematiker, um 450 v. Ch

**) Bezeichnungen im Viereck: $aba_1b_1$ Seiten (der Reihe nach

Die Fläche eines rechtwinkligen Dreiecks zu berechnen aus 541) $a, b$, 542) $a, c$, 543) $a, h_3$, 544) $a \pm b, c$; dgl. die Fläche eines gleichseitigen Dreiecks aus 545) $a$, 546) $h_1$, 547) $a \pm h_1$, 548) $r - \varrho$; dgl. die Fläche eines gleichschenkligen Dreiecks aus 549) $a, b$, 550) $b, h_1$, 551) $a, h_2$, 552) $h_1, h_2$, 553) $p, h_1$; dgl. die Fläche eines gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecks aus 554) $\varrho$, 555) $t_2$; dgl. die Fläche eines Quadrates aus 556) $d$, 557) $d \pm a$. — 558) In einen Kreis mit dem Radius $r$ ist ein Rechteck beschrieben, dessen Fläche gleich $f^2$ ist; wie gross sind seine Seiten? — 559) In einem Kreise (gegeben $r$) ist über der zum Centriwinkel $R$ gehörigen Sehne als Durchmesser nach aussen ein Halbkreis beschrieben. Man berechne Umfang und Fläche der mondförmigen Figur. — 560) Aus jeder Ecke eines gleichseitigen Dreiecks (gegeben $a$) ist ein die beiden andern Ecken verbindender Kreisbogen beschrieben. Man berechne Umfang und Inhalt der von den drei Bogen begrenzten Figur. — 561) Umfang und Fläche des zwei Kreisen (gegeben $r$) gemeinsamen Stückes zu berechnen, wenn der Mittelpunkt eines jeden auf der Peripherie des andern liegt. — 562) Drei gleichgrosse Kreislinien (gegeben $r$) berühren sich gegenseitig von aussen. Man soll Umfang und Inhalt der zwischen ihnen liegenden Figur bestimmen. — 563) Die Fläche des Segmentes zu berechnen, welches zwischen der Seite ($a$) eines gleichseitigen Dreiecks und der Peripherie des Umkreises liegt. — 564) Ein Kreis berührt den Bogen und die beiden Radien eines Quadranten (gegeben der Radius des letzteren, $r$). Man soll die Flächen der drei zwischen der Kreislinie und dem Umfang des Quadranten liegenden Figuren berechnen. — 565) Der Durchmesser eines Kreises (geg. $r$) ist in drei gleiche Theile $a, b, c$ getheilt. Es sind ferner vier Halbkreise beschrieben, nach der einen Seite über $a$ und $a + b$, nach der andern über $b + c$ und $c$ als Durchmesser. Man berechne die Flächen der drei Theile, in welche die Kreisfläche durch die 4 Halbkreise getheilt wird. — 566) Seite und Fläche eines gleichseitigen Dreiecks zu berechnen aus den Entfernungen ($a, b, c$) seiner Ecken von einer geg. Geraden. — 567) Auf dem Durchmesser $AB$ eines Halbkreises (geg. $r$) steht in $C$ eine senkrechte Strecke $a$, und über $AC$

(aus der Ecke $ba_1$) und $d$ (aus der Ecke $ba$) Diagonalen, $2p = a + b + d$; $p_1 = p - a$, $p_2 = p - b$, $p_3 = p - a_1$, $p_4 = p - b_1$; $s_2 = ab + a_1 b_1$, $= aa_1 + bb_1$, $s_4 = ab_1 + a_1 b$; $f^2$ Fläche.

und $CB$ als Durchmesser sind nach innen Halbkreise construirt. Wie gross ist die von den drei Halbkreisen begrenzte Fläche? — In eine Figur $a$ ist eine Figur $b$ so beschrieben, dass die Ecken von $b$ die Mitten der Seiten von $a$ sind; ebenso in $b$ eine Figur $a_1$; in $a_1$ eine Figur $b_1$, u. s. w. ins Unendliche. Wie gross ist die Summe der Umfänge und die der Flächen aller Figuren, wenn alle Figuren 568) Quadrate, 569) gleichseitige Dreiecke sind? Wie gross ist die Summe der Umfänge und die der Flächen der Figuren $a, a_1, \ldots$, oder der Figuren $b, b_1, \ldots$, wenn die ersteren Kreise und die letzteren 570) Quadrate, 571) gleichseitige, 572) gleichschenklig-rechtwinklige Dreiecke sind?*)

## C. Geometrische Aufgaben nach algebraischer Methode.**)

In einem geg. Dreieck $\overline{ABC}$ soll $XY \parallel BC$ so gezogen werden, dass 573) $XY = CY$, 574) $AX = CY$, 575) $XY^2 = AX . AB$, 576) $BX \pm CY = d$, 577) $\overline{AXY} = \frac{1}{2}\overline{ABC}$, 578) $\overline{AXY} = {}^m/_n\overline{ABC}$, 579) $XY = BX \pm CY$, 580) $XY = AX \pm CY$, 581) $XY = AX - BX$, 582) $XY = CY - AX$, 583) $AX + CY = d$, 584) $CY - AX = d$, 585) $BC \pm XY = AX \pm AY$, 586) $BC + XY = BX + CY$, 587) $\overline{AXY} = \overline{BCX}$, 588) $BC : XY = AX : BX$, 589) $BC : XY = AX : CY$, 590) $AX . CY = d^2$, 591) $XY^2 = BX . CY$, 592) $XY^2 = BX^2 + CY^2$, 593) $XY . BC = BX . CY$. — In einem geg. Dreieck $\overline{ABC}$ soll zwischen $AB$ und $AC$ eine Strecke $XY$ so gezogen werden, dass beide Theile des Dreiecks flächengleich sind, und 594) $CX = BY$ ist, 595) beide Theile gleichen Umfang haben. — Ein Dreieck in drei gleiche Theile zu theilen durch Linien, welche 596) auf einer Seite senkrecht stehen, 597) einer Seite parallel sind, 598) einer geg. Geraden parallel sind. — In ein geg. Dreieck $\overline{ABC}$ ein Rechteck zu zeichnen, dessen eine Seite auf $BC$ liegt, wenn 599) eine seiner Diagonalen $\parallel AB$ sein soll, 600) die Summe oder Differenz zweier anstossender Seiten, 601) das Verhältniss zweier anstossender Seiten, 602) die Diagonale, 603) der Inhalt des Rechtecks gegeben ist. — 604) Durch den Endpunkt $B$ eines Durchmessers $AB$ ist d Tangente an eine Kreislinie gelegt. Man soll eine Kreislin

*) Vgl. Th I, Nr. 143.

**) Die kleinen Buchstaben bedeuten gegebene Strecken. Man b zeichne jede Strecke, gleichviel ob bekannt oder unbekannt, durch ein kleinen lateinischen Buchstaben, ehe man sie in eine Gleichung einführ

zeichnen, welche durch $A$ geht, die Tangente berührt, und deren Mittelpunkt auf der geg. Kreislinie liegt. — 605) In ein geg. Quadrat ein anderes geg. Quadrat zu zeichnen. — 606) Aus einer Ecke eines Dreiecks bis zur Gegenseite eine Strecke zu ziehen, welche die mittlere Proportionale zwischen den auf der Gegenseite (bezw. ihrer Verlängerung) entstehenden Abschnitten ist. — 607) Die Seiten eines geg. Quadrates um gleiche Stücke so zu verlängern, dass das durch Verbindung der Endpunkte entstehende neue Quadrat eine geg. Fläche hat. — 608) Durch einen Schnittpunkt zweier Kreislinien eine Gerade so zu ziehen, dass die entstehenden Sehnen ein geg. Verhältniss haben. — 609) Ein Dreieck zu zeichnen aus $a$, $\alpha$, $m_1$ (166). — 610) In einen geg. Kreis ein gleichschenkliges Dreieck zu zeichnen, dessen Fläche gleich dem Quadrat seiner halben Höhe ist. — 611) Ein Rechteck in ein Quadrat zu verwandeln. — Ein Quadrat in ein Rechteck von geg. 612) Seite, 613) Diagonale, 614) Umfang, 615) Differenz zwischen Umfang und Summe der Diagonalen zu verwandeln. — 616) In einen geg. Kreis ein rechtwinkliges Dreieck zu zeichnen, dessen Seiten eine stetige geom. Proportion bilden. — 617) Um einen geg. Kreis einen Rhombus von geg. Fläche zu zeichnen. — 618) In ein geg. Quadrat ein Rechteck zu zeichnen, dessen Seiten ein geg. Verhältniss haben. — 619) In ein geg. Viereck einen Rhombus zu zeichnen, dessen Seiten den Diagonalen des Vierecks parallel werden. — 620) Ein Trapez durch eine Parallele zu den parallelen Seiten zu halbiren. — 621) Zwei Seiten $AB$ und $AC$ eines Dreiecks um gleiche Stücke $BB_1$ und $CC_1$ so zu verlängern, dass das Dreieck $\overline{AB_1C_1}$ einen geg. Flächeninhalt hat. — Ein gleichschenkliges Dreieck zu zeichnen aus 622) $h_2$, $t_2$, 623) $\varrho$, $h_2$. — 624) Durch einen geg. Punkt $P$ zwischen den Schenkeln eines Winkels die Strecke $XY$ so zu ziehen, dass $PX \,.\, PY$ gleich einer geg. Fläche $a^2$ ist. — 625) In einen Rhombus ein Rechteck von geg. Umfang zu zeichnen. — 626) Ein rechtwinkliges Dreieck zu construiren, [...]nn $r$ gegeben ist, und Inhalt und Umfang, durch $r^2$ und $r$ [...]messen, durch dieselbe Zahl ausgedrückt sind. — 627) Inner[...]lb eines Kreises ist ein Punkt $P$ gegeben. Man soll auf der [...]eislinie zwei Punkte $X$ und $Y$ so bestimmen, dass die Strecken [...], $XY$, $YP$ mit den in $X$ und $Y$ gezogenen Tangenten gleiche [...]nkel bilden (253). — 628) In ein geg. Quadrat ein Rechteck [...]n geg. Fläche zu zeichnen, dessen Seiten den Diagonalen [...] Quadrats parallel sind. — 629) Auf einer geg. Geraden

zwei Punkte so zu bestimmen, dass ihr Abstand den Tangenten gleich ist, welche man aus ihnen an eine geg. Kreislinie ziehen kann. — 630) In einen geg. Kreis einen concentrischen Kreis so zu zeichnen, dass die Fläche des Ringes mittlere Proportionale zwischen den Flächen der Kreise ist. — Zwei geg. Strecken $AB$ und $A_1B_1$ so auf eine Gerade zu legen, dass 631) $AB_1$, $BA_1$, 632) $AA_1$, $BB_1$, 633) $AB$, $A_1B_1$ harmonische Punktepaare sind. — 634) Auf der Centrallinie zweier sich von innen berührender Kreislinien eine senkrechte Sehne zu errichten, welche durch die innere Kreislinie in drei gleiche Theile getheilt wird. — 635) Durch einen geg. Punkt $P$ eines Durchmessers $AB$ eine Sehne so zu ziehen, dass $\overline{APC}:\overline{BPD} = m:n$. — 636) Ein gleichschenkliges Trapez aus Grundlinie und Höhe so zu zeichnen, dass die Flächen der von den Diagonalen gebildeten gleichschenkligen Dreiecke ein geg. Verhältniss haben. — 637) Durch einen geg. Punkt $P$ einer Sehne $AB$ eine Sehne $XY$ so zu ziehen, dass, wenn $XY$ um $P$ in die Richtung $AB$ gedreht wird, $AB$ und $XY$ harmonische Punktepaare sind.

## D. Vermischte Sätze und Aufgaben.

In jedem Dreieck ist 638. $3(a^2+b^2+c^2)=4(t_1{}^2+t_2{}^2+t_3{}^2)$, 639. $ab=2rh_3$, 640. $(abc)^2=(h_1h_2h_3).(2r)^3$. — 641. Ist $A_1A_2 \parallel B_1B_2 \parallel C_1C_2$, und sind $M_1$, $M_2$, $M_3$ die Mitten dieser drei Strecken, so ist $\overline{M_1M_2M_3} = \frac{1}{2}(\overline{A_1B_1C_1} + \overline{A_2B_2C_2})$. — 642. Durch einen geg. Punkt innerhalb einer Kreisfläche kann man nur **eine** Sehne ziehen, die in diesem Punkte halbirt wird. — 643. Wenn zwei Sehnen eines Kreises sich gegenseitig halbiren, so sind sie Durchmesser. — 644. Beschreibt man aus einem Punkte der äusseren von zwei concentrischen Kreislinien eine Kreislinie, welche die innere unter rechtem Winkel schneidet, so ist die neue Kreisfläche gleich der Fläche des Ringes. — 645. Ist in einem Punkte $D$ eines Durchmessers $AB$ eine Senkrechte errichtet, welche eine Sehne $AC$ in $E$ schneidet, so ist $AB.AD = AC.AE$. — 646. Ist $S$ der Schwerpunkt eines Dreiecks $ABC$, und $P$ ein beliebiger Punkt, so ist $(PA^2+PB^2+PC^2)-(SA^2+SB^2+SC^2)=3SP^2$ (Erweiterung dieses Satzes auf ein Polygon!). — 647. Die drei Geraden, welche die Mitten der Gegenseiten und die Mitten der Diagonalen eines Vierecks verbinden, gehen durch **einen** Punkt. — 648. Ist die Sehne $CD$ einem Durchmesser $AB$ parallel, und $P$ ein Punkt des Durchmessers,

so ist $PC^2 + PD^2 = PA^2 + PB^2$ (366). — 649. Wird die Verlängerung der Dreieckseite $BC$ durch die in $A$ gezogene Tangente des Umkreises in $A_1$ geschnitten, so ist $A_1B : A_1C = AB^2 : AC^2$. — 650. Zieht man in den Ecken eines Dreiecks $ABC$ an den Umkreis Tangenten, welche die Gegenseiten in $A_1$, $B_1$, $C_1$ schneiden, so liegen $A_1$, $B_1$, $C_1$ auf einer Geraden (302, A. 649). — 651. Die Schenkel dreier rechter Winkel mit gemeinsamem Scheitel bilden einen involutorischen Strahlenbüschel. — 652. Die Schnittpunkte einer Geraden mit den Seitenlinien eines Sehnenvierecks und der Kreislinie bilden eine involutorische Punktreihe. — 653. Sind im Sehnenviereck die Schnittpunkte je zweier Gegenseiten und der Schnittpunkt der Diagonalen bestimmt, so ist jeder dieser drei Punkte der Pol zur Verbindungslinie der beiden anderen. — 654. Ist $AB$ ein Durchmesser, $C$ und $D$ zwei beliebige Punkte der Kreislinie, und Bogen $AE = AD$ gemacht, so theilen die Geraden $CD$ und $CE$ den Durchmesser harmonisch.

**655**) Eine Kreislinie zu zeichnen, die aus den Seiten eines geg. Dreiecks Sehnen von gleicher, gegebener Länge ausschneidet. — 656) In ein geg. Dreieck ein gleichseitiges Dreieck zu zeichnen, von welchem die Richtung einer Seite gegeben ist (Meth. d). — 657) In einen geg. Kreis ein Dreieck von geg. Umfang zu zeichnen, worin $a - b = b - c$ ist (Meth. d). — 658) In einen geg. Kreis ($r$) ist ein Dreieck von geg. Fläche ($f^2$) beschrieben, dessen Seiten eine stetige geom. Proportion bilden. Wie gross sind seine Seiten? (A. 521.) — 659) Durch einen ausserhalb einer Kreisfläche geg. Punkt eine Secante bis zu einer geg. Geraden so zu ziehen, dass die beiden äusseren Abschnitte der Secante einander gleich werden. — 660) Durch einen ausserhalb einer Kreisfläche geg. Punkt eine Secante so zu ziehen, dass ihr innerer Abschnitt durch eine geg. Sehne halbirt wird. — 661) Eine Strecke von geg. Richtung und Länge so zu verschieben, dass ihre Endpunkte auf zwei geg. Kreislinien liegen (125). — 662) Durch einen geg. Punkt innerhalb eines geg. Segmentes eine Strecke zu ziehen, die in diesem Punkte halbirt wird. — 663) Eine Sehne so zu ziehen, dass sie durch zwei geg. Radien des Kreises in drei gleiche Theile getheilt wird. — 664) Auf einer geg. Strecke $AB$ zwei Punkte $A_1B_1$ so zu bestimmen, dass $AA_1 = BB_1$ ist, und $A$, $B_1$ und $B$, $A_1$ harmonische Punktepaare sind. — 665) In einen geg. Sector ein Quadrat so zu zeichnen, dass zwei Ecken auf dem einen, die dritte auf dem andern Radius und die vierte

auf dem Bogen liegt. — 666) In ein geg. Segment ein Quadrat so zu zeichnen, dass zwei Ecken auf der Sehne, zwei auf dem Bogen liegen. — 667) Drei Strecken $AB$, $A_1B_1$, $A_2B_2$ sind gegeben. Man soll einen Punkt $X$ so bestimmen, dass $\overline{XAB} = \overline{XA_1B_1} = \overline{XA_2B_2}$ ist. — 668) In einem Viereck $\overline{ABCD}$ einen Punkt $X$ so zu bestimmen, dass $\overline{XAB} = \overline{XCD}$ und $\overline{XBC} = \overline{XDA}$ ist. — 669) In einem geg. Dreieck $\overline{ABC}$ einen Punkt $X$ so zu bestimmen, dass die Dreiecksflächen $\overline{XAB}$, $\overline{XBC}$, $\overline{XCA}$ in geg. Verhältnissen stehen. — 670) Einen Punkt zu bestimmen, von dem aus drei geg. Kreislinien unter gleichen Gesichtswinkeln erscheinen. — 671) Auf den drei Seiten eines Dreiecks sind drei Punkte $A_1$, $B_1$, $C_1$ gegeben. Man soll einen Punkt $X$ so bestimmen, dass die Strecken $XA_1$, $XB_1$, $XC_1$ das Dreieck in drei gleiche Theile theilen. — 672) Auf einer Geraden sind vier Punkte $A$, $B$, $C$, $D$ gegeben. Man soll ausserhalb der Geraden einen Punkt $X$ so bestimmen, dass Winkel $AXB = BXC = CXD$ ist. — 673) Auf einem geg. Bogen $AB$ einen Punkt $X$ so zu bestimmen, dass $XA \,.\, XB$ gleich einer geg. Fläche $a^2$ ist (A. 639). — 674) Durch einen geg. Punkt in der Ebene eines Dreiecks $\overline{ABC}$ eine Gerade zu ziehen, welche $AB$ in $X$ und $AC$ in $Y$ so trifft, dass $BX + CY = XY$. — 675) Eine geg. Strecke zwischen zwei Seiten eines Dreiecks so einzutragen, dass sie gleich der Summe der unteren Abschnitte dieser Seiten ist. — Gegeben ein Kreis mit zwei Tangenten. Eine dritte Tangente, welche den Kreis in $X$ berührt, und die andern Tangenten in $Y$ und $Z$ schneidet, soll so gezogen werden, dass 676) $XY + XZ = a$, 677) $XY : XZ = m : n$, 678) $XY \,.\, XZ = a^2$ ist.

Methode e). — 679) Ein Quadrat von einer geg. Ecke aus so zu zeichnen, dass die gegenüberliegenden Seiten durch zwei geg. Punkte gehen. — 680) Von einem geg. Punkte aus drei geg. Strecken so zu ziehen, dass ihre Endpunkte drei Ecken eines Quadrates werden. — 681) Ein Quadrat zu zeichnen, dessen Ecken auf den Seitenlinien eines geg. Parallelogramms liegen. — 682) In ein geg. Parallelogramm ein Rhombus zu zeichnen, von welchem das Verhältniss der D gonalen gegeben ist. — 683) In ein geg. Parallelogramm Rechteck zu zeichnen, von welchem der Winkel der Diagona gegeben ist. — 684) In ein geg. Dreieck ein gleichseiti Dreieck zu zeichnen, dessen eine Ecke in einem auf ei Seite geg. Punkte liegt.

**685.** Der Umkreis eines Dreiecks geht durch die Mi

der sechs Strecken, welche die Mittelpunkte je zweier Berührungskreise verbinden. — 686. Wenn man aus dem Punkte, in welchem der Umkreis eines Dreiecks $\overline{ABC}$ von der Geraden $m_1$ geschnitten wird, eine Kreislinie beschreibt, welche durch den Mittelpunkt des Inkreises geht, so geht dieselbe auch durch $B$, $C$, und den Mittelpunkt des die Seite $BC$ berührenden Ankreises. — In jedem Dreieck ist 687. $f^2 = p\varrho = p_1\varrho_1 = p_2\varrho_2 = p_3\varrho_3$, 688. $f^4 = \varrho\varrho_1\varrho_2\varrho_3$, 689. $1/\varrho = 1/\varrho_1 + 1/\varrho_2 + 1/\varrho_3$. — 690. Auf jeder Halbirungslinie eines Winkels oder Aussenwinkels im Dreieck sind die Ecke, der Schnittpunkt mit der Gegenseite, und die Mittelpunkte der beiden Berührungskreise harmonische Punkte. — In jedem Dreieck ist 691. $\varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3 = \varrho + 4r$ (A. 685), 692. $ab = \varrho\varrho_3 + \varrho_1\varrho_2$, 693. $1/\varrho = 1/h_1 + 1/h_2 + 1/h_3$, $1/\varrho_1 = -1/h_1 + 1/h_2 + 1/h_3$, etc. — 694. Die Summe der drei oberen Abschnitte der Höhen eines Dreiecks ist gleich $2(r + \varrho)$ (A. 691, 695). — 695. Das Quadrat einer Dreieckseite + dem Quadrat des oberen Abschnittes der zugehörigen Höhe ist gleich $4r^2$. — 696. Der Radius des Kreises, welcher durch die Mittelpunkte ($M_1$, $M_2$, $M_3$) der drei Ankreise eines Dreiecks geht, ist gleich $2r$, und sein Mittelpunkt $V$ liegt auf der durch die Mittelpunkte ($M$ und $O$) des In- und Umkreises gehenden Geraden so, dass $MO = OV$ ist. — 697. Der Inhalt des durch die Mittelpunkte der Ankreise eines Dreiecks $\overline{ABC}$ bestimmten Dreiecks ist gleich $2pr$. — 698. Schneidet die aus einer Ecke $A$ des Dreiecks durch den Mittelpunkt $M$ des Inkreises gezogene Gerade den Umkreis in $A_1$, so ist $MA \,.\, MA_1 = 2r\varrho$ (367, A. 645). — 699. Ebenso, wie in 698, ist $M_1A \,.\, M_1A_1 = 2r\varrho_1$, etc. — 700. Ist der Abstand zwischen den Mittelpunkten des In- und Umkreises eines Dreiecks durch $d$ bezeichnet, so ist $d^2 = r(r - 2\varrho)$ (364, 367). — 701. Ebenso, wie in 700, ist, wenn $d_1$ den Abstand zwischen den Mittelpunkten der mit $r$ und $\varrho_1$ beschriebenen Kreise bedeutet, $d_1^2 = r(r + 2\varrho_1)$ etc.

Ein Dreieck zu zeichnen aus 702) $\alpha$, $a + b$, $a + c$, 703) $\alpha$, $\varrho$, $p_3$, 704) $\alpha$, $\beta$, $p_1$, 705) $a$, $f^2$, $b^2 + c^2$, 706) $a$, $f^2$, $-c^2$, 707) $a$, $\varrho$, $b + c$, 708) $a$, $\varrho$, $b - c$, 709) $a$, $f^2$, $b + c$, 0) $h_1$, $\varrho$, $p$, 711) $\alpha$, $\varrho$, $b + c$, 712) $\alpha$, $\varrho$, $p$, 713) $a$, $h_1$, $\varrho$, 4) $\alpha$, $\varrho$, $a - c$, 715) $\varrho$, $b - c$, $\beta - \gamma$, 716) $r$, $\varrho$, $b - c$, 717) $\varrho$, $\beta - \gamma$, 718) $a$, $m_1$, $b + c$ (253, 255), 719) $h_1$, $r$, $\varrho$ (A. 690), 0) $a$, $\varrho_2$, $\varrho_3$, 721) $a + b$, $\varrho_1$, $\varrho_2$, 722) $a$, $r$, $\varrho_2$, 723) $\varrho_2$, $\varrho_3$, $-\gamma$ (Bestimme den Winkel zwischen $M_2M_3$ und $BC$), 724)

$h_1$, $h_2$, $\varrho_2$, 725) $h_1$, $h_2$, $\varrho_3$, 726) $\varrho$, $\varrho_1$, $b$, 727) $\varrho$, $\varrho_1$, $h_2$, 728) $\varrho$, $\varrho_1$, $m_1$, 729) $\varrho$, $\varrho_1$, $b+c$ (A. 687), 730) $\varrho$, $\varrho_2$, $h_1$, 731) $\varrho$, $\varrho_1$, $r$ (A. 685), 732) $\varrho_1$, $\varrho_2$, $\varrho_3$ (A 693), 733) $\varrho$, $\varrho_1$, $\varrho_2$ (A. 693).

Ein Sehnenviereck zu zeichnen aus 734) zwei anstossenden Seiten, dem Winkel der Diagonalen und $r$, 735) $f^2$, $\alpha$, $a:b$, $b:a_1$, 736) $a$, $b$, $a_1$, $b_1$. — 737) Ein Tangentenviereck zu zeichnen aus $f^2$ und den Winkeln.

# Register.


Nr.

Aehnlichkeitsaxe . . . . 126
„ polare . . . . 139
„ punkt . . . 108. 117
„ strahl . . . . 117
Ankreis . . . . . . 98
Asymptote (α-συμπίπτω) . . 174
Asymptotenwinkel . . . . 175
Augenpunkt . . . . . 140
Ausdehnung . . . . . 5
Aussenwinkel . . . . . 59
Axen der Ellipse . . . . 168
„ „ Hyperbel . . . . 173
„ „ Parabel . . . . 177

Basis des gleichsch. Dreiecks . 69
Berührung $n^{\text{ter}}$ Ordnung . . 180
„ zweier Kreise . . 104
Berührungskreis des Dreiecks . 98
„ punkt . . . . 92
„ secante . . . . 139
Bestimmungsdreieck . . . . 101
Bewegung . . . . . . . 8
„ begrenzte . . . . 10
„ einfache . . . . 8
„ endliche . . . . 11
„ unbegrenzte . . . 10
„ unendliche . . . 11
„ zusammengesetzte . 8
Bogen, entgegengesetzte . . 35
Breite . . . . . . 5
Brennpunkt der Ellipse . . 168
„ „ Hyperbel . 173
„ „ Parabel . . 177

Centrallinie . . . . . 104
Centralpunkt . . . . . 116
Centriwinkel des Kreises . . 35
„ „ Polygons . 101

Nr.

Centrum (κέντρον) . . . 35
Complementwinkel (complere) . 49
Convergente Richtungen (convergere) . . 29

Diagonale (διά, γωνία) . . 78
„ dritte des vollständigen Vierecks . 132
Dicke . . . . . . 5
Differenz von Strecken . . 17
„ „ Winkeln . . 38
Directrix der Ellipse (dirigere) 170
„ „ Hyperbel . . 175
„ „ Parabel . . 179
Divergente Richtungen (di-vergere) . . . . 29
Doppellinie . . . . . 121
„ punkt . . . . . 121
„ „ der Involution . 133
„ verhältniss . . . . 127
Drehung . . . . . . . 29
„ entgegengesetzte . . 42
Drehungspunkt . . . . . 29
Dreieck . . . . . . 59
„ gleichschenkliges . . 69
„ gleichseitiges . . 69
„ rechtwinkliges . . 61
„ schiefwinkliges . . 61
„ spitzwinkliges . . 61
„ stumpfwinkliges . . 61
„ ungleichseitiges . . 69
Dreieckschnittverhältniss . . 129
Dreieckzahlen, pythagoräische . 149
Durchmesser des Kreises . . 90
„ der Ellipse . . 168
„ „ Hyperbel . 173

Ebene . . . . . . . 1

Nr.
Ecke des Körpers 2
„ dritte des vollst. Vierecks 130
Eckpunkt der Figur 2
Ellipse (ἐλλείπω) 167
Endpunkt der Strecke 2
Entfernung 74
Errichten der Senkrechten 33
Excentricität (ex-centrum) der Ellipse 170
„ der Hyperbel 175

Fällen der Senkrechten 33
Figur (figura) 2
„ ebene 8
„ einbeschriebene 98
„ krumme 8
„ umbeschriebene 98
Fläche 2
Fusspunkt der Strecke 74

Gebiet 12
„ einfaches 12
„ freies 12
Gebilde, ähnliche 9
„ congruente (congruere) 9
„ gleiche 6
„ projectivische 107
Gegenwinkel 53
Gerade 10
„ antiparallele (ἀντί-) 27
„ parallele (παρά-ἀλλήλων) 27
„ schneidende 29
Gesichtswinkel 63
Gestalt 9
Grösse 6
„ scheinbare 63
Grundlinie des Parallelogramms 81
„ „ Dreiecks 82

Halbirungslinie des Winkels 44
„ punkt der Strecke 23
Halbkreis 35
Höhe des Dreiecks 70
„ „ Parallelogramms 82
Hyperbel (ὑπερβάλλω) 172
Hypotenuse (ὑποτείνω) 71

Inkreis 98

Kante 2
Kathete (καθίημι) 71
‥rper 2

Nr.
Kreis 88
„ abschnitt 90
„ ausschnitt 88
„ bogen 35
„ fläche 88
„ linie 35
„ einbeschriebener 98
„ umbeschriebener 98
Kreise, concentr. (con-centrum) 104
Krümmung 180
Krümmungskreis 180
„ radius 180

Lage des Punktes 15
„ „ Winkels 32
„ perspectivische (perspicere) 107
„ verkehrt-perspectivische 114
Länge 5
Leitkreis der Ellipse 167
„ „ „ Hyperbel 172
„ linie der Parabel 177
„ punkt der Ellipse 167
„ „ „ Hyperbel 172
„ „ „ Parabel 177
„ strahl der Ellipse 168
„ „ „ Hyperbel 173
Linie 2
„ Pascal'sche 136

Mitte zweier Punkte 23
Mittel, harmonisches 112
Mittellinie des Dreiecks 70
„ „ „ Parallelogramms 87
„ „ „ Trapezes 110
„ punkt des Kreises 35
„ „ der Figur 80
„ „ „ Involution 133
„ „ „ Ellipse 168
„ „ „ Hyperbel 173
„ richtung 44
„ senkrechte des Dreiecks 70

Nebendiagonale } im vollständ. Viereck 132
Nebenecke }
Nebenwinkel 48
n-Eck 64
Normale 33

Ort, geometrischer 66
Orthogonalkreis (ὀρθὴ γωνία) 116

Parabel (παραβάλλω) 177

| | Nr. |
|---|---|
| Parallelogramm (γράφω) | 78 |
| Parameter der Ellipse (παρά, μέτρον) | 170 |
| „ „ Hyperbel | 175 |
| „ „ Parabel | 179 |
| Peripherie (περιφέρω) | 88 |
| „ winkel | 91 |
| Pol (πόλος, πολέω) | 137 |
| „ harmonischer | 138 |
| Polare | 137 |
| Polygon (πολύς, γωνία) | 64 |
| „ regelmässiges | 101 |
| Potenz eines Punktes | 114 |
| „ linie | 116 |
| „ punkt | 116 |
| Product von Strecken | 114. 143 |
| Projection (projicere) | 140 |
| Projectionspunkt | 140 |
| „ strahlen | 140 |
| Proportion, harmonische | 112 |
| „ wiederkehrende | 114 |
| Proportionale, mittlere | 115 |
| „ vierte | 111 |
| Punkt | 2. 3 |
| „ Brianchon'scher | 135 |
| „ imaginärer | 153 |
| „ potenzhaltender | 125 |
| „ unendlich ferner | 58 |
| Punkte, conjugirte | 112 |
| „ harmonische | 112 |
| Punktreihe, collineare (collineare) | 131 |
| „ involutor. (involvere) | 133 |
| Quadrant (quadrans) | 35 |
| Quadrat (quadratum) | 79 |
| Quadrupelverhältniss | 130 |
| Quotient von Strecken | 20 |
| „ „ Winkeln | 40 |
| Radius des Kreises (radius) | 35 |
| „ „ regelm. Polygons | 101 |
| „ Vector d. Ellipse (vehere) | 168 |
| „ „ „ Hyperbel | 173 |
| aum | 1. 10 |
| echteck | 79 |
| Rhombus (ῥόμβος) | 79 |
| ichtung | 8 |
| „ der Geraden | 16 |
| „ convergente | 29 |
| „ divergente | 29 |
| „ entgegengesetzte | 21 |
| „ senkrechte | 33 |

| | Nr. |
|---|---|
| Scheitel des Winkels | 82 |
| „ „ Strahlenbüschels | 130 |
| „ der Parabel | 177 |
| „ winkel | 50 |
| Schenkel des Winkels | 82 |
| „ „ gleichsch. Dreiecks | 69 |
| Schwerpunkt von Punkten | 25 |
| „ des Dreiecks | 119 |
| Secante (secare) | 90 |
| Sechseck, Brianchon'sches | 135 |
| Sechsseit, Pascal'sches | 136 |
| Sector (secare) | 88 |
| Segment (secare) | 90 |
| Sehne | 90 |
| Sehnenfigur | 98 |
| Seite der Bewegung | 41 |
| „ „ Ellipse | 169 |
| „ „ Hyperbel | 174 |
| „ „ Parabel | 178 |
| Seiten des Dreiecks | 59 |
| „ der Figur | 2 |
| „ des Körpers | 2 |
| „ des Vierecks | 78 |
| „ linie des Dreiecks | 127 |
| Spitze des gleichsch. Dreiecks | 69 |
| Strahl | 130 |
| Strahlenbündel | 130 |
| Strahlenbüschel | 130 |
| „ collineare | 132 |
| „ harmonische | 130 |
| „ involutorische | 134 |
| Strecke | 2 |
| „ gerade | 8 |
| „ krumme | 8 |
| „ negative | 22 |
| „ positive | 22 |
| Stücke des Dreiecks | 65 |
| „ homologe | 67 |
| Summe von Strecken | 17 |
| „ „ Winkeln | 37 |
| Supplementwinkel (supplere) | 49 |
| Tangente des Kreises (tangere) | 92 |
| „ der Ellipse | 169 |
| „ „ Hyperbel | 174 |
| „ „ Parabel | 178 |
| Tangentenfigur | 98 |
| Theilung, harmonische | 112 |
| „ nach d. goldnen Schnitt | 159 |
| „ stetige | 159 |
| Träger der Punktreihe | 1 |
| Trapez (τράπεζα) | |

| | Nr. |
|---|---|
| Trapez, gleichschenkliges | 110 |
| Tripelverhältniss | 129 |
| Umdrehung | 33 |
| Umkehrungssatz | 49 |
| Umkreis | 98 |
| Verbindungslinie | 16 |
| Verschiebung | 27 |
| Vieleck | 64 |
| „ regelmässiges | 101 |
| Viereck | 78 |
| Viereckschnittverhältniss | 130 |
| Wechselwinkel | 53 |
| Weg | 3 |
| Winkel | 32 |
| „ anstossender | 37 |
| „ concaver (concavus) | 33 |
| „ convexer (convexus, vehere) | 33 |
| Winkel, correspondirender (correspondere) | 53 |
| „ geschlossener | 33 |
| „ gestreckter | 33 |
| „ negativer | 43 |
| „ positiver | 43 |
| „ rechter | 33 |
| „ schiefer | 33 |
| „ spitzer | 33 |
| „ stumpfer | 33 |
| „ verschränkter | 53 |
| „ des Dreiecks | 59 |
| „ an der Basis des gleichschenklig. Dreiecks | 69 |
| „ an der Spitze des gleichschenklig. Dreiecks | 69 |
| „ zweier Kreislinien | 116 |
| „ halbirende des Dreiecks | 70 |
| Zahl, Ludolph'sche | 162 |

---

## Berichtigungen.

Seite 107 Zeile 2 von u. lies $C_1$ oder $C_2$ statt $_1$ oder $C_2C$.
„ 109 „ 3 „ o. „ $AC_2$ „ $AB_2$.
„ 137 „ 12 „ u. „ $OTB$ „ $OTO$.
„ 139 „ 1 „ u. „ $MB_1$ „ $MO_1$.
„ 156 „ 2 „ o. „ $\left(\frac{r}{2}\right)^2$ „ $\left(\frac{r}{2}\right)$.

# Trigonometrie.

# Lehrbuch

der

# elementaren Mathematik

von

**Victor Schlegel,**
Oberlehrer am Gymnasium in Waren.

## Dritter Theil.

## Trigonometrie.

(Mit einer vierstelligen Logarithmentafel.)

---

Wolfenbüttel
Druck und Verlag von Julius Zwissler.
1880.

# Vorrede.

Bei der Bearbeitung des vorliegenden, die Trigonometrie enthaltenden Theils meines Lehrbuches habe ich mich im Wesentlichen an den von H. Grassmann in seinem „Lehrbuch der Trigonometrie" (Berlin 1865 b. Enslin) befolgten Gang angeschlossen, der durch langjährige Erfahrung als erprobt gelten kann. Zu den Eigenthümlichkeiten dieses Ganges gehört die Beschränkung der anfänglichen Betrachtung auf den Cosinus, der deswegen vorangestellt zu werden verdient, weil in dem Verhältniss, durch welches er dargestellt wird, nur Stücke der Schenkel des Winkels vorkommen, und weil bei der Erweiterung des Funktionsbegriffes auf stumpfe Winkel beim Cosinus die Zeichenbestimmung auf das Einfachste erfolgt. Ferner die Zurückführung aller übrigen Funktionen auf die Funktion des Cosinus, wodurch die Ableitung aller übrigen Formeln aus einer einzigen, geometrisch herzustellenden Formel ermöglicht wird. Bei der Berechnung der Dreiecke habe ich alle Vortheile zu benutzen gesucht, welche durch feststehende und durch abgekürzte Bezeichnungen erreicht werden können. Als sehr nützlich kann ich auch die Ausführung aller dieser Rechnungen nach dem Schema empfehlen, welches S. 68 und 69 angewendet ist, weil es die Uebersichtlichkeit der Rechnung und die Bequemlichkeit des Nachrechnens ungemein erhöht. Auf den analytischen Zusammenhang der verschiedenen Fälle, auf welchen Diekmann neuerdings hingewiesen hat (Programm Essen 1877), ist dabei durch Nr. 49 gebührend Rücksicht genommen, allerdings ohne Benutzung des für diese einfachen Aufgaben mir überflüssig erscheinenden Determinanten-Apparates. Vierecke und sonstige Polygone habe ich nicht in Betracht gezogen. Dieselben scheinen mir unter den Aufgaben eine passendere Stelle zu finden, als m Texte des Lehrbuches. Einiges über Vierecke findet man in den Aufgaben 96—405. Dagegen ist die trigonometrische Lösung der quadratischen und ,ubischen Gleichung vollständig durchgeführt.

Im Ganzen fasse ich die Trigonometrie nicht so ausschliesslich von der ,eometrischen Seite auf, wie es in den meisten Lehrbüchern geschieht, sondern etrachte sie nur als eine Anwendung der allgemeinen Funktionslehre auf d' 'eometrie. Dies darzuthun, dient der Abschnitt „Die Winkelfunktionen in tr

cendenter und Reihenform" (S. 25—40). Zur richtigen Beurtheilung der trigonometrischen Funktionen scheint es mir äusserst wichtig, dass der Lernende die eine oder andere jener Reihen kennen lerne und so einen Einblick gewinne in den Zusammenhang zwischen algebraischen und transcendenten Funktionen. Dass man dabei Gelegenheit hat, die Berechnung der Logarithmen und der Zahl $\pi$ in so äusserst einfacher Form kennen zu lernen, halte ich ebenfalls für ein beachtenswerthes Moment. Der wichtigste Grund für die Hinzufügung eines solchen Abschnittes scheint mir aber der zu sein, dass erst durch ihn die Arithmetik ihren vollständigen Abschluss erhält, ebenso wie die Lehre von den Gleichungen (wenigstens für Schulzwecke) durch die trigonometrischen Auflösungsmethoden.

Was endlich die dem Buche hinzugefügte Logarithmentafel betrifft, so darf ich mich hinsichtlich des Gebrauchs vierstelliger Logarithmen überhaupt auf die empfehlenden Worte Bremikers (in dem Vorwort zu seiner vierstelligen Logarithmentafel, Berlin 1874 bei Weidmann) berufen. Ueber die trigonometrische Tafel habe ich noch Folgendes zu bemerken: Ich konnte mich nicht entschliessen, die Bremiker'sche Eintheilung des Grades in 100 Theile zu adoptiren. So lange die Decimaltheilung nicht auch auf den Vollwinkel ausgedehnt wird, scheint mir eine theilweise Durchführung derselben unzweckmässig. Ich glaube aber überhaupt nicht, dass auf dem, dem bürgerlichen Leben ganz fernstehenden, Gebiete der Winkelmessung die Decimaltheilung jemals durchgeführt werden wird, weil ihre Vortheile zu den alsdann nöthigen Umrechnungen (allein auf astronomischem Gebiete!) in gar keinem Verhältniss ständen. — Andrerseits glaubte ich die Logarithmen in so enger Aufeinanderfolge geben zu sollen, dass die Interpolation der Proportionaltheile möglichst vereinfacht wird. Im Uebrigen kann ich auf die Einleitung zu den Tafeln selbst verweisen.

Möge auch dieser Theil des Werkes sich einer wohlwollenden Aufnahme erfreuen.

Waren im August 1879.

**V. Schlegel.**

# Inhalt des dritten Theils.

## Einleitung (1—5).

Seite

Der Begriff der Funktion (1—5) . . . . . 1

## Reine Trigonometrie.

### A. Die Winkelfunktionen als geschlossene Ausdrücke (6—33).

#### I. Funktionen spitzer Winkel (6—19).

1. Der Cosinus (6—11) . . . . . . . . . 4

6. 7. Einleitung. — 8. Erklärung. — 9. Die Cosinus von Complementwinkeln. — 10. Cosinus der Summe zweier spitzer Winkel. Cosinus des Doppelten eines Winkels. Cosinus der Hälfte eines Winkels. — 11. Berechnung der Cosinus spitzer Winkel. Tafel der Cosinus der spitzen Winkel von $\frac{1}{2}$ zu $\frac{1}{2}$ Grad.

2. Die übrigen Funktionen (12—19) . . . . 10

12. Vorbemerkung. — 13. a) Der Sinus. b) Die Tangens. c) Die Secans, Cosecans, Cotangens. — 14. Eintheilung der Funktionen nach ihrem Zusammenhange. a) Coordinirte, b) Reciproke Funktionen. — 15. Eintheilung der Funktionen nach ihrem Wachsthum. — 16. Die Grenzwerthe der Funktionen eines spitzen Winkels. — 17. Bestimmung von Winkeln und Funktionen durch einander. — 18. Berechnung von Funktionen spitzer Winkel. Funktionen der Winkel von $60^0$, $45^0$, $72^0$. — 19. Geometrische Darstellung der Funktionen eines spitzen Winkels.

#### II. Funktionen beliebiger Winkel (20—33).

1. Der Cosinus (20—25) . . . . . . . . 16

20. Vorbemerkung. — 21. Erklärung. — 22. Die Cosinus von Supplementwinkeln. — 23. Die Cosinus der Grenzwinkel $2R$, $3R$, $4R$. — 24. Product zweier Cosinus. — 25. Cosinus der Summe zweier Winkel.

2. Die übrigen Funktionen (26—33) . . . . 21

26. Vorbemerkung. — 27. Erklärungen. — 28. Beziehungen zwischen den Funktionen zweier von einander abhängiger Winkel. a) Complementwinkel. b) Supplementwinkel. c) Entgegengesetzte Winkel. — 29. Funk-'ionen der Grenzwinkel $2R$, $3R$, $4R$. — 30. Funktionen der Summe und ler Differenz zweier Winkel. — 31. Funktionen des Doppelten eines Winkels. — 32. Funktionen der Hälfte eines Winkels. — 33. Summe und Differenz zweier Sinus oder zweier Cosinus.

### B. Die Winkelfunktionen in transcendenter und Reihenform (34—44) . . 25

34. Vorbemerkung. — 35. Darstellung der Funktion $a^x$ in Reihenform. — 6. Die Zahl $e$. — 37. Die Funktionen *cos* und *sin* in transcendenter und ı Reihenform. — 38. Die Funktionen des Logarithmus und der Wurzel. —

Seite

39. Die inversen trigonometrischen Funktionen. — 40. Die Funktion *arcus-tangens* in Reihenform. — 41. Zusammenhang zwischen den Funktionen *log* und *arctg*. — 42. Die logarithmische Reihe. — 43. Berechnung von Logarithmen. — 44. Berechnung von $\pi$.

## Angewandte Trigonometrie.

### A. Die Berechnung der Dreiecke (45—61).

**I. Das rechtwinklige Dreieck (45)** . . . . . 41

**II. Das schiefwinklige Dreieck (46—61)** . . . . 42

46. Vorbemerkung.

1. Erste Methode (47—49) . . . . . . . . 42

a) Geometrisches Verfahren. — 47. Der Sinussatz. — 48. Der Cosinussatz. — 49. b) Algebraisches Verfahren.

2. Zweite Methode (50—61) . . . . . . . 45

a) Der Satz vom umbeschriebenen Kreise. — 50. Vorbemerkung. — 51. Anwendung des Satzes vom umbeschriebenen Kreise. — b) Der Tangentialsatz. — 52. Vorbemerkung. — 53. Ableitung des Tangentialsatzes aus dem Sinussatze. — 54. Anwendung des Tangentialsatzes. — c) Der Satz vom einbeschriebenen Kreise. — 55. Vorbemerkung. — 56. Bestimmung von $\varrho$ durch die Seiten des Dreiecks. — 57. Ableitung des Satzes vom einbeschriebenen Kreise aus dem Cosinussatze. — 58. Anwendung des Satzes vom einbeschriebenen Kreise. — 59. Formeln zur Berechnung der Fläche eines Dreiecks. — 60. Erweiterung. Der Satz vom anbeschriebenen Kreise. — 61. Berechnung des Dreiecks aus anderen Stücken als Seiten und Winkeln.

### B. Die Auflösung von Gleichungen (62—68).

**I. Die Gleichung vom zweiten Grade (62—65)** . . . 55

62. Vorbemerkung. — 63. Erster Fall: $x^2+ax=+b$. — 64. Zweiter Fall: $x^2+ax=-b$. — 65. Reduction der algebraischen Lösung der gemischt-quadratischen Gleichung auf die trigonometrische Form.

**II. Die Gleichung vom dritten Grade (66—68)** . . . 59

66. Erster Fall: $y^3-3py=2q$; $(p^3>q^2)$. — 67. Reduction der algebraischen Lösung der cubischen Gleichung auf die trigonometrische Form. Zweiter Fall: $y^3-3py=2q$; $(p^3<q^2)$. — 68. Dritter Fall: $y^3+3py=2q$.

Uebersicht der Formeln und Regeln . . . . . 64

## Anhang.

Uebungssätze und Aufgaben . . . . . . . . . 7[illegible]

Rationale Dreiecke . . . . . . . . . . . . 8[illegible]

1. Rechtwinklige Dreiecke. — 2. Schiefwinklige Dreiecke. — 3. Methode zur Aufstellung rationaler Dreiecke.

Register . . . . . . . . . . . . . . . 87

Berichtigungen . . . . . . . . . . . . . 8[illegible]

Tafel vierstelliger Logarithmen . . . . . . . 91

# Einleitung.

## Der Begriff der Funktion.

**1.** Wenn zwischen zwei mathematischen Grössen $y$ und $x$ eine Beziehung besteht, welche sich nicht ändert, wenn der Werth der einen Grösse $x$ sich ändert, so heisst $y$ eine Funktion von $x$ (vgl. Th. I, S. 3). Jede Aenderung von $x$ zieht eine bestimmte Aenderung von $y$ nach sich, und jedem Werthe von $x$ entspricht im Allgemeinen ein einziger bestimmter Werth von $y$. — Beispiele solcher Beziehungen liefern die Gleichungen der 7 Rechnungsarten:

$$y = a + x, \quad y = ax, \quad y = x^a, \quad y = a^x,$$

$$y = a - x, \quad y = \frac{a}{x}, \quad y = \sqrt[x]{a}, \quad y = {}^{a}l\,x,$$

$$y = x - a, \quad y = \frac{x}{a}, \quad y = \sqrt[a]{x}, \quad y = {}^{x}l\,a.$$

In allen diesen Fällen bleibt die durch die Gleichung ausgedrückte Beziehung zwischen $y$ und $x$ unverändert, wenn man der Grösse $x$ nach einander verschiedene Werthe giebt. Jede Aenderung von $x$ zieht, wenn $a$ beständig denselben Werth behält, eine bestimmte Aenderung von $y$ nach sich, und jedem Werthe von $x$ entspricht im Allgemeinen ein bestimmter Werth von $y$. In allen diesen Fällen kann man daher sagen, $y$ sei eine Funktion von $x$. Es ist also z. B. die Summe eine Funktion jedes einzelnen Summanden; ebenso ist ein Polynom, welches ausser einer Anzahl unveränderlicher Grössen die veränderliche Grösse $x$ enthält, eine Funktion von $x$; in einer Gleichung mit zwei Unbekannten ist jede Unbekannte eine Funktion der andern (vgl. Th. I, S. 68, erste Anm.). — Ist $z$ eine Funktion von $y$, und $y$ eine Funktion von $x$, so ist auch

$z$ eine Funktion von $x$. Denn denkt man sich aus den beiden Gleichungen, welche jene Zusammenhänge darstellen, $y$ eliminirt, so bleibt eine Gleichung, welche bedeutet, dass $z$ eine Funktion von $x$ ist.

**2.** In der Arithmetik wurden einem Buchstaben wohl verschiedene Werthe beigelegt, indessen war von einer stetigen Aenderung einer Zahl nicht die Rede. Nachdem aber in der rechnenden Geometrie Strecken und Winkel durch Zahlen dargestellt worden sind, wird es nothwendig, den Begriff der stetigen Aenderung, wie sie eine Strecke durch Verschiebung des erzeugenden Punktes, und ein Winkel durch Drehung der erzeugenden Geraden erleidet, auch auf die Zahlen auszudehnen, durch welche diese Gebilde dargestellt werden. Die Zahl tritt dadurch in die Reihe der Funktions-Grössen (vgl. Th. I, S. 3).

**3.** Eine Funktion heisst algebraisch oder transcendent, jenachdem die Gleichung, welche zur Darstellung der Funktionsbeziehung dient, algebraisch oder transcendent ist (vgl. Th. I, Nr. 91). Von den oben angeführten 12 Funktionen sind also diejenigen der ersten und zweiten Rechnungsstufe, ferner $x^a$ und $\sqrt[a]{x}\,(= x^{\frac{1}{a}})$ algebraisch, die übrigen 4 transcendent.

**4.** Die in den Sätzen und Formeln der rechnenden Geometrie auftretenden Funktionsbeziehungen zwischen zwei Strecken waren sämmtlich algebraisch; es bedurfte nicht der Einführung neuer Funktionen, um die Beziehungen zwischen zwei oder mehreren Strecken darzustellen. Ebenso liessen sich die Beziehungen zwischen zwei Winkeln überall durch algebraische Funktionen darstellen. Dagegen ist die Beziehung zwischen Strecken einerseits und Winkeln andrerseits noch nicht zum Gegenstande der Rechnung gemacht worden. Nur eine allgemeine Andeutung über solche Beziehungen gaben die Sätze Th. II, 98, 107, wo von der Grösse der zwei gleichen oder ungleichen Seiten eines Dreiecks gegenüberliegenden Winkel die Rede ist, und einige andre, z. B. 123. — Gleichwohl geht aus dem Umstande, dass die Winkel eines Dreiecks durch seine Seiten, und seine Seitenverhältnisse durch seine Winkel vollkommen bestimmt sind, hervor, dass es Gleichungen, also auch Funktionen geben muss, welche diese Bestimmung ausdrücken. Und wenn in der rechnenden Geometrie (Th. II, 362) bereits die Aufgabe gelöst wurde: „aus zwei Sei-

ten eines rechtwinkligen Dreiecks die dritte zu berechnen", so tritt als natürliche Verallgemeinerung derselben die Aufgabe an uns heran: „aus drei beliebigen Stücken eines beliebigen Dreiecks die übrigen zu berechnen".

**5.** Um diese Aufgabe lösen zu können, stellt man zuerst die Seitenverhältnisse des rechtwinkligen Dreiecks als Funktionen eines seiner Winkel (Winkelfunktionen) dar. Hieraus ergiebt sich die Lehre von den Winkelfunktionen oder Trigonometrie,*) welche ein specieller Zweig der allgemeinen Funktionslehre (vgl. Th. I, S. 3) ist. — Unter den Anwendungen der Trigonometrie ist in erster Linie diejenige Anwendung auf die Geometrie zu nennen, welche mit der Lösung der oben erwähnten allgemeinen Aufgabe zusammenfällt. Diese Anwendung (von welcher die ganze Wissenschaft ihren Namen hat) nennen wir „Trigonometrie im engeren Sinne".

---

*) Die Lehre von den Winkelfunktionen wird meist Goniometrie genannt; es empfiehlt sich aber mehr, dem allgemeinen Theile der Wissenschaft, welcher sich mit diesen Funktionen beschäftigt, auch den üblichen allgemeinen Namen „Trigonometrie" zu geben, und die specielle Anwendung auf die Lösung der Dreiecksaufgaben als „Tr. im engeren Sinne" zu bezeichnen. — Auch der Name „Geometrie" ist ja weit über seine ursprüngliche Bedeutung hinausgewachsen

# Reine Trigonometrie.

## A. Die Winkelfunktionen als geschlossene Ausdrücke.

### I. Funktionen spitzer Winkel.

#### 1. Der Cosinus.

**6.** *Einleitung.* — Aus dem Satze: „Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn sie in zwei Winkeln übereinstimmen“ (Th. II, 245) folgt, dass zwei rechtwinklige Dreiecke ähnlich sind, wenn sie in einem spitzen Winkel übereinstimmen. — Die Gestalt eines rechtwinkligen Dreiecks ist also durch einen seiner spitzen Winkel vollkommen bestimmt. — Da aber das Verhältniss zweier Seiten eines Dreiecks gleich ist dem Verhältniss der homologen Seiten jedes ihm ähnlichen Dreiecks (Th. II, 243), so ist auch jedes Seitenverhältniss eines rechtwinkligen Dreiecks durch einen seiner spitzen Winkel vollkommen bestimmt.

**7.** Betrachtet man zuerst das Verhältniss der den spitzen Winkel $\alpha$ (Fig. 1) einschliessenden Seiten $b$ und $c$, also $\frac{b}{c}$, so bleibt dasselbe (nach Th. II, 243) ungeändert, wenn das Dreieck sich so ändert, dass $\alpha$ und der rechte Winkel erhalten bleiben (z. B. wenn die durch $BC$ bestimmte Gerade sich verschiebt). — Aendert aber das Dreieck sich so, dass der Winkel $\alpha$ bis $\alpha_1$ abnimmt, während $b$ und der rechte Winkel erhalten bleiben, so ist $B_1C < BC$, folglich (Th. II, 117) $B_1A < BA$, $\frac{1}{c_1} > \frac{1}{c}$ (Th. I, Anm. z. 83a), und $\frac{b}{c_1} > \frac{b}{c}$; d. h.: auch das Verhältniss der den Winkel $\alpha$ einschliessenden Seiten ändert sich. Ferner entspricht bei dieser Aenderung offenbar jedem Werthe von $\alpha$ ein bestimmter Werth von $c$, also auch von $\frac{b}{c}$. Und da beständig $b$ und $c$ die den Winkel $\alpha$ einschliessenden Seiten des

Fig. 1.

rechtwinkligen Dreiecks sind, so bleibt auch die Beziehung zwischen $\alpha$ und $\frac{b}{c}$ beständig dieselbe. Diese beiden Grössen erfüllen also die in Nr. 1 gestellten Anforderungen des Funktions-Zusammenhanges, und es kommt nur noch darauf an, für denselben einen Namen und ein Zeichen festzusetzen.

8. *Erklärung.* — Unter dem Cosinus eines spitzen Winkels $\alpha$ im rechtwinkligen Dreieck versteht man das Verhältniss der dem Winkel anliegenden Kathete $b$ zur Hypotenuse $c$.

$$\cos\alpha = \frac{b}{c}.$$

Anm. Da es für den Werth des Verhältnisses $\frac{b}{c}$, also des $\cos\alpha$, gleichgiltig ist, in welchem rechtwinkligen Dreieck man den Winkel $\alpha$ betrachtet, so folgt, dass der $\cos\alpha$ eben nur eine Funktion des Winkels $\alpha$ ist, die von der Beschaffenheit jenes Dreiecks ganz unabhängig ist.

*Eigenschaften des Cosinus.* — 1) In Nr. 7 wurde gezeigt, dass, wenn der Winkel $\alpha$ abnimmt, das Verhältniss $\frac{b}{c}$ zunimmt.

Ist also $\cos\alpha = \frac{b}{c}$, $\cos\alpha_1 = \frac{b}{c_1}$,

und $\alpha > \alpha_1$,

so ist $\frac{b}{c} < \frac{b}{c_1}$,

d. h.: $\cos\alpha < \cos\alpha_1$.

In Worten: Der grössere von zwei spitzen Winkeln hat den kleineren Cosinus (und umgekehrt). 1.

2) Nimmt $\alpha$ bis 0 ab, während $b$ unverändert bleibt, so rückt $B$ nach $C$, es wird $c = b$, und man hat

$$\cos 0 = 1. \qquad 2.$$

Nimmt $\alpha$ bis $R$ zu, so rückt $B$ in unendliche Entfernung, $C$ wird $= \infty$, und $\frac{b}{c} = 0$ (Th. I, 149). Man hat also:

$$\cos R = 0. \qquad 3.$$

Anm. Es sind also 0 und 1 die Grenzen, zwischen denen der Conus eines spitzen Winkels sich bewegt, während der Winkel selbst von bis 0 abnimmt. — Dass der Cosinus eines Winkels, als Quotient zweier recken, stets eine Zahl ist, folgt aus Th. II, 19.

9. *Die Cosinus von Complementwinkeln.* — Aus der Formel es Pythagoräischen Satzes, $a^2 + b^2 = c^2$, folgt:

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1.$$

Nun ist nach der Definition des Cosinus (Fig. 1)

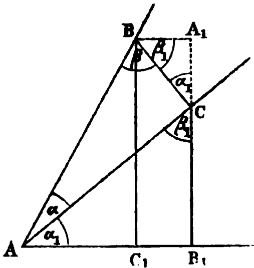
$$\frac{a}{c} = \cos\beta, \quad \frac{b}{c} = \cos\alpha,$$

4. also $\cos^2\alpha + \cos^2\beta = 1$,*) wenn $\alpha + \beta = R$.

Anm. Die aus 4 sich ergebende Formel $\cos\beta = +\sqrt{1 - \cos^2\alpha}$ ermöglicht die Berechnung des Cosinus eines Winkels aus demjenigen seines Complementwinkels. Kennt man also die Cosinus der zwischen 0 und 45° liegenden Winkel, so kann man mittelst dieser Formel die Cosinus der zwischen 45° und $R$ liegenden berechnen.

**10.** *Cosinus der Summe zweier spitzer Winkel.* — Auf einem nicht gemeinsamen Schenkel des einen von zwei anstossenden Winkeln $\alpha$ und $\alpha_1$ sei die Strecke

Fig. 2.




$$AB = 1$$

abgetragen. Um dann die Winkel $\alpha$, $\alpha_1$, $\alpha + \alpha_1$ in rechtwinklige Dreiecke zu bringen, fällt man $BC \perp AC$, $CB_1 \perp AB_1$, $BC_1 \perp AC_1$. Dann ist im Dreieck $\overline{ABC_1}$

$$\cos(\alpha + \alpha_1) = AC_1 = AB_1 - C_1B_1.$$

Zieht man dann $BA_1 \parallel AB_1$ bis zum Schnittpunkt $A_1$ mit der Verlängerung von $B_1C$, so ist $C_1B_1 = BA_1$ (Th. II, 126). Also:

$$\cos(\alpha + \alpha_1) = AB_1 - BA_1 = \frac{AB_1}{AC} \cdot \frac{AC}{1} - \frac{BA_1}{BC} \cdot \frac{BC}{1}.$$

Nun ist nach der Definition des Cosinus

$$1)\ \frac{AB_1}{AC} = \cos\alpha_1; \quad 2)\ \frac{AC}{1} = \frac{AC}{AB} = \cos\alpha.$$

Ferner ist $\overline{AB_1C} \sim \overline{CA_1B}$ (Th. II, 245); also, wenn $\beta$ und $\beta_1$ die Complementwinkel von $\alpha$ und $\alpha_1$ sind, $A_1BC = B_1CA = \beta_1$, und

$$3)\ \frac{BA_1}{BC} = \cos\beta_1; \quad 4)\ \frac{BC}{1} = \frac{BC}{AB} = \cos\beta.$$

Setzt man die Werthe 1) bis 4) in dem Ausdruck für $\cos(\alpha + \alpha_1)$ ein, so folgt:

5. $\cos(\alpha + \alpha_1) = \cos\alpha \,.\, \cos\alpha_1 - \cos\beta \,.\, \cos\beta_1$, wenn $\left.\begin{matrix}\alpha + \beta \\ \alpha_1 + \beta_1\end{matrix}\right\} = R$.

Anm. Diese Formel gilt zunächst nur, wenn nicht allein $\alpha$ und $\alpha_1$, sondern auch $\alpha + \alpha_1$ spitz ist.

---

*) Statt $(\cos\alpha)^2$ schreibt man gewöhnlich $\cos^2\alpha$ (Cosinusquadrat $\alpha$).

*Cosinus des Doppelten eines Winkels.* — Setzt man in 5. $\alpha_1 = \alpha$, so ist auch $\beta_1 = \beta$, und man erhält:

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta. \qquad 6.$$

*Cosinus der Hälfte eines Winkels.* — Durch Addition von

4. $1 = \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta$

und 6. $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta$

folgt: $1 + \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha$;

also: $$\cos \alpha = + \sqrt{\frac{1 + \cos 2\alpha}{2}},$$

oder, wenn man $2\alpha = \gamma$ setzt, woraus $\alpha = \frac{\gamma}{2}$ folgt:

$$\cos \frac{\gamma}{2} = + \sqrt{\frac{1 + \cos \gamma}{2}}. \qquad 7.$$

Anm. Formel 7 ermöglicht die Berechnung der Cosinus beliebig kleiner Winkel, die man durch fortgesetzte Halbirung eines Winkels erhält, dessen Cosinus man kennt. Formel 5 zeigt dann, wie man aus den Cosinus dieser kleinen Winkel wieder diejenigen grösserer zusammensetzen kann.

**11.** *Berechnung der Cosinus spitzer Winkel.* — a) $\cos 60^0$. — Das gleichseitige Dreieck wird durch eine seiner Höhen in zwei rechtwinklige Dreiecke getheilt, in deren jedem die kleinere Kathete die Hälfte der Hypotenuse ist. Da also das Verhältniss der dem Winkel von $60^0$ anliegenden Kathete zur Hypotenuse gleich $\frac{1}{2}$ ist, so hat man

$$\cos 60^0 = \frac{1}{2}. \qquad 8.$$

b) $\cos 7{,}5^0$. — Aus 8 erhält man nach 7 (oder 4), $\cos 30^0 = \frac{1}{2}\sqrt{3} = 0{,}8660$. Hieraus weiter nach 7, $\cos 15^0 = 0{,}9659$, $\cos 7{,}5^0 = 0{,}9914$.

Anm. Die hier auftretenden vierstelligen Decimalbrüche sind natürlich Näherungswerthe, die durch numerische Bestimmung der Quadratwurzel (Th. I, S. 174, oder mit Hilfe der Logarithmen) gefunden werden.

c) Die Cosinus der Vielfachen von $7{,}5^0$. — Aus den schon bekannten Cosinus der Winkel von $7{,}5^0$ und $15^0$ findet man nach 4, $\cos 82{,}5^0 = 0{,}1305$, $\cos 75^0 = 0{,}2588$. — Ferner die Cosinus derjenigen Vielfachen von $7{,}5^0$, welche nicht $> 45^0$ sind, nach 5, $\cos 22{,}5^0 = \cos (15^0 + 7{,}5^0) = 0{,}9238$, $\cos 37{,}5^0 = \cos (30^0 + 7{,}5^0) = 0{,}7934$, $\cos 45^0 = \cos (30^0 + 15^0) = 0{,}7071$. — Endlich die Cosinus derjenigen Vielfachen von $7{,}5^0$, welche $> 45^0$ sind, nach 4, $\cos 52{,}5^0 = 0{,}6088$, $\cos 67{,}5^0 = 0{,}3828$. — Die folgende Tabelle giebt diese Resultate geordnet mit Angabe der Differenzen je zweier auf einander folgender Cosinus.

| ° | *cos.* | *diff.* | ° | *cos.* | *diff.* |
|---|---|---|---|---|---|
| 90 | 0,0000 | | 45 | 0,7071 | |
| | | 0,1305 | | | 0,0863 |
| 82,5 | 0,1305 | | 37,5 | 0,7934 | |
| | | 0,1283 | | | 0,0726 |
| 75 | 0,2588 | | 30 | 0,8660 | |
| | | 0,1239 | | | 0,0579 |
| 67,5 | 0,3827 | | 22,5 | 0,9239 | |
| | | 0,1173 | | | 0,0420 |
| 60 | 0,5000 | | 15 | 0,9659 | |
| | | 0,1088 | | | 0,0255 |
| 52,5 | 0,6088 | | 7,5 | 0,9914 | |
| | | 0,0983 | | | 0,0086 |
| 45 | 0,7071 | | 0 | 1,0000 | |

Anm. In dieser Tabelle ist bei *cos* 67,5° und *cos* 22,5° die oben berechnete vierte Decimalstelle durch die genauere ersetzt. Da überhaupt die Richtigkeit der letzten Decimalstelle unsicher ist (vgl. Th. I, Nr. 164), so wird nachher diese Stelle ganz weggelassen werden.

d) Die Cosinus der Vielfachen von 0,5°. — Dieselben können aus den Zahlenwerthen der obigen Tabelle bis auf 3 Decimalstellen genau gefunden werden, wenn man für jeden halben Grad zwischen 90 und 82,5 den 15ten Theil der Differenz 0,1305, also 0,0087, ebenso für jeden halben Grad zwischen 82,5 und 75 den 15ten Theil der Differenz 0,1283, also 0,00855 addirt. — Auf die Intervalle 75°—67,5° und 67,5°—60° angewendet würde dieses Verfahren auf die Differenzen 0,00826 und 0,00782 führen, deren Unterschied schon zu gross ist, um nicht die Richtigkeit der dritten Decimalstelle zu stören. Theilt man aber den Unterschied dieser Differenzen, 0,00044 in 15 gleiche Theile (0,00003), und bildet, von 0,00826 (als der mittelsten Differenz des ersten Intervalles) ausgehend, durch 7-malige Addition und 22-malige Subtraction von 0,00003 die Differenzreihe (mit Weglassung der Nullen) 847, 844, 841, ... 763, 760, so erhält man durch successive Addition dieser Differenzen zu *cos* 75° die Cosinus der Winkel von ½ zu ½ Grad bis 60°. — Die Abrundung der vierten Stelle (nach Th. I, 169) liefert dann die drei ersten Decimalstellen aller Cosinus richtig. (Nur bei 73° ist gegen die Regel die Erhöhung der letzten Stelle zu unterlassen, bei 64,5° auszuführen.) Die Berechnung von *cos* 0° bis *cos* 30° erfolgt dann nach 4, die von *cos* 30° bis *cos* 45° nach 5, endlich die von *cos* 45° bis *cos* 60° wieder nach 4. Auf diese Weise erhält man die folgende Tafel.

# Tafel der Cosinus der spitzen Winkel von ½ zu ½ Grad.

| ° | cos | ° | cos | ° | cos | ° | cos | ° | cos | ° | cos |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **90** | 0,000 | **75** | 0,259 | **60** | 0,500 | **45** | 0,707 | **30** | 0,866 | **15** | 0,966 |
| 89,5 | 0,009 | 74,5 | 0,267 | 59,5 | 0,508 | 44,5 | 0,713 | 29,5 | 0,870 | 14,5 | 0,968 |
| 89 | 0,017 | 74 | 0,276 | 59 | 0,515 | 44 | 0,719 | 29 | 0,875 | 14 | 0,970 |
| 88,5 | 0,026 | 73,5 | 0,284 | 58,5 | 0,522 | 43,5 | 0,725 | 28,5 | 0,879 | 13,5 | 0,972 |
| 88 | 0,035 | 73 | 0,292 | 58 | 0,530 | 43 | 0,731 | 28 | 0,883 | 13 | 0,974 |
| 87,5 | 0,044 | 72,5 | 0,301 | 57,5 | 0,537 | 42,5 | 0,737 | 27,5 | 0,887 | 12,5 | 0,976 |
| 87 | 0,052 | 72 | 0,309 | 57 | 0,545 | 42 | 0,743 | 27 | 0,891 | 12 | 0,978 |
| 86,5 | 0,061 | 71,5 | 0,317 | 56,5 | 0,552 | 41,5 | 0,749 | 26,5 | 0,895 | 11,5 | 0,980 |
| 86 | 0,070 | 71 | 0,326 | 56 | 0,559 | 41 | 0,755 | 26 | 0,899 | 11 | 0,982 |
| 85,5 | 0,078 | 70,5 | 0,334 | 55,5 | 0,566 | 40,5 | 0,760 | 25,5 | 0,903 | 10,5 | 0,983 |
| **85** | 0,087 | **70** | 0,342 | **55** | 0,574 | **40** | 0,766 | **25** | 0,906 | **10** | 0,985 |
| 84,5 | 0,096 | 69,5 | 0,350 | 54,5 | 0,581 | 39,5 | 0,772 | 24,5 | 0,910 | 9,5 | 0,986 |
| 84 | 0,105 | 69 | 0,358 | 54 | 0,588 | 39 | 0,777 | 24 | 0,914 | 9 | 0,988 |
| 83,5 | 0,113 | 68,5 | 0,367 | 53,5 | 0,595 | 38,5 | 0,783 | 23,5 | 0,917 | 8,5 | 0,989 |
| 83 | 0,122 | 68 | 0,375 | 53 | 0,602 | 38 | 0,788 | 23 | 0,921 | 8 | 0,990 |
| 82,5 | 0,131 | 67,5 | 0,383 | 52,5 | 0,609 | 37,5 | 0,793 | 22,5 | 0,924 | 7,5 | 0,991 |
| 82 | 0,139 | 67 | 0,391 | 52 | 0,616 | 37 | 0,799 | 22 | 0,927 | 7 | 0,993 |
| 81,5 | 0,148 | 66,5 | 0,399 | 51,5 | 0,623 | 36,5 | 0,804 | 21,5 | 0,930 | 6,5 | 0,994 |
| 81 | 0,156 | 66 | 0,407 | 51 | 0,629 | 36 | 0,809 | 21 | 0,934 | 6 | 0,995 |
| 80,5 | 0,165 | 65,5 | 0,415 | 50,5 | 0,636 | 35,5 | 0,814 | 20,5 | 0,937 | 5,5 | 0,995 |
| **80** | 0,174 | **65** | 0,423 | **50** | 0,643 | **35** | 0,819 | **20** | 0,940 | **5** | 0,996 |
| 79,5 | 0,182 | 64,5 | 0,431 | 49,5 | 0,649 | 34,5 | 0,824 | 19,5 | 0,943 | 4,5 | 0,997 |
| 79 | 0,191 | 64 | 0,438 | 49 | 0,656 | 34 | 0,829 | 19 | 0,946 | 4 | 0,998 |
| 78,5 | 0,199 | 63,5 | 0,446 | 48,5 | 0,663 | 33,5 | 0,834 | 18,5 | 0,948 | 3,5 | 0,998 |
| 78 | 0,208 | 63 | 0,454 | 48 | 0,669 | 33 | 0,839 | 18 | 0,951 | 3 | 0,999 |
| 77,5 | 0,216 | 62,5 | 0,462 | 47,5 | 0,676 | 32,5 | 0,843 | 17,5 | 0,954 | 2,5 | 0,999 |
| 77 | 0,225 | 62 | 0,469 | 47 | 0,682 | 32 | 0,848 | 17 | 0,956 | 2 | 0,999 |
| 76,5 | 0,233 | 61,5 | 0,477 | 46,5 | 0,688 | 31,5 | 0,853 | 16,5 | 0,959 | 1,5 | 1,000 |
| 76 | 0,242 | 61 | 0,485 | 46 | 0,695 | 31 | 0,857 | 16 | 0,961 | 1 | 1,000 |
| 75,5 | 0,250 | 60,5 | 0,492 | 45,5 | 0,701 | 30,5 | 0,862 | 15,5 | 0,964 | 0,5 | 1,000 |

## 2. Die übrigen Funktionen.

**12.** *Vorbemerkung.* — Im rechtwinkligen Dreieck (Fig. 1) lassen sich im Ganzen sechs Seitenverhältnisse aufstellen, nämlich:

Fig. 1.

$$\frac{b}{c},\ \frac{a}{c},\ \frac{a}{b};\quad \frac{c}{b},\ \frac{c}{a},\ \frac{b}{a}.$$

Von diesen ist bis jetzt das erste, $\frac{b}{c}$, als Funktion des Winkels $\alpha$ nachgewiesen und bezeichnet worden. Dasselbe soll im Folgenden mit den übrigen Verhältnissen geschehen.

**13.** a) *Der Sinus.* — Nach der Definition des Cosinus ist $\frac{a}{c} = \cos\beta$. Nun ist nach 4 $\cos\beta$ oder $\frac{a}{c}$ eine Funktion von $\cos\alpha$, also auch von $\alpha$. (Nr. 1 am Schluss.)

*Erklärung.* — Unter dem Sinus (*sin*) eines spitzen Winkels $\alpha$ im rechtwinkligen Dreieck versteht man das Verhältniss der dem Winkel gegenüberliegenden Kathete $a$ zur Hypotenuse $c$.

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}.$$

b) *Die Tangens.* — Da $\frac{a}{c} : \frac{b}{c} = \frac{a}{b}$, so ist auch $\frac{a}{b}$ eine Funktion von $\alpha$.

*Erklärung.* — Unter der Tangens (*tg*) eines spitzen Winkels $\alpha$ im rechtwinkligen Dreieck versteht man das Verhältniss der dem Winkel gegenüberliegenden Kathete $a$ zur anliegenden Kathete $b$.

$$tg\,\alpha = \frac{a}{b}.$$

c) *Die Secans, Cosecans, Cotangens.* — Wie $\frac{b}{c}$, $\frac{a}{c}$ und $\frac{a}{b}$, so sind auch die umgekehrten Werthe dieser Brüche, nämlich $\frac{c}{b}$, $\frac{c}{a}$ und $\frac{b}{a}$, Funktionen von $\alpha$.

*Erklärungen.* — Unter der Secans (*sec*) eines spitzen Winkels $\alpha$ versteht man den umgekehrten Werth seines Cosinus; unter der Cosecans (*cosec*) den umgekehrten Werth

seines Sinus; unter der **Cotangens** (*cot*) den umgekehrten Werth seiner Tangens.

$$sec\ \alpha = \frac{1}{cos\ \alpha} = \frac{c}{b}.$$

$$cosec\ \alpha = \frac{1}{sin\ \alpha} = \frac{c}{a}.$$

$$cot\ \alpha = \frac{1}{tg\ \alpha} = \frac{b}{a}.$$

Anm. Wie lauten also die Erklärungen dieser drei Funktionen durch die Seitenverhältnisse in Worten?

*Uebersicht* der sechs Seitenverhältnisse im rechtwinkligen Dreieck, und der durch sie dargestellten Funktionen des Winkels $\alpha$.

| $sin\ \alpha$ | $cos\ \alpha$ | $tg\ \alpha$ | $cot\ \alpha$ | $sec\ \alpha$ | $cosec\ \alpha$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{a}{c}$ | $\frac{b}{c}$ | $\frac{a}{b}$ | $\frac{b}{a}$ | $\frac{c}{b}$ | $\frac{c}{a}$ |

9.

**14.** ***Eintheilung der Funktionen nach ihrem Zusammenhange.*** — a) ***Coordinirte Funktionen.*** — Aus den Definitionen der sechs Funktionen (oder wenn man im Dreieck $\overline{ABC}$ oder in 9 gleichzeitig $a$ mit $b$, und $\alpha$ mit $\beta$ vertauscht), folgt:

$$sin\ \beta = \frac{b}{c} = cos\ \alpha;\quad tg\ \beta = \frac{b}{a} = cot\ \alpha;\quad sec\ \beta = \frac{c}{a} = cosec\ \alpha;$$

$$cos\ \beta = \frac{a}{c} = sin\ \alpha;\quad cot\ \beta = \frac{a}{b} = tg\ \alpha;\quad cosec\ \beta = \frac{c}{b} = sec\ \alpha.$$

Vermöge dieses Zusammenhanges heissen Sinus und Cosinus **einander coordinirt**; ebenso Tangens und Cotangens, Secans und Cosecans. Und die letzten Formeln enthalten zusammen den Satz:

**Jede Funktion eines spitzen Winkels ist gleich der coordinirten Funktion seines Complementwinkels.** 10.

Anm. Hiernach zerfallen die sechs Funktionen in **drei Paare coordinirter Funktionen**. — In der Uebersicht 9 ist jedes der drei Paare von dem folgenden durch einen Doppelstrich getrennt.

b) ***Reciproke Funktionen.*** — Zwei Funktionen heissen **reciprok zu einander**, wenn die eine der umgekehrte Werth der andern ist. Demnach sind reciprok: Sinus und Cosecans, Cosinus und Secans, Tangens und Cotangens.

Anm. Hierdurch zerfallen die sechs Funktionen in drei Paare reciproker Funktionen. In der Uebersicht 9 stehen die beiden Funktionen jedes dieser Paare einander symmetrisch gegenüber. — Tangens und Cotangens sind gleichzeitig reciprok und coordinirt. — Man übe sich, zu jeder gegebenen Funktion die coordinirte und die reciproke anzugeben.

**15.** ***Eintheilung der Funktionen nach ihrem Wachsthum.*** — In Nr. 7 wurde gezeigt, dass, wenn im rechtwinkligen Dreieck (Fig. 1) der Winkel $\alpha$ bis $\alpha_1$ abnimmt, während $b$ ungeändert bleibt, zwischen den Seiten der Dreiecke $abc$ und $a_1b_1c_1$ die Beziehungen bestehen:

Fig. 1.

$$1)\quad a_1 < a;\ c_1 < c.$$

Ausserdem ist

$$2)\quad \alpha_1 < \alpha;\ \beta < \beta_1.$$

Aus 1) folgt:

$$\frac{a_1}{b} < \frac{a}{b};\ \frac{b}{a_1} > \frac{b}{a};\ \frac{c_1}{b} < \frac{c}{b};\ \frac{b}{c_1} > \frac{b}{c};$$

oder (9)

$$3)\quad tg\,\alpha_1 < tg\,\alpha;\ cot\,\alpha_1 > cot\,\alpha;\ sec\,\alpha_1 < sec\,\alpha;\ cos\,\alpha_1 > cos\,\alpha.$$

Ferner ist nach 10

$$cosec\,\beta = sec\,\alpha;\quad sin\,\beta = cos\,\alpha;$$

$$cosec\,\beta_1 = sec\,\alpha_1;\quad sin\,\beta_1 = cos\,\alpha_1;$$

also nach 3)

$$4)\quad cosec\,\beta > cosec\,\beta_1;\ sin\,\beta < sin\,\beta_1.$$

Aus den Formeln 2), 3), 4) folgt nun, dass zu dem kleineren von zwei Winkeln die kleinere Sinus-, Tangens- und Secans-Funktion, aber die grössere Cosinus-, Cotangens-, und Cosecans-Funktion gehört. Oder: wenn der Winkel abnimmt, so nehmen die ersteren Funktionen ab, die letzteren zu.

Vermöge dieses Zusammenhanges heissen Sinus, Tangens, Secans, welche sich mit dem zugehörigen Winkel in gleichem Sinne ändern, zusammen directe Funktionen; dagegen Cosinus, Cotangens, Cosecans, welche sich mit dem zugehörigen Winkel in entgegengesetztem Sinne ändern, indirecte Funktionen (Cofunktionen). — Man kann demnach das letzte Resultat in der Form aussprechen:

11. Nimmt ein spitzer Winkel zu, so nehmen se ie directen Funktionen zu, seine indirecten ab.

Anm. Hiernach zerfallen die sechs Funktionen in zwei Tripe — In der Uebersicht 9 stehen die directen Funktionen an ungerader, ie indirecten an gerader Stelle. — Man gebe den gemeinsamen Namen m zwei beliebig gewählten Funktionen an. Welche Paare lassen sich u er keinen gemeinsamen Namen bringen?

**16.** ***Die Grenzwerthe der Funktionen eines spitzen Winkels.*** — a) Nimmt im rechtwinkligen Dreieck der Winkel $\alpha$ bis 0 ab, während $b$ ungeändert bleibt, so wird $a = 0$, $c = b$. Dann folgt aus 9:

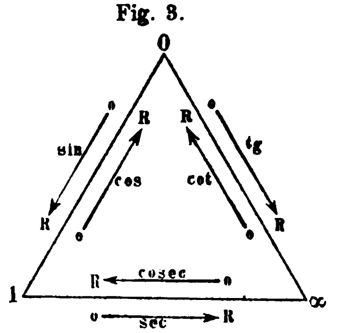
$$\sin 0 = 0; \quad tg\, 0 = 0; \quad \sec 0 = 1;$$
$$\cos 0 = 1; \quad \cot 0 = \infty; \quad cosec\, 0 = \infty. \qquad 12.$$

b) Nimmt dagegen der Winkel $\alpha$ bis $R$ zu, so rückt $B$ auf $CB$ (Fig. 1) in unendliche Entfernung, $a$ und $c$ wachsen ins Unendliche, und ihr Verhältniss nähert sich der Einheit als Grenze. Dann folgt aus 9:

$$\sin R = 1; \quad tg\, R = \infty; \quad \sec R = \infty;$$
$$\cos R = 0; \quad \cot R = 0; \quad cosec\, R = 1. \qquad 13.$$

Aus der Vergleichung von 12 und 13 folgt, dass der Satz 10 auch noch für die Funktionen der Grenzwinkel 0 und $R$ gilt. Ferner folgt, dass für einen spitzen Winkel stets Sinus und Cosinus zwischen 0 und 1, Tangens und Cotangens zwischen 0 und $\infty$, Secans und Cosecans zwischen 1 und $\infty$ liegen. Diese Beziehungen sind durch Fig. 3 veranschaulicht.

Fig. 3.




Anm. In nebenstehender Figur drücken die Richtungen jedes Pfeiles die Aenderungen eines Winkels von 0 bis $R$ aus, und die gleiche Richtung der parallelen Dreiecksseite drückt die gleichzeitige Aenderung der neben dem Pfeile stehenden Funktion aus.

**17.** ***Bestimmung von Winkeln und Funktionen durch einander.*** — Aus den oben gegebenen Definitionen der trigonometrischen Funktionen folgt, dass der Werth jeder Funktion durch den gegebenen Winkel vollständig bestimmt ist. Aber auch umgekehrt ist die Grösse eines Winkels durch einen zugehörigen Funktionswerth vollständig bestimmt. Denn wenn zu einem gebenen Funktionswerthe zwei verschiedene Winkel gehörten, widerspräche dies dem Satze 11, nach welchem, wenn einer eser Winkel in den andern übergeht, auch der zugehörige ınktionswerth beständig grösser oder beständig kleiner wern muss, also jedenfalls die ursprüngliche Grösse nicht wieder nehmen kann.

Wie jede Funktion durch den zugehörigen Winkel, so ist ch jede Funktion eines Winkels durch eine andere Funktion

desselben Winkels vollständig bestimmt, und kann durch sie ausgedrückt werden. Dies geschieht mit Hilfe der folgenden Formeln:

Nach 4 ist $\cos^2\alpha + \cos^2\beta = 1;$

nach 10: $\cos\beta = \sin\alpha,$

14. folglich: $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1.$

Ferner folgt aus 9:

15. $$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = tg\,\alpha.$$

a) Mittelst der Formeln 14 und 15 kann nun jede der drei Funktionen Sinus, Cosinus, Tangens durch eine der beiden anderen ausgedrückt werden. b) Ebenso jede der drei Funktionen Cosecans, Secans, Cotangens durch eine der beiden andern, wenn man in 14 und 15 jede Funktion durch die zu ihr reciproke ausdrückt. c) Endlich jede der drei ersten (letzten) Funktionen durch jede der drei letzten (ersten), wenn man in jeder der in a) erhaltenen Formeln eine der beiden Funktionen durch die zu ihr reciproke ausdrückt.

Anm. Man bestimme die Anzahl aller dieser Formeln, und löse Aufgaben, wie: Die fünf übrigen Funktionen durch den Cosinus auszudrücken.

**18.** *Berechnung von Funktionen spitzer Winkel. — Vorbemerkung.* — Aus Nr. 17 folgt, dass, wenn der Werth einer Funktion eines spitzen Winkels (z. B. des Cosinus) bekannt ist, daraus die Werthe aller übrigen Funktionen berechnet werden können. — Um nun den Werth irgend einer Funktion eines spitzen Winkels berechnen zu können, muss dieser Winkel einem rechtwinkligen Dreieck angehören, in welchem eine Seite allein durch eine zweite (ohne Benutzung der dritten) ausgedrückt werden kann. Denn nur dann wird das Verhältniss dieser Seiten eine blosse Zahl sein. Diese Bedingung erfüllen aber nur diejenigen rechtwinkligen Dreiecke, welche Hälften von Bestimmungsdreiecken in elementar construirbaren regelmässigen Polygonen sind. Denn nach Th. II Nr. 156—160 lassen sich die Katheten $\frac{s_n}{2}$ dieser rechtwinkligen Dreiecke allein durch die Hypotenuse $r$ ausdrücken. — Es sind für diesen Zweck nur noch die Bestimmungsdreiecke des regelmässigen Vierecks und Zehnecks zu betrachten, da dasjenige des Sechsecks bereits oben (Formel 8) den $\cos 60^0$ geliefert hat, und das des Fünfzehnecks Winkel enthält, für

welche zunächst der Cosinus besser mittelst der Formeln 5 und 7 bestimmt wird. Diese letzteren Formeln machen auch die Betrachtung der aus dem 6-, 4-, 10- und 15-Eck ableitbaren Polygone überflüssig.

a) *Funktionen des Winkels von 60°.* — Nach Formel 8 ist

$$\cos 60^0 = \tfrac{1}{2}.$$

b) *Funktionen des Winkels von 45°.* — Das Bestimmungsdreieck des Quadrates ist gleichschenklig-rechtwinklig, also $a = b$. Dann folgt aus 9:

$$tg\, 45^0 = 1. \qquad 16.$$

c) *Funktionen des Winkels von 72°.* — Ist $x$ die Seite des regelmässigen Zehnecks, und $r$ der Radius des umbeschriebenen Kreises, so ist (Th. II, 368)

$$x^2 = r(r - x),$$

woraus folgt:

$$x = \frac{r}{2}(\sqrt{5} - 1).$$

Fällt man nun im Bestimmungsdreieck des regelmässigen Zehnecks die Höhe auf die Basis, so ist

$$\cos 72^0 = \frac{x}{2r},$$

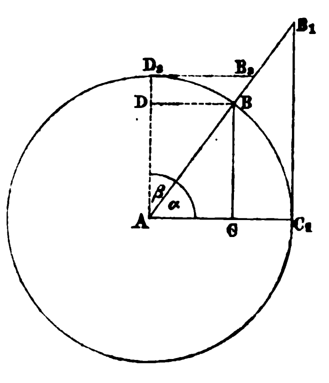
oder, wenn man $x$ durch seinen eben gefundenen Werth ersetzt:

$$\cos 72^0 = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}. \qquad 17.$$

Anm. Man berechne a) die übrigen Funktionen der Winkel von 60°, 45°, 72°, b) den Cosinus und die übrigen Funktionen der Winkel von 30°, 15°, 36°, 18°, 9°, c) den Cosinus und die übrigen Funktionen solcher spitzer Winkel, die aus den angegebenen durch Addition entstehen.

**19.** *Geometrische Darstellung der Funktionen eines spitzen Winkels.* — Beschreibt man aus der Ecke $A$ eines bei $C$ rechtwinkligen Dreiecks $\overline{ABC}$ eine Kreislinie mit der Hypotenuse $AB$ als Radius, und setzt $AB = 1$, so ist (Fig. 4)

Fig. 4.




$$1) \quad \sin\alpha = \frac{BC}{AB} = BC.$$

Verlängert man $AC$ bis $C_1$, und $AB$ bis zum Schnittpunkte $B_1$ mit der in $C_1$ gezogenen Tangente, so ist $\overline{ABC} \sim \overline{AB_1C_1}$ (Th. II, 245), und

2) $$tg\, \alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{B_1C_1}{AC_1} = B_1C_1.$$

3) $$sec\, \alpha = \frac{AB}{AC} = \frac{AB_1}{AC_1} = AB_1.$$

Führt man dieselben Constructionen in Bezug auf $\beta$, den Complementwinkel von $\alpha$, aus, so erhält man mit Berücksichtigung von 10:

4) $$cos\, \alpha = sin\, \beta = \frac{BD}{AB} = BD.$$

5) $$cot\, \alpha = tg\, \beta = \frac{BD}{AD} = \frac{B_2D_2}{AD_2} = B_2D_2.$$

6) $$cosec\, \alpha = sec\, \beta = \frac{AB}{AD} = \frac{AB_2}{AD_2} = AB_2.$$

Anm. Aus dem Umstande, dass bei dieser geometrischen Darstellung der Funktionen die Strecken $B_1C_1$ und $B_2D_2$ Tangenten, dagegen $AB_1$ und $AB_2$ Secanten der Kreislinie sind, erklären sich die Namen der Funktionen Tangens und Secans, sowie Cotangens und Cosecans (tangens, secans complementi). Die Bedeutung des Namens sinus s. im Register.

## II. Funktionen beliebiger Winkel.

### 1. Der Cosinus.

**20.** *Vorbemerkung.* — Um den Begriff des Cosinus auf beliebige Winkel ausdehnen zu können, muss eine neue Definition dieser Funktion aufgestellt werden. Diese Definition muss **erstens**, damit kein Widerspruch entsteht, die früher für den spitzen Winkel gegebene als speciellen Fall in sich schliessen. **Zweitens** kann man verlangen, dass die für die Cosinus spitzer Winkel geltenden Formeln 4 und 5 auch für stumpfe Winkel in Geltung bleiben. Ist nun in der Formel 5

$$cos(\alpha + \alpha_1) = cos\, \alpha \,.\, cos\, \alpha_1 - cos\, \beta \,.\, cos\, \beta_1 \quad (\alpha + \beta = \alpha_1 + \beta_1 = R)$$

$\alpha > 45^0$ und $\alpha_1 > 45^0$, so ist $\beta < 45^0$ und $\beta_1 < 45^0$; mithin $cos\, \alpha < cos\, \beta$ und $cos\, \alpha_1 < cos\, \beta_1$ (11), folglich $cos\, \alpha \,.\, cos\, \alpha_1 < cos\, \beta \,.\, cos\, \beta_1$. Es ist also $cos(\alpha + \alpha_1)$ in diesem Falle negativ, und da gleichzeitig $\alpha + \alpha_1$ ein stumpfer Winkel ist, so zeigt sich, dass die Formel für stumpfe Winkel nur dann in Geltung bleiben kann, wenn man den **Cosinus eines stumpfen Winkels als negativ ansieht.** (Die Formel 4 wird sich

später als specieller Fall von 5 ausweisen; daher braucht hier ihr Weiterbestehen nicht untersucht zu werden.)

Um die erste Forderung zu erfüllen, machen wir die beiden Schenkel eines beliebigen Winkels $\alpha$ einander gleich ($SA = SB$, Fig. 5), projiciren einen Schenkel $SB$ (den Endschenkel) auf den anderen $SA$ (den Anfangsschenkel), und verstehen unter dem Cosinus des Winkels $\alpha$ den Quotienten aus dieser Projection $SB_1$ und dem Anfangsschenkel $SA$.

Fig. 5a.

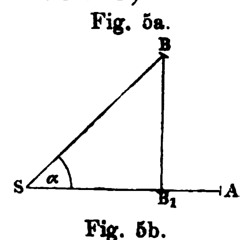
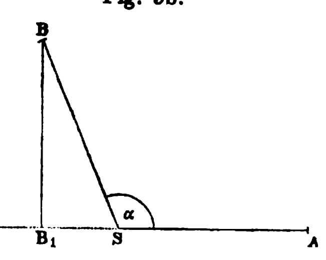



Fig. 5b.




Anm. Im spitzwinkligen Dreieck $SBB_1$ (Fig. 5a) würde nach der früheren Definition $\cos\alpha = \frac{SB_1}{SB}$ sein. Da nun $SB = SA$ ist, so sieht man, wie für spitze Winkel die neue Definition mit der alten übereinstimmt.

Um die zweite Forderung zu erfüllen, bezeichnen wir den Quotienten $\frac{SB_1}{SA}$ als positiv, wenn die Strecken $SB_1$ und $SA$ gleiche, als negativ, wenn sie entgegengesetzte Richtung haben.

Anm. Die Darstellung des Gegensatzes der Richtungen auf einer Geraden durch positive und negative Zahlen ist bereits in Th. II, Nr. 22 und 23 ausgeführt worden Ebenso die Lehre von der Projection mit Berücksichtigung dieses Gegensatzes in Th. II, Nr. 140. — Aus Fig. 5b ist ersichtlich, dass bei Berücksichtigung dieses Gegensatzes der Cosinus des stumpfen Winkels $\alpha$ in der That, wie verlangt, durch eine negative Zahl ausgedrückt wird. — Zu beachten ist, dass bei dieser neuen Auffassung des Streckenbegriffs, durch welche die Richtung der Strecke als wesentliches Unterscheidungsmerkmal herangezogen wird, nur Quotienten von Strecken auf derselben oder auf parallelen Geraden die Bedeutung einer reellen Zahl haben (vgl. Th. II, Nr. 34). Solche Quotienten werden daher auch im Folgenden ausschliesslich benutzt.

**21.** *Erklärung.* — Unter dem Cosinus eines beliebigen Winkels $\alpha$, dessen Schenkel gleich lang gemacht sind, versteht man die Projection des einen Schenkels auf den andern, dividirt durch den andern.

$$\cos\alpha = \frac{SB_1}{SA} \text{ (Fig. 5).}$$

Anm. Die Grösse des Verhältnisses $\frac{SB_1}{SA}$, also des $\cos\alpha$, ist von der

Länge der auf den Schenkeln abgetragenen Strecke unabhängig. Denn sei $SA^1 = SB^1$ eine andere auf den Schenkeln abgetragene Strecke, und $SB_1{}^1$ die Projection von $SB^1$ auf $SA^1$, so ist $\frac{SB_1{}^1}{SB_1} = \frac{SB_1}{SB}$ (Th. II, 349) $= \frac{SA^1}{SA}$, also: $\frac{SB_1{}^1}{SA^1} = \frac{SB_1}{SA}$. — Die Grösse des $\cos\alpha$ ist aber auch von der Wahl des zu projicirenden Schenkels unabhängig. Denn ist $SA_1$ die Projection von $SA$ auf $SB$ (Fig. 5), so ist $\overline{SBB_1} \cong \overline{SAA_1}$, also $SA_1 = SB_1$, und $\frac{SA_1}{SB} = \frac{SB_1}{SA} = \cos\alpha$.

Da die Definition des Cosinus eines Winkels nur die Richtung seiner Schenkel berücksichtigt, nicht aber die Grösse der Drehung, durch welche ein Schenkel in die Richtung des andern gelangen kann, so sind die Cosinus aller Winkel, welche dieselben Schenkel haben, oder deren Schenkel sich zur Deckung bringen lassen, einander gleich. Nennt man solche Winkel congruent, so gilt demnach der Satz:

18. Congruente Winkel haben gleiche Cosinus.

oder:
$$\cos(4nR \pm \alpha) = \cos\alpha,$$
wobei $n$ die Null und alle ganzen Zahlen bedeutet.

Anm. Die verschiedenen Bedeutungen eines durch seine Schenkel gegebenen Winkels sind in Th. II, Nr. 33 erste Anm., Nr. 44 letzte Anm. auseinandergesetzt. — Congruent sind demnach insbesondere 1) zwei Winkel, die sich nur um eine ganze Anzahl von Umdrehungen unterscheiden ($\alpha$ und $4nR + \alpha$), 2) zwei Winkel, die zusammen $4R$ betragen ($\alpha$ und $4R - \alpha$), 3) zwei Winkel, die sich nur durch den Sinn der Drehung unterscheiden ($+\alpha$ und $-\alpha$). — Man sieht, dass alle diese Winkel in dem Ausdrucke $4nR \pm \alpha$ enthalten sind.

Aus 18 folgt u. a. für $n = 0$ und das untere Zeichen von $\alpha$:

19. $$\cos(-\alpha) = \cos\alpha.$$

**22.** *Die Cosinus von Supplementwinkeln.* — Sind $\alpha$ und $\gamma$ (Fig. 6) zwei Nebenwinkel, so ist

Fig. 6.

$$\cos\alpha = \frac{SB_1}{SA},\quad \cos\gamma = \frac{SB_1}{SC},$$
oder, da $SC = -SA$ ist:
$$\cos\gamma = -\cos\alpha,$$

20. oder: $\cos(2R - \alpha) = -\cos\alpha.$

**23.** *Die Cosinus der Grenzwinkel $2R$, $3R$, $4R$.* — Setzt man in 20 $\alpha = 0$, so folgt
$$\cos 2R = -\cos 0 = -1. \quad (2)$$
Da ferner der Winkel $2R$ congruent mit $R$ ist, so ist nach 18
$$\cos 3R = \cos R = 0. \quad (3)$$

Da endlich der Winkel $4R$ congruent mit 0 ist, so ist nach 18

$$\cos 4R = \cos 0 = +1. \quad (2)$$

Also, zusammengestellt:

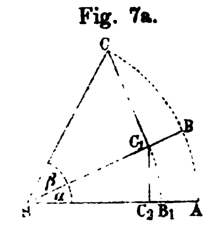
$$\begin{array}{c|cccc|c} \cos & 0, & R, & 2R, & 3R & 4R \ldots \\ = & +1, & 0, & -1, & 0 & +1 \ldots \end{array}$$ 21.

Nennt man die Winkel zwischen 0 und $R$, $R$ und $2R$, $2R$ und $3R$, $3R$ und $4R$ bezw. die Winkel im ersten, zweiten, dritten, vierten Quadranten, so folgt aus 21:

22. Der Cosinus eines Winkels ist im *ersten* und *vierten* Quadranten *positiv*, im *zweiten* und *dritten negativ*. — Der Cosinus eines Winkels nimmt zwischen $+1$ und $-1$ im *ersten* und *zweiten* Quadranten *ab*, im *dritten* und *vierten zu*.

**24.** *Product zweier Cosinus.* — Aus einem Punkte $S$ seien drei gleichlange Strecken gezogen, $SC$, $SB$, $SA$. Projicirt man nun $SC$ auf $SB$, und diese Projection wieder auf $SA$, so ist, wenn $BSC = \beta$ und $ASB = \alpha$ gesetzt wird (Fig. 7):

Fig. 7a.



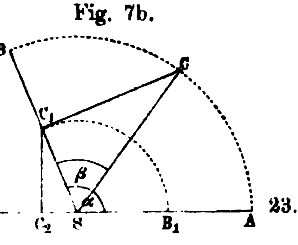

$$\cos\beta = \frac{SC_1}{SB} = \frac{SB_1}{SA};$$

$$\cos\alpha = \frac{SC_2}{SB_1};$$

daher durch Multiplication:

$$\cos\alpha \,.\, \cos\beta = \frac{SC_2}{SA}.$$

Fig. 7b.



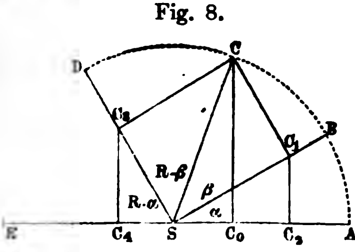

In Worten: Projicirt man von drei aus einem Punkte gehenden Strecken die erste auf die zweite, und diese Projection auf die dritte, so ist die letzte Projection, dividirt durch die dritte Strecke, gleich dem Procte der Cosinus der beiden Zwischenwinkel. 23.

Anm. Fig. 7a zeigt die Construction, wenn beide Zwischenwinkel z sind, Fig. 7b, wenn einer derselben stumpf ist. — Der Satz 23 lässt auch auf mehr als zwei Winkel ausdehnen.

**25.** *Cosinus der Summe zweier Winkel.* — Um den Cosinus : Summe zweier beliebiger Winkel $ASB = \alpha$ und $BSC = \beta$ g. 8) durch die Cosinus von $\alpha$ und $\beta$ auszudrücken, verlän-t man $AS$, errichtet $SD \perp SB$, macht $SA = SB = SC = SD$,

und erhält so die Winkel $CSD = R - \beta$ und $DSE = R - \alpha$ (Th. II, 58). — Projicirt man dann, wie in der vorigen Nr., $SC$ auf $SB$, $SC_1$ auf $SA$; ferner $SC$ auf $SD$, $SC_3$ auf $SA$, endlich $SC$ auf $SA$, so ist

Fig. 8.




1) $\cos(\alpha + \beta) = \frac{SC_0}{SA}$.

Nun ist

2) $SC_0 = SC_2 + C_2C_0$ (Th. II, 23).

Da ferner $\overline{SC_1CC_3}$ ein Rechteck ist (drei Winkel sind $R$!), so ist $C_1C \# SC_3$, also besteht zwischen den Projectionen $C_2C_0$ und $SC_4$ dieser Strecken die Beziehung:

3) $C_2C_0 = SC_4$ (Th. II, 349).

Demnach ist, wenn man 3) in 2) einsetzt:

$$SC_0 = SC_2 + SC_4,$$

und dies in 1) eingesetzt, giebt:

4) $$\cos(\alpha + \beta) = \frac{SC_2}{SA} + \frac{SC_4}{SA}.$$

Nun ist nach 23:

5) $$\frac{SC_2}{SA} = \cos\alpha \,.\, \cos\beta;$$

$$\frac{SC_4}{SA} = \cos CSD \,.\, \cos DSA = \cos(R - \beta) \,.\, \cos(R + \alpha),$$

oder, da $R + \alpha$ und $R - \alpha$ Supplementwinkel sind, und in Folge dessen nach 20

23a. $$\cos(R + \alpha) = -\cos(R - \alpha)$$

ist, 6) $$\frac{SC_4}{SA} = -\cos(R - \beta)\ \cos(R - \alpha).$$

Setzt man endlich 5) und 6) in 4) ein, so folgt:

24. $$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \,.\, \cos\beta - \cos(R - \alpha) \,.\, \cos(R - \beta).$$

Anm. Die Ableitung dieser Formel bleibt ungeändert, wie auch Winkel $\alpha$ und $\beta$ beschaffen sein mögen. — Der Vergleich mit 5 ze dass letztere Formel in der That, wie verlangt wurde, nunmehr für be bige Winkel gilt. Dasselbe findet natürlich für die aus 5 abgeleite Formeln 6 und 7 statt. Uebrigens wird Formel 24 ihre definitive Ges erst mit Hilfe des Sinus-Begriffes erhalten.

## 2. Die übrigen Funktionen.

**26.** *Vorbemerkung.* — Wie der Begriff des Cosinus, so bedürfen auch diejenigen der übrigen Funktionen einer Erweiterung, und zwar einer solchen, welche ihre Beziehungen zum Cosinus unverändert lässt. Wir definiren daher die übrigen Funktionen mit Hilfe des Cosinus, und erreichen dadurch ausserdem den Vortheil, dass ihre Eigenschaften sich aus denen des Cosinus durch blosse Rechnung ableiten lassen.

**27.** *Erklärungen.* — a) Unter dem Sinus eines beliebigen Winkels $\alpha$ versteht man den Cosinus seines Complementwinkels.

$$\sin \alpha = \cos (R - \alpha). \tag{25}$$

b) Unter der Tangens eines beliebigen Winkels versteht man den Quotienten zwischen Sinus und Cosinus des Winkels.

$$tg\, \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}. \tag{26}$$

c) Unter Secans, Cosecans, Cotangens eines beliebigen Winkels $\alpha$ versteht man bezw. die reciproken Werthe von Cosinus, Sinus, Tangens des Winkels.

$$\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}; \quad cosec\, \alpha = \frac{1}{\sin \alpha}; \quad \cot \alpha = \frac{1}{tg\, \alpha}. \tag{27}$$

Anm. Mit Hilfe der Formeln 25, 26, 27 lassen sich alle übrigen Funktionen durch den Cosinus allein ausdrücken. — Unter den Eigenschaften der Funktionen werden künftig in der Regel nur diejenigen von *cos*, *sin* und *tg* berücksichtigt werden, da mittelst 27 die Eigenschaften der drei übrigen Funktiönen sich leicht aus jenen ableiten lassen.

**28.** *Beziehungen zwischen den Funktionen zweier von einander abhängiger Winkel.* —

a) *Complementwinkel.* — Den Cosinus des Complementwinkels giebt 25. Den Sinus erhält man, wenn man in 25 $(R - \alpha)$ für $\alpha$ setzt, die Tangens aus beiden Funktionen nach 26. — So folgt:

$$\cos (R - \alpha) = \sin \alpha; \quad \sin (R - \alpha) = \cos \alpha; \quad tg\, (R - \alpha) = \cot \alpha. \tag{28}$$

V vollständigt man diese Formeln mittelst 27, so erkennt man, d 's der Satz 10 auch für beliebige Winkel gilt.

b) *Supplementwinkel.* — Den Cosinus des Supplementwinkels gi ot 20. Den Sinus erhält man, wenn man in 25 $(2R - \alpha)$ fü $\alpha$ setzt, die Tangens aus 26. — So folgt:

$$\sin (2R - \alpha) = \cos [R - (2R - \alpha)] = \cos (\alpha - R)$$
$$= \cos (R - \alpha) \text{ (nach 19)} = \sin \alpha \text{ (nach 25)}.$$

Also:

29. $cos\,(2R-\alpha) = -cos\,\alpha$; $sin\,(2R-\alpha) = sin\,\alpha$; $tg\,(2R-\alpha) = -tg\,\alpha$.

**Supplementwinkel haben gleiche Sinus, aber entgegengesetzte Cosinus.**

c) *Entgegengesetzte Winkel.* — Den Cosinus des entgegengesetzten Winkels giebt 19. Den Sinus erhält man, wenn man in 25 $(-\alpha)$ für $\alpha$ setzt, die Tangens aus 26. — So folgt:

$$sin\,(-\alpha) = cos\,(R+\alpha) = -cos\,(R-\alpha) \text{ (nach 23a)}$$
$$= -sin\,\alpha \text{ (nach 25).}$$

Also:

30. $cos\,(-\alpha) = cos\,\alpha$; $sin\,(-\alpha) = -sin\,\alpha$; $tg\,(-\alpha) = -tg\,\alpha$.

**Entgegengesetzte Winkel haben entgegengesetzte Sinus, aber gleiche Cosinus.**

**29.** *Funktionen der Grenzwinkel* $2R$, $3R$, $4R$. — Die Cosinus der Grenzwinkel giebt 21. Hieraus erhält man die übrigen Funktionen mittelst 25—27. Die Resultate sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt.

31.

| | *sin* | *cos* | *tg* | *cot* | *sec* | *cosec* |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | +1 | 0 | $+\infty$ | +1 | $\mp\infty$ |
| $R$ | +1 | 0 | $+\infty$ | 0 | $\pm\infty$ | +1 |
| $2R$ | 0 | −1 | 0 | $-\infty$ | −1 | $\pm\infty$ |
| $3R$ | −1 | 0 | $-\infty$ | 0 | $\mp\infty$ | −1 |
| $4R$ | 0 | +1 | 0 | $+\infty$ | +1 | $\mp\infty$ |

Anm. Die Bestimmung des Vorzeichens von $\infty$ bei den beiden letzten Funktionen erfolgt durch die Bemerkung, dass der Uebergang der Funktion aus dem Positiven ins Negative durch den Werth $\infty$ hindurch stattfindet (bei den übrigen Funktionen erfolgt er durch 0 hindurch. Vgl. Th. II, S. 43 unten!)

**30.** *Funktionen der Summe und der Differenz zweier Winkel.* — a) Ersetzt man in 24 die Cosinus der Complementwinkel (nach 25) durch die Sinus der Winkel, so folgt:

32. $$cos\,(\alpha+\beta) = cos\,\alpha\,.\,cos\,\beta - sin\,\alpha\,.\,sin\,\beta.$$

b) Es ist

33. $cos(\alpha-\beta) = cos[\alpha+(-\beta)] = cos\,\alpha\,.\,cos(-\beta) - sin\,\alpha\,.\,sin(-\beta)$; 2)

oder: $cos\,(\alpha-\beta) = cos\,\alpha\,.\,cos\,\beta + sin\,\alpha\,.\,sin\,\beta$. (30)

c) Es ist

$$\sin(\alpha+\beta) = \cos[(R-\alpha)-\beta] \quad (25)$$
$$= \cos(R-\alpha)\,.\,\cos\beta + \sin(R-\alpha)\,.\,\sin\beta; \quad (33)$$

oder:

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\,.\,\cos\beta + \cos\alpha\,.\,\sin\beta. \quad (28)$$ 34.

d) Es ist

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin[\alpha+(-\beta)] = \sin\alpha\,.\,\cos(-\beta) + \cos\alpha\,.\,\sin(-\beta); \quad (34)$$

oder:

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\,.\,\cos\beta - \cos\alpha\,.\,\sin\beta. \quad (30)$$ 35.

e) Dividirt man 34 durch 32, und dividirt rechts jedes Glied des Zählers und des Nenners durch $\cos\alpha\,.\,\cos\beta$, so folgt nach 26:

$$tg(\alpha+\beta) = \frac{tg\,\alpha + tg\,\beta}{1 - tg\,\alpha\,.\,tg\,\beta}.$$ 36.

f) Dividirt man 35 durch 33, und verfährt wie in e), so folgt:

$$tg(\alpha-\beta) = \frac{tg\,\alpha - tg\,\beta}{1 + tg\,\alpha\,.\,tg\,\beta}.$$ 37.

*Specieller Fall.* — Setzt man in 33 $\alpha = \beta$, so folgt mit Rücksicht auf 21:

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1.$$ 38.

Anm. Es gilt also Formel 14 auch für beliebige Winkel. — Die Substitution $\alpha = \beta$, auf 35 und 37 angewendet, giebt das Resultat $0 = 0$. — Dieselbe Substitution wird in der folgenden Nr. auf die Formeln 32, 34, 36 angewendet werden.

**31.** *Funktionen des Doppelten eines Winkels.* — Setzt man in den Formeln 32, 34, 36 $\alpha = \beta$, so folgt:

a) $$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha,$$ 39.

oder mit Benutzung von 38:

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1.$$ 39a.

b) $$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\,.\,\cos\alpha.$$ 40.

c) $$tg\,2\alpha = \frac{2\,tg\,\alpha}{1 - tg^2\alpha}.$$ 41.

**32.** *Funktionen der Hälfte eines Winkels.* — a) Addirt man 3 und 39, nachdem man in 39 die beiden Seiten vertauscht, so folgt:

$$2\cos^2\alpha = 1 + \cos 2\alpha,$$

u hieraus $$\cos\alpha = \sqrt{\frac{1+\cos 2\alpha}{2}},$$

oder, wenn man $2\alpha = \beta$, und folglich $\alpha = \frac{\beta}{2}$ setzt:

42. $$\cos\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\beta}{2}}.$$

b) Subtrahirt man 39 von 38, nachdem man in 39 die beiden Seiten vertauscht, so folgt:

$$2\sin^2\alpha = 1 - \cos 2\alpha,$$

und hieraus: $$\sin\alpha = \sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{2}},$$

oder, wenn man $2\alpha = \beta$, und folglich $\alpha = \frac{\beta}{2}$ setzt:

43. $$\sin\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\beta}{2}}.$$

c) Dividirt man 43 durch 42, so folgt:

44. $$tg\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\beta}{1+\cos\beta}},$$

oder, je nachdem man den Bruch unter der Wurzel mit $1+\cos\beta$ oder $1-\cos\beta$ erweitert, nach 38:

44a. $$tg\frac{\beta}{2} = \frac{\sin\beta}{1+\cos\beta} = \frac{1-\cos\beta}{\sin\beta}.$$

Anm. Die Funktion $tg\frac{\beta}{2}$ hat die Eigenschaft, dass sich alle Funktionen von $\beta$ rational durch dieselbe ausdrücken lassen. Man führe diese Rechnung aus 1) für den Cosinus (mittelst 44), 2) für den Sinus (mittelst 38), 3) für die Tangens (mittelst 26).

**33.** *Summe und Differenz zweier Sinus oder zweier Cosinus.* — Setzt man in den Formeln 32—35 überall $\sigma$ für $\alpha$ und $\delta$ für $\beta$, so giebt:

34) + 35) $\sin(\sigma+\delta) + \sin(\sigma-\delta) = 2 \cdot \sin\sigma \cdot \cos\delta$;

34) — 35) $\sin(\sigma+\delta) - \sin(\sigma-\delta) = 2 \cdot \cos\sigma \cdot \sin\delta$;

33) + 32) $\cos(\sigma-\delta) + \cos(\sigma+\delta) = 2 \cdot \cos\sigma \cdot \cos\delta$;

33) — 32) $\cos(\sigma-\delta) - \cos(\sigma+\delta) = 2 \cdot \sin\sigma \cdot \sin\delta$.

Setzt man nun links

45. $$\sigma = \frac{\alpha+\beta}{2},\quad \delta = \frac{\alpha-\beta}{2},$$

woraus folgt $\sigma + \delta = \alpha,\ \sigma - \delta = \beta$,

nehmen die vier Formeln folgende Gestalt an:

$$\left.\begin{aligned} \sin\alpha + \sin\beta &= 2\,.\,\sin\sigma\,.\,\cos\delta;\\ \sin\alpha - \sin\beta &= 2\,.\,\cos\sigma\,.\,\sin\delta;\\ \cos\beta + \cos\alpha &= 2\,.\,\cos\sigma\,.\,\cos\delta;\\ \cos\beta - \cos\alpha &= 2\,.\,\sin\sigma\,.\,\sin\delta. \end{aligned}\right\} \qquad 46.$$

Anm. Diese Formeln dienen dazu, eine Summe oder Differenz zweier Sinus oder Cosinus (zum Zweck der bequemeren logarithmischen Berechnung) in ein Product von Funktionen zu verwandeln.

## B. Die Winkelfunktionen in transcendenter und Reihenform.

**34.** *Vorbemerkung.* — Zwischen den Winkelfunktionen und der transcendenten Funktion $a^x$ besteht der Zusammenhang, dass die ersteren sich durch die letztere ausdrücken lassen. Da nun, wie im Folgenden gezeigt werden soll, die Funktion $a^x$ sich als unendliche, nach Potenzen von $x$ fortschreitende Reihe darstellen lässt, so gilt dasselbe für die Winkelfunktionen. — Der Nutzen dieser Darstellung besteht darin, dass die Winkelfunktionen als unendliche Reihen in algebraischer Form erscheinen, und in Folge dessen ihre Berechnung mit beliebig weit gehender Genauigkeit ausgeführt werden kann.

Für den Zweck dieser neuen Darstellung der Winkelfunktionen benutzt man nicht mehr den rechten Winkel mit seinen Theilen: Grad, Minute, Secunde, als Masseinheiten, sondern es wird der Winkel, als Centriwinkel eines beliebigen Kreises betrachtet, durch den zugehörigen Bogen ersetzt, und dieser durch den Radius gemessen. Ist nämlich $\alpha$ ein beliebiger Winkel, $a$ der zugehörige Bogen in dem mit $r$, und $a_1$ der zugehörige Bogen in dem mit $r_1$ beschriebenen Kreise, so ist (Th. II, 287)

$$\frac{\alpha}{4R} = \frac{a}{2r\pi} = \frac{a_1}{2r_1\pi};$$

also
$$\frac{a}{r} = \frac{a_1}{r_1} = x,$$

und $x$ als Quotient zweier Strecken eine Zahl. Ferner folgt:

$$\alpha = \frac{2R}{\pi}\,.\,x; \quad x = \frac{\pi\alpha}{2R}. \qquad 47.$$

Diese Formeln zeigen, wie ein in der einen Masseinheit gegebener Winkel durch die andere ausgedrückt werden kann. Insbesondere ist für

$$\alpha = R, \quad 2R, \quad 4R.$$
$$x = \frac{\pi}{2}, \quad \pi, \quad 2\pi.$$

Anm. Wie gross ist $\alpha$ für $x=1$? D. h.: wie gross ist der Centriwinkel, dessen zugehöriger Bogen dem Radius gleich ist?

**35.** *Darstellung der Funktion* $a^x$ *in Reihenform.* — Wir setzen

$$(1)\qquad F_x = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots,$$

und suchen die Coefficienten $a_0, a_1, a_2 \ldots$ so zu bestimmen, dass die hiernach für $F_x$, $F_y$ und $F_{x+y}$ gebildeten Reihen der Bedingung

$$(2)\qquad F_x \,.\, F_y = F_{(x+y)}$$

genügen. Es soll also sein

$$F_x(a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + a_3 y^3 + \ldots)$$
$$= a_0 + a_1(x+y) + a_2(x+y)^2 + a_3(x+y)^3 + \ldots,$$

oder, nach Potenzen von $y$ geordnet:

$$a_0 F_x + a_1 F_x y + a_2 F_x y^2 + \ldots$$
$$= (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots) + y(a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots)$$

Da nun diese Formel für jeden Werth von $y$ gelten soll, so müssen die Coefficienten gleichhoher Potenzen von $y$ einander gleich sein, z. B. die Coefficienten von $y$:

$$a_1 a_0 + a_1 a_1 x + a_1 a_2 x^2 + a_1 a_3 x^3 + \ldots$$
$$= a_1 + 2\,a_2 x + 3\,a_3 x^2 + 4\,a_4 x^3 + \ldots$$

Da diese Formel für jeden Werth von $x$ gelten soll, so müssen die Coefficienten gleichhoher Potenzen von $x$ einander gleich sein; d. h.:

$$a_1 a_0 = a_1;\quad a_1 a_1 = 2a_2;\quad a_1 a_2 = 3a_3;\quad a_1 a_3 = 4a_4;\ \ldots\ a_1 a_{n-1} = n a_n;$$

oder:

$$a_0 = 1;\qquad a_2 = \frac{a_1^{\,2}}{2!};\qquad a_3 = \frac{a_1^{\,3}}{3!};\qquad a_4 = \frac{a_1^{\,4}}{4!};\ \ldots\qquad a_n = \frac{a_1^{\,n}}{n!}.$$

Durch Einsetzung dieser Werthe in (1) erhält man:

$$(3)\qquad F_x = 1 + a_1 x + \frac{a_1^{\,2}}{2!}x^2 + \frac{a_1^{\,3}}{3!}x^3 + \ldots$$

Setzt man nun in (2) $x=1$, und $y$ nach einander gleich 1, 2, 3, ... $(x-1)$, so folgt:

$$(F_1)^2 = F_2;\quad F_1 \,.\, F_2 = F_3;\quad F_1 \,.\, F_3 = F_4;\ \ldots.\ F_1 \,.\, F_{x-1} = F_x,$$

und durch Multiplication aller dieser Formeln:

$$(4)\qquad (F_1)^x = F_x.$$

Setzt man endlich den Werth, welchen $F_1$ für $a_1 = 1$ annimmt, gleich $e$, sodass

$$(5) \qquad e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots \qquad 48.$$

ist, so folgt aus (4) und (3)

$$(6) \qquad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots \qquad 49.$$

Aus (6) erhält man nun leicht die Reihe für $a^x$. Setzt man nämlich in (6) $a_1 x$ für $x$, so folgt mit Rücksicht auf (3)

$$(7) \qquad e^{a_1 x} = F_x, \text{ oder } (e^{a_1})^x = F_x.$$

Setzt man endlich

$$e^{a_1} = a,$$

woraus

$$(8) \qquad a_1 = {}^e l a \qquad 50.$$

folgt, so geht (7) über in

$$(9) \quad a^x = 1 + a_1 x + \frac{a_1^{\,2}}{2!} x^2 + \frac{a_1^{\,3}}{3!} x^3 + \ldots \qquad 51.$$

**36.** *Die Zahl e.* — Das Bildungsgesetz der Reihe (5) besteht darin, dass man das $n^{\text{te}}$ Glied aus dem $(n-1)^{\text{ten}}$ durch Multiplication mit $\frac{1}{n-1}$ erhält. Sie ist also weder arithmetisch noch geometrisch. Es ist nun zuerst zu untersuchen, ob der Werth der Reihe mit wachsender Gliederzahl sich einer bestimmten Grösse nähert, oder ins Unendliche wächst. Im ersten Falle hat $e$ einen bestimmten Werth, im zweiten den Werth $\infty$.

Eine unendliche Reihe heisst convergent oder divergent, je nachdem ihr Werth mit wachsender Gliederzahl sich einer festen Grenze nähert, oder über jede Grenze hinaus wächst. Unter dem Quotienten einer unendlichen Reihe versteht man den positiven Werth des Quotienten zwischen irgend einem ihrer Glieder und dem vorhergehenden. Nun ist die unendliche geometrische Reihe (s. Th. I, Nr. 143) convergent, wenn ihr Quotient kleiner als Eins ist. Dieser Quotient ist für je zwei auf einander folgende Glieder stets derselbe. U somehr wird daher eine allgemeine unendliche Reihe conve gent sein, wenn ihr Quotient von irgend einem Gliede an be tändig kleiner als Eins ist und beständig abnimmt, sodass er von irgend einem Gliede der Reihe an beständig kleiner bl bt als irgend eine gegebene Zahl $q$, die kleiner als Eins is Denn die ganze Reihe würde noch convergiren, wenn man si von diesem Gliede an mit dem unveränderlichen Quotiente $q$ fortsetzte. Ihr erster, endlicher Theil wäre dann eine

endliche Grösse, ihr zweiter eine convergirende unendliche geometrische Reihe. Man kann also den Satz aussprechen:

51a. **Eine unendliche Reihe convergirt, wenn ihr Quotient von irgend einem Gliede an beständig kleiner bleibt, als eine gegebene Zahl, die kleiner als Eins ist.**

Der Quotient der Reihe (9) ist nun

$$\frac{a_1^n}{n!}x^n : \frac{a_1^{n-1}}{(n-1)!}x^{n-1} = \frac{a_1 x}{n}.$$

Da $a_1$ und $x$ unveränderlich sind, während $n$ beständig wächst, so ist der Quotient von dem ersten Gliede an, für welches $a_1 x < n$ ist, kleiner als Eins, und nimmt beständig ab. Demnach convergirt die Reihe (9) für jeden reellen Werth von $a_1$ und $x$.

Es ist also auch $e^x$ für jeden endlichen Werth von $x$ selbst eine endliche Grösse, und die Reihe (6) ist convergent. — Demnach ist auch $e$ eine endliche Grösse, deren Berechnung in Form eines Decimalbruches den Werth liefert:

52. $$e = 2{,}718281828\ldots.$$

Anm. Die Zahl $e$ ist Grundzahl des natürlichen Logarithmensystems (vgl. Th. I, S. 137, Fussnote).

**37.** *Die Funktionen cos und sin in transcendenter und in Reihenform.* — Setzt man in (6) $xi$ für $x$, so folgt (Th. I, 118)

$$(1)\quad e^{xi} = 1 + xi - \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3 i}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5 i}{5!} - \ldots,$$

oder, wenn man

$$(2)\quad \begin{cases} f_x = 1 - \dfrac{x}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \dfrac{x^6}{6!} + \ldots \\ \varphi_x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dfrac{x^7}{7!} + \ldots \end{cases}$$

setzt: (3) $$e^{xi} = f_x + i\,.\,\varphi_x.$$

Ebenso ist

(4) $$e^{yi} = f_y + i\,.\,\varphi_y$$

und (5) $$e^{(x+y)i} = f_{(x+y)} + i\,.\,\varphi_{(x+y)}.$$

Wenn man nun die Potenz mit imaginären Exponenten durch die Festsetzung bestimmt, dass

(6) $$e^{xi}\,.\,e^{yi} = e^{(x+y)i}$$

ist (wodurch nur die Regel 41 in Th. I auf imaginäre Exponenten ausgedehnt wird), so folgt, wenn man für diese drei Potenzen ihre Werthe einsetzt:

$$f_x f_y - \varphi_x \varphi_y + i(f_x \varphi_y + \varphi_x f_y) = f_{(x+y)} + i\varphi_{(x+y)}.$$

Nun können aber zwei complexe Zahlen nur dann einander gleich sein, wenn sowohl ihre reellen, wie ihre imaginären Theile einander gleich sind.*) Aus der letzten Formel folgt also:

$$f_{(x+y)} = f_x f_y - \varphi_x \varphi_y; \quad \varphi_{(x+y)} = f_x \varphi_y + \varphi_x f_y.$$

Vergleicht man diese beiden Formeln mit 32 und 34, so zeigt sich, dass die Funktionen $f$ und $\varphi$ genau den Bedingungen genügen, welche in jenen Formeln für *cos* und *sin* enthalten sind. Und da die Funktionen *cos* und *sin* durch die Formeln 32 und 34 vollständig definirt sind, so ist $f$ mit *cos* und $\varphi$ mit *sin* identisch. Man erhält also, wenn man für $f_x$ und $\varphi_x$ einerseits $\cos x$ und $\sin x$, andrerseits ihre oben aufgestellten Werthe (2) in Reihenform einsetzt:

$$\left.\begin{aligned} \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots \\ \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \end{aligned}\right\} \qquad 53.$$

Die Formel (3) geht nun über in:

$$e^{xi} = \cos x + i \sin x. \qquad 54.$$

Setzt man hierin $(-x)$ für $x$, so folgt mit Rücksicht auf 30:

$$e^{-xi} = \cos x - i \sin x.$$

Und aus den beiden letzten Formeln folgt weiter:

$$\cos x = \frac{e^{xi} + e^{-xi}}{2}; \quad \sin x = \frac{e^{xi} - e^{-xi}}{2i}. \qquad 55.$$

Ferner folgt aus (6), wenn man nach 54 die Potenzen von $e$ durch die Winkelfunktionen ersetzt:

$$(\cos x + i \sin x)(\cos y + i \sin y) = \cos(x + y) + i \sin(x + y). \qquad 56.$$

Setzt man hierin $x = y$, so folgt:

$$(\cos x + i \sin x)^2 = \cos 2x + i \sin 2x,$$

und allgemein:

$$(\cos x + i \sin x)^n = \cos nx + i \sin nx. \qquad 57.$$

I twickelt man in dieser Formel die linke Seite nach Th. I, 1 , und setzt die reellen und die imaginären Theile einander g ich, so folgt:

---

*) Denn aus $a + bi = a_1 + b_1 i$ folgt $(a - a_1) = (b_1 - b)i$. Da aber e reelle Zahl einer imaginären nicht gleich sein kann, so muss (wenn a , $a_1$, $b_1$ reell sind) $b_1 - b = 0$ sein, woraus $a - a_1 = 0$ folgt. Es muss a $a = a_1$ und $b = b_1$ sein.

58. $\begin{cases} \cos nx = \cos^n x - n_{\cdot 2} \cos^{n-2} x \cdot \sin^2 x + n_{\cdot 4} \cos^{n-4} x \cdot \sin^4 x - \dots \\ \sin nx = n \cdot \cos^{n-1} x \cdot \sin x - n_{\cdot 3} \cos^{n-3} x \cdot \sin^3 x + n_{\cdot 5} \cos^{n-5} x \cdot \sin^5 x - \dots \end{cases}$

**Anm.** In den Formeln 56 und 57 sind 32, 34, 39, 40 enthalten

Für $x = \frac{\pi}{2}$ ist $\cos x = 0$, $\sin x = 1$; also geht 54 über in:

$$e^{\frac{\pi}{2} i} = i,$$

59. oder, mit $i$ potenzirt: $e^{-\frac{\pi}{2}} = i^i$.

**Anm.** Die Darstellung der übrigen trigonometrischen Funktionen in Reihenform wird ihrer geringeren Wichtigkeit wegen hier übergangen.

**38.** *Die Funktionen des Logarithmus und der Wurzel.* — Potenzirt man die Formel

(1) $e^{\frac{\pi}{2} i} = i$

mit 2, so folgt: (2) $e^{\pi i} = -1$.

Dies, mit 2 potenzirt, giebt:

(3) $e^{2\pi i} = +1$.

Bedeutet ferner $n$ eine ganze Zahl, so giebt (3), mit $n$ potenzirt: (4) $e^{2n\pi i} = +1$;

ferner giebt (4)×(1) (5) $e^{\left(2n + \frac{1}{2}\right)\pi i} = +i$;

ferner (4)×(2) (6) $e^{(2n+1)\pi i} = -1$;

endlich (6)×(1) (7) $e^{\left(2n + \frac{3}{2}\right)\pi i} = -i$.

Die Formeln (4) bis (7) kann man auch schreiben:

60. $e^{4n \cdot \frac{\pi}{2} i} = +1$; $e^{(4n+1)\frac{\pi}{2} i} = +i$; $e^{(4n+2)\frac{\pi}{2} i} = -1$; $e^{(4n+3)\frac{\pi}{2} i} = -i$.

Setzt man in 54 der Reihe nach $x = 4n \cdot \frac{\pi}{2}$, $(4n+1)\frac{\pi}{2}$, $(4n+2)\frac{\pi}{2}$, $(4n+3)\frac{\pi}{2}$, so folgt mit Rücksicht auf 60:

$$\cos 4n \frac{\pi}{2} + i \sin 4n \frac{\pi}{2} = e^{4n \cdot \frac{\pi}{2} i} = +1;$$

$$\cos (4n+1)\frac{\pi}{2} + i \sin (4n+1)\frac{\pi}{2} = e^{(4n+1)\frac{\pi}{2} i} = +i;$$

$$\cos (4n+2)\frac{\pi}{2} + i \sin (4n+2)\frac{\pi}{2} = e^{(4n+2)\frac{\pi}{2} i} = -1;$$

$$\cos (4n+3)\frac{\pi}{2} + i \sin (4n+3)\frac{\pi}{2} = e^{(4n+3)\frac{\pi}{2} i} = -i.$$

her durch Trennung der reellen Theile von den imaginären:

$$\left.\begin{array}{l} \cos 4n\frac{\pi}{2}=+1;\ \cos(4n+1)\frac{\pi}{2}=0;\ \cos(4n+2)\frac{\pi}{2}=-1;\ \cos(4n+3)\frac{\pi}{2}=0; \\ \sin 4n\frac{\pi}{2}=0;\ \sin(4n+1)\frac{\pi}{2}=+1;\ \sin(4n+2)\frac{\pi}{2}=0;\ \sin(4n+3)\frac{\pi}{2}=-1. \end{array}\right\} \quad 61.$$

Anm. In diesen Formeln sind die in 31 gegebenen Werthe von *sin* und *cos* als specielle Fälle enthalten.

Setzt man

$$e^x = c, \text{ also } {}^e l\, c = x,$$

so gehört zu jedem reellen positiven Werthe von $x$ ein Werth von $c$, aber auch umgekehrt zu jedem reellen positiven Werthe von $c$ ein Werth von $x$. Multiplicirt man nun $e^x = c$ mit (4), so folgt:

$$e^{x+2n\pi i} = c;$$

also:

$${}^e l\, c = x + 2n\pi i;$$

d. h.: Eine reelle positive Zahl hat unendlich viele Logarithmen, von denen aber nur einer reell ist (für $n=0$). 62.

Multiplicirt man $e^x = c$ mit (6), so folgt:

$$e^{x+(2n+1)\pi i} = -c;$$

also:

$${}^e l\,(-c) = x + (2n+1)\pi i;$$

d. h.: Eine reelle negative Zahl hat unendlich viele Logarithmen, die sämmtlich imaginär sind. 62a.

Anm. Aus (5) folgt:

$$\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi i = {}^e l\, i;$$

also für $n=0$:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{{}^e l\, i}{i}. \quad 63.$$

Potenzirt man die Formel (4) mit $\frac{1}{k}$ (wobei $k$ eine ganze positive Zahl ist), so folgt:

$$\sqrt[k]{1} = e^{\frac{2n\pi i}{k}}. \quad 64.$$

Setzt man $n$ der Reihe nach den Zahlen 0, 1, 2, ... $(k-1)$ gleich, so erhält man lauter verschiedene Werthe für $\sqrt[k]{1}$. Denn aus $e^{\frac{2r\pi i}{k}} = e^{\frac{2s\pi i}{k}}$ (wobei $r$ und $s < k$ sind) würde folgen:

$e^{\frac{2(r-s)\pi i}{k}} = +1$; d. h.: es müsste $\frac{r-s}{k}$ eine ganze Zahl sein, was nicht möglich ist.

Setzt man $n$ gleich einer Zahl, die $\geqq k$ ist, also gleich $(rk+s)$ (wobei $s < k$ ist), so ist

$$e^{\frac{2(rk+s)\pi i}{k}} = e^{2r\pi i} \cdot e^{\frac{2s\pi i}{k}} = e^{\frac{2s\pi i}{k}},$$

also gleich einem der früheren Werthe.

Demnach hat der Ausdruck $\sqrt[k]{1}$ $k$ von einander verschiedene Werthe, die man erhält, wenn man in 64 für $n$ der Reihe nach die Zahlen 0, 1, 2, ... $(k-1)$ setzt. Einer dieser Werthe (für $n = 0$) ist stets reell, nämlich $+1$. — Ist $s < k$, so sind je zwei der übrigen Werthe durch die Beziehung verbunden:

$$e^{\frac{2s\pi i}{k}} \cdot e^{\frac{2(k-s)\pi i}{k}} = e^{2k\pi i} = +1.$$

Ist nun $k$ ungerade, so ist die Anzahl dieser übrigen Werthe gerade, und sie lassen sich alle paarweise so ordnen, dass das Product jedes Paares gleich 1 ist. Alle diese Werthe sind dann imaginär. — Ist aber $k$ gerade, so bleibt in der Mitte der Reihe der Werth übrig, welcher der Annahme $n = \frac{k}{2}$ entspricht. Aber für $n = \frac{k}{2}$ ist $\sqrt[k]{1} = e^{\pi i} = -1$. In diesem Falle existirt also noch der zweite reelle Werth $-1$.

Anm. Vgl. Th. I, Nr. 98, 108, 113.

Da $\sqrt[k]{a} = \sqrt[k]{1} \cdot \sqrt[k]{a}$ ist, so hat auch die $\sqrt[k]{a}$ $k$ verschiedene Werthe, und die Gleichung $x^n = a$ hat $n$ verschiedene Wurzeln.

Anm. Der Beweis des allgemeinen Satzes, dass jede Gleichung $n^{\text{ten}}$ Grades $n$ Wurzeln besitzt, erfordert Betrachtungen, die nicht hierher gehören.

**39.** *Die inversen trigonometrischen Funktionen.* — Setzt man in 55 $x + 2n\pi$ für $x$, so bleibt (nach 60) die rechte Seite in beiden Formeln unverändert; mithin ist

$cos\,(x + 2n\pi) = cos\,x$; $sin\,(x + 2n\pi) = sin\,x$; $tg\,(x + 2n\pi) =$ […] $x$

(vgl. 18). — Während also zu jedem Werthe von $x$ ein […] stimmter Werth von $cos\,x$, $sin\,x$, $tg\,x$ gehört, giebt es un[…]lich viele (in dem Ausdruck $x + 2n\pi$ enthaltene) Zahlen, wel[…]e zu demselben Funktionswerthe von $sin$, $cos$ oder $tg$ gehören. — Stellt man sich also die Aufgabe, $x$ als Funktion von $si$[…]

$\cos x$, $tg\, x$ darzustellen, so muss der Werth von $x$ in solche Grenzen eingeschlossen werden, dass z. B. einem Werthe von $\sin x$ nur ein Werth von $x$ entspricht. Man setzt zu diesem Zwecke voraus, dass $x$ zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ liege, da in diesem Intervall $x$ und die zugehörige Funktion einander gegenseitig vollkommen bestimmen (s. Nr. 17).

Ist nun

$$\sin x = y;\ \cos x = z;\ tg\, x = u,$$

so nennt man $x$ den *arcussinus* von $y$, oder den *arcuscosinus* von $z$, oder den *arcustangens* von $u$, und schreibt

$$x = \arcsin y;\ x = \arccos z;\ x = arctg\, u.$$

**40.** *Die Funktion arcustangens in Reihenform.* — Setzt man in der Formel 37

$$(1)\qquad tg\,(\alpha - \beta) = \frac{tg\,\alpha - tg\,\beta}{1 + tg\,\alpha \,.\, tg\,\beta}$$

$$(2)\quad tg\,\alpha = x + y;\ tg\,\beta = x;\ \text{also}\ tg\,(\alpha - \beta) = \frac{y}{1 + x^2 + xy},$$

so folgt hieraus:

$$(3)\quad \alpha = arctg\,(x+y);\ \beta = arctg\, x;\ (\alpha - \beta) = arctg\,\frac{y}{1 + x^2 + xy};$$

folglich:

$$(4)\qquad arctg\,(x + y) - arctg\, x = arctg\,\frac{y}{1 + x^2 + xy}.$$

Um nun $arctg\, x$ in Form einer Reihe darzustellen, setzen wir

$$(5)\qquad arctg\, x = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots,$$

und suchen die Coefficienten $a_0$, $a_1$, $a_2$ ... so zu bestimmen, dass die hiernach für $arctg\,(x + y)$ und $arctg\,\frac{y}{1 + x^2 + xy}$ gebildeten Reihen der Bedingung (4) genügen.

Nun ist zunächst, für $x = 0$, $tg\, 0 = 0$ (31), also $arctg\, 0 = 0$; d. h.: $a_0 = 0$. — Dann folgt aus (5)

$$x = tg\,(a_1 x + a_2 x^2 + \ldots)$$

N[illegible] ist aus 53 ersichtlich, dass, wenn man die Reihe für $\sin x$ d[illegible]ch diejenige für $\cos x$ dividirt, das erste Glied des Quoti[illegible]ten $x$ ist, während alle folgenden höhere Potenzen von $x$ e[illegible]halten (vgl. Th. I, 88). Mithin ist in der Reihe für $tg\,(a_1 x +$ $a_2$ [illegible]$^2 + \ldots)$ das erste Glied $a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$, d. h.: $x =$ $a_1$ [illegible] $+ a_2 x^2 + \ldots$, folglich $a_1 = 1$. Demnach geht (5) über in

$$[illegible])\qquad arctg\, x = x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots$$

Setzt man nun in (4) die Reihen ein, welche aus (6) für $arctg\,(x+y)$ und $arctg\,\frac{y}{1+x^2+xy}$ folgen, so erhält man:

$$(x+y)+a_2(x+y)^2+a_3(x+y)^3+\ldots-arctg\,x=\frac{y}{(1+x^2)+xy}+\ldots$$

oder, nach Potenzen von $y$ entwickelt:

$$(x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots)+y(1+2a_2x+3a_3x^2+\ldots)=arctg\,x+\frac{y}{1+x^2}+\ldots$$

Da nun diese Formel für jeden Werth von $y$ gelten soll, so müssen die Coefficienten gleichhoher Potenzen von $y$ einander gleich sein, z. B. die Coefficienten von $x$:

$$1+2a_2x+3a_3x^2+\ldots=\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-\ldots$$

(nach Th. I, 148, jedoch nur unter der Bedingung, dass $x<1$ ist; s. d. Fussnote a. a. O.).

Da diese Formel für jeden Werth von $x\,(<1)$ gelten soll, so müssen die Coefficienten gleichhoher Potenzen von $x$ einander gleich sein; d. h.:

$$a_2=a_4=a_6=\ldots\ldots=0;$$

$$3a_3=-1;\ 5a_5=+1;\ 7a_7=-1;\ \ldots\ldots$$

oder: $$a_3=-\frac{1}{3};\ a_5=+\frac{1}{5};\ a_7=-\frac{1}{7};\ \ldots$$

Durch Einsetzung dieser Werthe in (6) erhält man:

65. $$arctg\,x=x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{7}x^7+\ldots$$

Der Quotient dieser Reihe ist ($n^{\text{tes}}$ Glied durch das $(n-1)^{\text{te}}$ dividirt):

$$\pm\frac{1}{2n-1}x^{2n-1}:\mp\frac{1}{2n-3}\cdot x^{2n-3}=-\frac{2n-3}{2n-1}x^2.$$

Da $x<1$ ist, so ist der Quotient $<1$, und bleibt auch, wenn $n$ zunimmt, beständig kleiner als die Zahl $x^2$, welche selbst $<1$ ist. Daher convergirt die Reihe nach 51a.

Anm. Die Darstellung der übrigen inversen Funktionen in Reihenform wird ihrer geringeren Wichtigkeit wegen hier übergangen.

**41.** ***Zusammenhang zwischen den Funktionen log und arc.*** —

Sei $$a=c\,.\,cos\,x,\quad b=c\,.\,sin\,x,$$

also (nach 38)

$$(1)\qquad a^2+b^2=c^2;\quad \frac{b}{a}=tg\,x.$$

Dann ist

$$(2) \begin{cases} a + bi = c(\cos x + i \sin x) = ce^{xi} \quad (54) \\ a - bi = c(\cos x - i \sin x) = ce^{-xi}, \end{cases}$$

d. h.: Jede complexe Zahl $a \pm bi$ kann in der Form 66.
$ce^{\pm xi}$ dargestellt werden, wobei $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ und $x = \operatorname{arctg} \frac{b}{a}$ ist.

Logarithmirt man (2) nach $e$, so folgt mit Rücksicht auf (1)

$$^{e}l(a \pm bi) = \frac{1}{2}\, ^{e}l(a^2 + b^2) \pm i \,.\, \operatorname{arctg} \frac{b}{a}. \qquad 67.$$

Durch diese Formel ist der Logarithmus einer complexen Zahl selbst als complexe Zahl dargestellt, und auf den Logarithmus einer reellen Zahl und eine *arcustangens*-Funktion zurückgeführt.

Dividirt man die beiden Formeln (2) durch einander, so folgt:

$$\frac{a + bi}{a - bi} = e^{2xi},$$

oder, nach $e$ logarithmirt:

$$^{e}l \frac{a + bi}{a - bi} = 2i \,.\, \operatorname{arctg} \frac{b}{a},$$

oder, wenn man $\frac{b}{a} = z$ setzt:

$$\operatorname{arctg} z = \frac{1}{2i} \,.\, ^{e}l \frac{1 + zi}{1 - zi}. \qquad 68.$$

Mittelst dieser Formel ist die *arcustangens*-Funktion durch einen Logarithmus ausgedrückt.

**42.** *Die logarithmische Reihe.* — Setzt man in der complexen Zahl $a \pm bi$ für $a$ und $b$ imaginäre Zahlen, nämlich

$$(1) \quad a = \pm vi, \quad b = \mp ui,$$

wobei $u$, $v$ reell sind, so ist

$$a \pm bi = u \pm vi;$$

d. h.: Die Substitution (1) verwandelt die complexe Zahl $a \pm bi$ wieder in eine andere complexe Zahl mit reellen Coefficienten. Es ist hiernach gleichgiltig, ob man in der complexen Zahl $a \pm bi$ die Grössen $a$ und $b$ für reell oder imaginär ansieht.

Setzt man nun in 68

$$zi = y, \text{ also } z = -iy,$$

so ist zunächst nach 65

$$arctg\,(-iy) = -\left[iy - \frac{1}{3}(iy)^3 + \frac{1}{5}(iy)^5 - \dots\right]$$
$$= -\left[iy + \frac{1}{3}iy^3 + \frac{1}{5}iy^5 + \dots\right] \text{ (Th. I, 118)}$$
$$= -i\left[y + \frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{5}y^5 + \dots\right]$$

Demnach aus 68

$$\frac{1}{2i}\,{}^e l\frac{1+y}{1-y} = -i\left[y + \frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{5}y^5 + \dots\right],$$

oder, mit $2i$ multiplicirt (da $-i^2 = +1$ ist):

69. $${}^e l\frac{1+y}{1-y} = 2\left[y + \frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{5}y^5 + \frac{1}{7}y^7 + \dots\right],$$

eine Formel, welche zur Berechnung der natürlichen Logarithmen dient, für den Fall, dass $y < 1$ ist.

**43.** *Berechnung von Logarithmen.* — Soll hiernach der natürliche Logarithmus einer beliebigen positiven reellen Zahl $n$ berechnet werden, so muss $n$ auf die Form $\frac{1+y}{1-y}$ gebracht werden, wobei $y < 1$, also etwa $y = \frac{a_1}{a_2}$ und $a_1 < a_2$ ist. Man hat also

$$n = \frac{1 + \frac{a_1}{a_2}}{1 - \frac{a_1}{a_2}} = \frac{a_2 + a_1}{a_2 - a_1},$$

woraus folgt:

$$y = \frac{a_1}{a_2} = \frac{n-1}{n+1}.$$

Demnach ist

70 $${}^e l n = 2\left[\frac{n-1}{n+1} + \frac{1}{3}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^5 + \dots\right].$$

Soll der gemeine Logarithmus von $n$ berechnet werden, so benutzt man die Formel (Th. I, Anm. zu 67)

$$\frac{{}^c l y}{{}^c l x} = {}^x l y; \text{ oder: } {}^{10} l n = \frac{{}^e l n}{{}^e l 10}.$$

Hierdurch ist der gemeine Logarithmus auf den natürl[ichen] [zu]rückgeführt.

Sollen die natürlichen Logarithmen der ganzen Zahlen berechnet werden, so braucht man Formel 70 nur auf solche Zahlen $n$ anzuwenden, die durch keine andere Zahl theilbar sind (Primzahlen). Denn ist $n = pq$, so ist $ln = lp + lq$, also am Einfachsten aus den schon bekannten Logarithmen von $p$ und $q$ zu finden. Die Rechnungen werden aber noch wesentlich abgekürzt durch weitere Formeln, die hier noch abgeleitet werden sollen. Es ist

$$l(p+q) = l\left[p\left(1+\frac{q}{p}\right)\right] = lp + l\left(1+\frac{q}{p}\right).$$

Ferner, wenn man in 70 $n = 1 + \frac{q}{p}$ setzt, woraus $\frac{n-1}{n+1} = \frac{q}{2p+q}$ folgt:

$$^e l\left(1+\frac{q}{p}\right) = 2\left[\frac{q}{2p+q} + \frac{1}{3}\left(\frac{q}{2p+q}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{q}{2p+q}\right)^5 + \ldots\right].$$

Demnach ist

$$^e l(p+q) = {}^e lp + 2\left[\frac{q}{2p+q} + \frac{1}{3}\left(\frac{q}{2p+q}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{q}{2p+q}\right)^5 + \ldots\right]. \quad 71.$$

Anm. Anleitung zur Berechnung einiger Logarithmen. — $^e l2$. Man setze in 71 $p = q = 1$, so ist $^e l2 = {}^e l1 + 2\left[\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^5 + \ldots\right]$. Nun ist $^e l1 = 0$ (Th. I, 81). Aus $\frac{1}{3} = 0{,}333\ldots$ erhält man $\left(\frac{1}{3}\right)^3$, $\left(\frac{1}{3}\right)^5$ durch wiederholte Division mit 9. Setzt man auf diese Weise die Berechnung der Reihe bis incl. $\left(\frac{1}{3}\right)^{11}$ fort, wobei $\frac{1}{3}$ auf 7 Decimalstellen berechnet ist, so erhält man $^e l2 = 0{,}6931470$. — $^e l10 = {}^e l(2^3 + 2)$. Man setze in 71 $p = 2^3$, $q = 2$, so ist $^e l10 = 3\,{}^e l2 + 2\left[\frac{1}{q} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{q}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{q}\right)^5 + \ldots\right] = 2{,}3025850$. Die Zahl $\frac{1}{^e l10}$ heisst der Modul des gemeinen Logarithmensystems. Sie dient, wie schon oben bemerkt, dazu, den gemeinen Logarithmus einer Zahl aus dem natürlichen zu finden. — $^e l5 = {}^e l\frac{10}{2} = {}^e l10 - {}^e l2$.

Weiter hat man

$$p = \sqrt{p^2 - 1 + 1}; \quad lp = \frac{1}{2}\, l[(p^2-1)+1],$$

oder nach 71, wenn man dort $p^2-1$ für $p$, und 1 für $q$ setzt, wodurch $\frac{q}{2p+q}$ in $\frac{1}{2p^2-1}$ übergeht:

$${}^{e}l\,p = \frac{1}{2}\,{}^{e}l(p^2-1) + \left[\frac{1}{2p^2-1} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2p^2-1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2p^2-1}\right)^5 + \ldots\right],$$

oder endlich, wenn man $p^2-1$ durch $(p+1)(p-1)$ ersetzt:

72. $${}^{e}l\,p = \frac{{}^{e}l(p+1) + {}^{e}l(p-1)}{2} + \left[\frac{1}{2p^2-1} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2p^2-1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2p^2-1}\right)^5 + \ldots\right].$$

Ist nun $p$ eine Primzahl, so sind $p+1$ und $p-1$ gerade Zahlen; also können ihre Logarithmen durch denjenigen von 2 und durch die Logarithmen zweier Zahlen ausgedrückt werden, die kleiner sind als $p$.

Anm. Von den beiden in 70 und 72 enthaltenen Reihen ist die letztere diejenige, welche bei weitem rascher convergirt, die also, schon nach wenig Gliedern abgebrochen, ein Resultat von grosser Genauigkeit giebt.

Ist $p$ eine Primzahl von der Beschaffenheit, dass $p^2+1$ sich in Factoren zerlegen lässt, deren Logarithmen man bereits kennt, so kann man eine noch stärker convergirende Reihe anwenden. Es ist

$$p = \sqrt[4]{p^4-1+1};\quad l\,p = \frac{1}{4}\,l[(p^4-1)+1],$$

oder nach 71, wenn man dort $p^4-1$ für $p$, und 1 für $q$ setzt, wodurch $\frac{q}{2p+q}$ in $\frac{1}{2p^4-1}$ übergeht:

$${}^{e}l\,p = \frac{1}{4}\,{}^{e}l(p^4-1) + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2p^4-1} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2p^4-1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2p^4-1}\right)^5 + \ldots\right],$$

oder endlich, wenn man $p^4-1$ durch $(p^2+1)(p+1)(p-1)$ ersetzt:

73. $${}^{e}l\,p = \frac{{}^{e}l(p^2+1) + {}^{e}l(p+1) + {}^{e}l(p-1)}{4} + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2p^4-1} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2p^4-1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2p^4-1}\right)^5 + \ldots\right].$$

Anm. — Anleitung zur Berechnung weiterer Logarithm — ${}^{e}l\,3$. Da $l(3^2+1) = l\,10$ schon bekannt ist, so hat man nach 73 = $\frac{1}{4}\left[{}^{e}l\,10 + 3\,{}^{e}l\,2\right] + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{161} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{161}\right)^3 + \ldots\right]$. Schon die beiden en Glieder der Reihe liefern den Logarithmus auf 8 Stellen genau, nä.. ch ${}_{e}l\,3 = 0{,}47712125$. — ${}^{e}l\,7$. Da $7^2+1 = 5\,.\,10$, so wendet man wie¹– 73

an Für alle grösseren Primzahlen braucht man in den in 72 und 73 enthaltenen Reihen nur noch das erste Glied zu berechnen, um den Logarithmus bis auf 8 (bei 11 bis auf 7) und mehr Decimalstellen genau zu erhalten.

**44.** *Berechnung von* $\pi$. — Aus der Formel 16, $tg\frac{\pi}{4}=1$, folgt $arctg\,1=\frac{\pi}{4}$. Setzt man nun in 65 $x=1$, so folgt mit Rücksicht auf die eben gefundene Formel:

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots$$ 74.

Anm. Zur wirklichen Berechnung von $\pi$ eignet sich diese Reihe ihrer schwachen Convergenz wegen nicht. Im Folgenden wird eine Methode zur Herstellung convergenterer Reihen entwickelt.

Setzt man in der Formel 37

$$tg\,(\alpha-\beta)=\frac{tg\,\alpha-tg\,\beta}{1+tg\,\alpha\,tg\,\beta}$$

der Reihe nach

$$tg\,\alpha=a_0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots\ tg\,\beta=a,$$

und

$$tg\,(\alpha-\beta)=a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,$$

so erhält man für die vier ersten Werthe:

$$(1)\quad\begin{cases} a_1=\frac{a_0-a}{1+a_0a}; & arctg\,a_0-arctg\,a=arctg\,a_1;\\ a_2=\frac{a_1-a}{1+a_1a}; & arctg\,a_1-arctg\,a=arctg\,a_2;\\ a_3=\frac{a_2-a}{1+a_2a}; & arctg\,a_2-arctg\,a=arctg\,a_3;\\ a_4=\frac{a_3-a}{1+a_3a}; & arctg\,a_3-arctg\,a=arctg\,a_4.\end{cases}$$

Durch Addition der rechts stehenden Formeln erhält man

$$(2)\qquad arctg\,a_0-4\,arctg\,a=arctg\,a_4.$$

Setzt man in dieser Formel $a_0=1$, $a=\frac{1}{5}$, so erhält man

au (1) $a_1=\frac{2}{3}$, $a_2=\frac{7}{17}$, $a_3=\frac{9}{46}$, $a_4=-\frac{1}{239}$. Also:

$$(3)\qquad arctg\,1-4\,arctg\frac{1}{5}=-arctg\frac{1}{239}.\text{*)}$$

*) Denn ist $tg\,x=u$, so ist $tg(-x)=-u$; also $arctg\,u=x$; $arctg(-u)$ $=-x=-arctg\,u$.

Setzt man ferner in der ersten der Formeln (1) $a_0 = \frac{1}{5}$, $a = \frac{1}{10}$, so ist $a_1 = \frac{5}{51}$; also

$$(4) \qquad arctg\frac{1}{5} - arctg\frac{1}{10} = arctg\frac{5}{51}.$$

Setzt man endlich in der ersten der Formeln (1) $a_0 = \frac{5}{51}$, $a = \frac{1}{10}$, so ist $a_1 = -\frac{1}{515}$; also

$$(5) \qquad arctg\frac{5}{51} - arctg\frac{1}{10} = -arctg\frac{1}{515}.$$

Addirt man dann die Formeln (3), (4), (5), nachdem man (4) und (5) mit 4 multiplicirt hat, und setzt für *arctg* 1 seinen Werth $\frac{\pi}{4}$, so erhält man zur Berechnung von $\pi$ die überaus rasch convergirende Formel

75. $$\frac{\pi}{4} = 8 \,.\, arctg\frac{1}{10} - 4 \,.\, arctg\frac{1}{515} - arctg\frac{1}{239}.$$

Anm. Nimmt man in der Entwickelung von $arctg\frac{1}{10}$ die ersten drei Glieder, und in der von $arctg\frac{1}{515}$ und $arctg\frac{1}{239}$ jedesmal nur das erste Glied, so erhält man $\pi$ bereits auf 6 Decimalstellen genau. — Gegenwärtig ist $\pi$ bis auf 707 Decimalstellen berechnet (W. Shanks in den Proceedings of the London Mathematical Society. XXI, 315 und XXII, 45).

# Angewandte Trigonometrie.

## A. Die Berechnung der Dreiecke.

(Trigonometrie im engeren Sinne.)

### I. Das rechtwinklige Dreieck.

**45.** Das rechtwinklige Dreieck ist durch zwei seiner Stücke (Seiten und Winkel), unter denen eine Seite sein muss, vollkommen bestimmt. Da ferner durch einen spitzen Winkel des Dreiecks der andere bestimmt ist, so braucht man, wenn zwei Stücke des Dreiecks gegeben sind, nur noch zwei Stücke zu suchen. Hierzu reichen die Formeln aus:

$$(1)\ \cos\alpha = \frac{b}{c}; \quad (2)\ a^2 + b^2 = c^2.$$

Im Ganzen kann man folgende vier Aufgaben stellen:

| | 1. | 2. | 3. | 4. |
|---|---|---|---|---|
| Gegeben: | $a$, $c$. | $a$, $b$. | $b$, $\alpha$. | $c$, $\alpha$. |
| Gesucht: | $b$, $\alpha$. | $c$, $\alpha$. | $c$, $a$. | $b$, $a$. |
| Formel: | (2), (1). | (2), (1). | (1), (2). | (1), (2). |
| Lösung: | $b = \sqrt{c^2 - a^2}$. | $c = \sqrt{a^2 + b^2}$. | $c = \frac{b}{\cos\alpha}$. | $b = c \cdot \cos\alpha$. |
| | $\cos\alpha = \frac{b}{c}$. | $\cos\alpha = \frac{b}{c}$. | $a = \sqrt{c^2 - b^2}$. | $a = \sqrt{c^2 - b^2}$. 76. |

Zu den gesuchten Stücken kann auch die Fläche des Dreiecks gehören. Dieselbe wird gefunden durch die Formel (s. Th. II, 354)

$$(3)\ f^2 = \frac{ab}{2}.$$

Anm. Zur Lösung dieser vier Aufgaben mit Zahlenbeispielen kann in Nr. 11 (S. 9) stehende Cosinustafel, zur Bildung solcher Zahlen-piele die im Anhang stehende Tafel der rationalen rechtwinkligen iecke benutzt werden. — Auf das rechtwinklige Dreieck lässt sich das ichschenklige zurückführen durch Construction der zur Basis ge-en Höhe.

# II. Das schiefwinklige Dreieck.

**46.** *Vorbemerkung.* — Das schiefwinklige Dreieck ist durch drei seiner Stücke (Seiten und Winkel) (unter denen sich eine Seite befinden muss) vollständig bestimmt (Th. II, 88). Die Berechnung der übrigen drei Stücke wird dadurch ermöglicht, dass man das gegebene Dreieck durch rechtwinklige Dreiecke ersetzt. Dies geschieht am einfachsten durch Fällen einer Höhe. Indess sind die hierdurch gewonnenen Formeln nicht einfach genug, zum Theil auch wegen der darin enthaltenen Summen und Differenzen zur logarithmischen Berechnung nicht geeignet. Dieselben werden daher in einer zweiten Methode durch andere, für die Berechnung mehr geeignete, ersetzt werden. — Entsprechend der vierfachen Bestimmung eines Dreiecks durch drei seiner Stücke können die vier Hauptaufgaben aufgestellt werden: das Dreieck zu berechnen aus

1) $a\beta\gamma(\alpha)$; 2) $ab\alpha$; 3) $ab\gamma$; 4) $abc$.

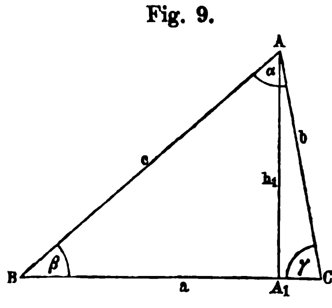
## 1. Erste Methode.

### a. Geometrisches Verfahren.

**47.** *Der Sinussatz.* — Fällt man im Dreieck $\overline{ABC}$ (Fig. 9) die Höhe $AA_1$ auf $BC$, so entstehen die beiden rechtwinkligen Dreiecke $\overline{AA_1B}$ und $\overline{AA_1C}$. Darin ist

$$\sin\beta = \frac{h_1}{c}; \quad \sin\gamma = \frac{h_1}{b}.$$

Fig. 9.




Indem man die erste dieser Formeln durch die zweite dividirt, folgt:

$$(1) \quad \frac{\sin\beta}{\sin\gamma} = \frac{b}{c}.$$

Durch Fällen der Höhe $BB_1$ würde man ebenso erhalten:

$$(2) \quad \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha} = \frac{c}{a}.$$

Und durch Multiplication von (1) und (2) folgt:

$$(3) \quad \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{b}{a}.$$

Diese drei Formeln enthalten zusammen den Satz (Sinussatz):

77. Die Seiten eines Dreiecks verhalten sich wie die Sinus ihrer Gegenwinkel.

Anm. Ist einer der an $a$ liegenden Winkel, z. B. $\gamma > R$, so enthält das Dreieck $\overline{AA_1C}$ nicht $\gamma$, sondern den Winkel $(2R - \gamma)$. Da aber (nach 29) $\sin(2R - \gamma) = \sin\gamma$ ist, so bleibt der Satz auch für das stumpfwinklige Dreieck in Geltung. — Aus dem Sinussatz folgen die Sätze Th. II, 98, 107, 253.

*Anwendung des Sinussatzes.* — Da durch drei gegebene Stücke in einer Formel des Sinussatzes das vierte bestimmt ist, so können mittelst desselben die Aufgaben 1) $a\beta\gamma(\alpha)$ und 2) $ab\alpha$ gelöst werden. Es folgt nämlich aus (3) und (2)

$$1)\qquad b = \frac{a \, . \sin\beta}{\sin\alpha}; \quad c = \frac{a \, . \sin\gamma}{\sin\alpha}.$$

$$2)\quad \sin\beta = \frac{b \, . \sin\alpha}{a}; \ [\gamma = 2R - (\alpha + \beta)]; \ c = \frac{a \, . \sin\gamma}{\sin\alpha},$$

wodurch in beiden Fällen alle unbekannten Stücke des Dreiecks bestimmt sind.

Anm. Ist im zweiten Falle $a > b$, so ist auch $\alpha > \beta$; mithin kann $\beta$ kein stumpfer Winkel sein. Von den beiden Supplementwinkeln, deren gemeinsamer Sinus (nach 29) die Zahl $\frac{b \, . \sin\alpha}{a}$ ist, kann also nur der spitze gleich $\beta$ gesetzt werden. — Ist dagegen $a < b$, so ist auch $\alpha < \beta$, und es kann von den beiden Supplementwinkeln, deren gemeinsamer Sinus $\frac{b \, . \sin\alpha}{a}$ ist, nicht nur der spitze, sondern auch der stumpfe gleich $\beta$ gesetzt werden. Die Aufgabe giebt also für $\beta$, $\gamma$, $c$ je zwei verschiedene Werthe (Vgl. Th. II, 92 und 104 nebst den diese Sätze einleitenden Bemerkungen.)

**48.** *Der Cosinussatz.* — In Fig. 9 ist (nach Th. II, 364)

$$c^2 = a^2 + b^2 \mp 2a \, . A_1C,$$

oder, wenn man $A_1C$ durch seinen Werth $\pm b \, . \cos\gamma$ ersetzt (wobei die oberen oder unteren Vorzeichen gelten, je nachdem der Winkel $\gamma$ spitz oder stumpf ist):

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \, . \cos\gamma.$$

Zwei weitere Formeln von gleicher Gestalt erhält man hieraus durch Vertauschung der Buchstaben. Alle zusammen enthalten den Satz (Cosinussatz):

Das Quadrat einer Dreieckseite ist gleich der 78.
Summe der Quadrate der anderen Seiten, vermindert um das doppelte Product aus diesen Seiten und dem Cosinus des von ihnen eingeschlossenen Winkels.

Anm. Man untersuche die Formel des Cosinussatzes für die Fälle $\gamma = 0, R, 2R$.

*Anwendung des Cosinussatzes.* — Da durch drei gegebene Stücke in einer Formel des Cosinussatzes das vierte bestimmt

ist, so können mittelst desselben die Aufgaben 3) $ab\gamma$ und 4) $abc$ gelöst werden. Es folgt nämlich aus der obigen Formel:

$$3)\quad c=\sqrt{a^2+b^2-2ab.\cos\gamma};\quad \sin\beta=\frac{b\,\sin\gamma}{c};\quad [\alpha=2R-(\beta+\gamma)],$$

$$4)\quad \cos\gamma=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab};\quad \sin\beta=\frac{b.\sin\gamma}{c};\quad [\alpha=2R-(\beta+\gamma)],$$

wodurch in beiden Fällen alle unbekannten Stücke des Dreiecks bestimmt sind.

Anm. In beiden Fällen ist die Aufgabe, nachdem das erste Stück ($c$ oder $\gamma$) bestimmt ist, auf die Aufgabe 2) $bc\gamma$ zurückgeführt. Diesmal aber kann die Bestimmung von $\beta$ aus seinem Sinus keine Zweideutigkeit veranlassen, weil auch $\alpha$ bereits einen bestimmten Werth hat, und die Winkel des Dreiecks durch seine 3 Seiten eindeutig bestimmt sind. Ob also $\beta$ stumpf oder spitz ist, wird stets ersichtlich sein aus der Bedingung, dass $\beta \gtrless \gamma$ ist, je nachdem $b \gtrless c$.

### b. Algebraisches Verfahren.

**49.** In Fig. 9 ist $BA_1=c.\cos\beta$; $CA_1=b.\cos\gamma$. Durch Addition dieser Formeln erhält man

$$(1)\qquad c.\cos\beta+b.\cos\gamma=a,$$

und hieraus durch Vertauschung der Buchstaben

$$(2)\qquad a.\cos\gamma+c.\cos\alpha=b,$$

$$(3)\qquad b.\cos\alpha+a.\cos\beta=c.$$

Von den in diesen drei Gleichungen enthaltenen 6 Grössen $a$, $b$, $c$, $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ kann man je drei als bekannt, die übrigen drei als unbekannt betrachten, und durch Auflösung der Gleichungen nach diesen Unbekannten alle Formeln ableiten, welche zur Berechnung des Dreiecks aus drei gegebenen Stücken dienen können, insbesondere die Formeln des Sinus- und Cosinussatzes.

Setzt man zur Abkürzung

$$\cos\alpha=x,\quad \cos\beta=y,\quad \cos\gamma=z,$$

so lauten die Formeln (1)—(3):

$$(1)\ cy+bz=a;\quad (2)\ az+cx=b;\quad (3)\ bx+ay=c.$$

Um den Sinussatz zu finden, eliminirt man erstens $x$ zwischen (2) und (3), und erhält (nach der Additionsmethode):

$$(4)\qquad a(bz-cy)=b^2-c^2;$$

zweitens durch Elimination von $a$ zwischen (1) und (4):

$$(5)\qquad b^2z^2-c^2y^2=b^2-c^2,$$

oder: $$b^2(1-z^2)=c^2(1-y^2),$$

oder, da $1-y^2=1-cos^2\beta=sin^2\beta$, $1-z^2=1-cos^2\gamma=sin^2\gamma$ ist:

$$b^2\, sin^2\gamma = c^2\, sin^2\beta;\quad b\, sin\,\gamma = c\, sin\,\beta;\quad \frac{b}{c} = \frac{sin\,\beta}{sin\,\gamma},$$

wodurch eine Formel des Sinussatzes hergestellt ist.

Anm. Um die beiden andern Formeln des Sinussatzes auf demselben Wege zu finden, müsste man zwischen den Gleichungen (1) bis (3) $y$ und $b$, bezw. $z$ und $c$ eliminiren. Da jedoch das System der drei Gleichungen (1)—(3) durch Buchstabenvertauschung sich nicht ändert, so sieht man sogleich, dass diese Vertauschung auch auf die Lösung $\frac{b}{c} = \frac{sin\,\beta}{sin\,\gamma}$ anwendbar ist, woraus dann die beiden andern Formeln des Sinussatzes sich ergeben.

Um den Cosinussatz zu finden, hat man zwischen den Gleichungen (1) bis (3) $x$ und $y$, oder kürzer zwischen (1) und (4) $y$ zu eliminiren. Das letztere Verfahren giebt (nach der Additionsmethode)

$$2abz = b^2 - c^2 + a^2,$$

oder, wenn man für $z$ wieder $cos\,\gamma$ setzt:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\, cos\,\gamma,$$

wodurch eine Formel des Cosinussatzes hergestellt ist.

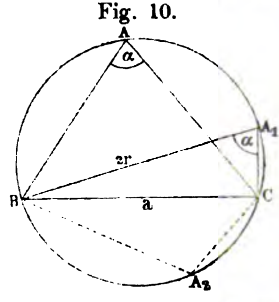
Anm. Hinsichtlich der anderen beiden Formeln des Cosinussatzes vgl. die vorige Anm. — Aus den Formeln (1) bis (3) lassen sich durch andere Arten der Elimination noch weitere Formeln für die Berechnung einzelner Stücke des Dreiecks ableiten; dieselben werden jedoch ihrer geringeren Wichtigkeit wegen hier übergangen.

## 2. Zweite Methode.

### a. Der Satz vom umbeschriebenen Kreise.

**50.** *Vorbemerkung.* — Eine andere Methode, ein gegebenes schiefwinkliges Dreieck durch ein rechtwinkliges zu ersetzen, besteht darin, dass man durch den einen Endpunkt ($B$) einer Seite ($a$) den Durchmesser des Umkreises zieht (Fig. 10) und dessen Endpunkt ($A_1$) mit dem anderen Endpunkte ($C$) der ersten Seite verbindet. Dann ist in dem Hilfsdreieck $\overline{A_1BC}$ der Winkel bei $C$ ein Rechter (Th. II, 165), und der Winkel bei $A_1$ gleich $\alpha$ (Th. II, 166).

Fig. 10.




Anm. Ist $\alpha$ ein stumpfer Winkel ($BA_2C$), so ist $BA_1C = 2R - \alpha$ (Th. II, 178). Da aber $sin\,(2R-\alpha) = sin\,\alpha$ (29), so bleibt die Bedeutung des Hilfsdreiecks unverändert.

Aus der Betrachtung des Dreiecks $\overline{A_1BC}$ ergiebt sich nun die Formel

$$1a)\quad \sin\alpha = \frac{a}{2r};$$

und hieraus durch Vertauschung der Buchstaben:

$$1b)\quad \sin\beta = \frac{b}{2r};\quad 1c)\quad \sin\gamma = \frac{c}{2r}.$$

Diese drei Formeln enthalten zusammen den Satz:

79. Der Sinus eines Winkels im Dreieck ist gleich dem Quotienten aus der gegenüberliegenden Seite und dem Durchmesser des Umkreises.

Anm. Die Formeln 1) zeigen (was übrigens schon aus Th. II, 167 hervorgeht), dass jedes von den drei Stücken eines Dreiecks: $a$, $\alpha$, $r$ durch die beiden anderen bestimmt ist.

Aus den Formeln 1) folgt weiter:

$$2a)\quad a = 2r \,.\, \sin\alpha;\quad 2b)\quad b = 2r \,.\, \sin\beta;\quad 2c)\quad c = 2r \,.\, \sin\gamma.$$

$$3)\quad 2r = \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}.$$

Anm. Wie lauten diese Formeln in Worten? — Durch Elimination von $2r$ zwischen den Formeln 3) erhält man wieder die Formeln des Sinussatzes. Worin besteht der Vorzug der Formeln 1), 2), 3) vor denen des Sinussatzes?

**51.** *Anwendung des Satzes vom umbeschriebenen Kreise.* — Derselbe dient ebenso wie der Sinussatz zur Lösung der Aufgaben $a\beta\gamma(\alpha)$ und $ab\alpha$.

Aufgabe 1. — Ein Dreieck zu berechnen aus einer Seite und zwei Winkeln. ($a\beta\gamma$)*)

Lösung: $1)\ \alpha = 2R - (\beta + \gamma);\quad 2)\ 2r = \frac{a}{\sin\alpha};$

$3)\ b = 2r \,.\, \sin\beta;\quad 4)\ c = 2r \,.\, \sin\gamma.$

Aufgabe 2. — Ein Dreieck zu berechnen aus zwei Seiten und einem nicht eingeschlossenen Winkel. ($ab\alpha$)

Lösung: $1)\ 2r = \frac{a}{\sin\alpha};\quad 2)\ \sin\beta = \frac{b}{2r};$

$3)\ \gamma = 2R - (\alpha + \beta);\quad 4)\ c = 2r \,.\, \sin\gamma.$

Anm. Hinsichtlich der beiden Fälle $a > b$ und $a < b$ s. die Anm. am Schluss von Nr. 47.

---

*) Beispiele zu dieser und den folgenden Aufgaben s. am Schluss des Buches in der „Uebersicht der Formeln und Regeln".

### b. Der Tangentialsatz.

**52.** *Vorbemerkung.* — Eine dritte Methode, ein gegebenes schiefwinkliges Dreieck durch rechtwinklige zu ersetzen, besteht darin, dass man erstens aus einer Ecke ($C$) mit der Seite $b$ einen Kreis beschreibt, welcher die Seite $a$ in $D_1$ und ihre Verlängerung in $D$ schneidet, sodass (Fig. 11)

Fig. 11.

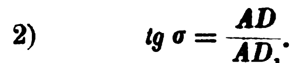
1) $BD = a + b,\ BD_1 = a - b$

ist. Verbindet man dann $D$ und $D_1$ mit $A$, so ist Dreieck $\overline{DAD_1}$ bei $A$ rechtwinklig (Th. II, 165),

Winkel $D_1DA = \frac{\gamma}{2}$ (Th. II, 101),

Winkel $DD_1A = R - \frac{\gamma}{2} = \frac{\alpha + \beta}{2}$

$= \sigma$ (45). Und



2) $$tg\,\sigma = \frac{AD}{AD_1}.$$

Errichtet man zweitens $D_1A_1 \perp D_1A$, so ist Dreieck $\overline{AD_1A_1}$ bei $D_1$ rechtwinklig, und Winkel $D_1AA_1 = \alpha - \sigma = \delta$ (45a). Demnach

3) $$tg\,\delta = \frac{A_1D_1}{AD_1}.$$

Dividirt man nun 2) durch 3), so folgt:

4) $$\frac{tg\,\sigma}{tg\,\delta} = \frac{AD}{A_1D_1}.$$

Nun ist aber $AD \parallel A_1D_1$ (Th. II, 72), folglich Dreieck $\overline{BA_1D_1} \sim \overline{BAD}$ (Th. II, 239), und folglich

5) $$\frac{AD}{A_1D_1} = \frac{BD}{BD_1} = \frac{a+b}{a-b} \text{ [nach 1)].}$$

Durch Vergleichung von 4) und 5) folgt endlich:

6) $$\frac{tg\,\sigma}{tg\,\delta} = \frac{a+b}{a-b}.$$

Zwei weitere Formeln von gleicher Gestalt erhält man durch Vertauschung zwischen den Buchstaben $\alpha\beta\gamma$ und $abc$. Alle zusammen enthalten den Satz (Tangentialsatz):

Die Tangens der halben Summe zweier Winkel 80.
im Dreieck verhält sich zur Tangens ihrer halben Differenz, wie die Summe ihrer Gegenseiten zur Differenz derselben.

**53.** ***Ableitung des Tangentialsatzes aus dem Sinussatze.*** — Aus der Formel des Sinussatzes

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$$

folgt (nach Th. I, 105):

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\sin\alpha + \sin\beta}{\sin\alpha - \sin\beta},$$

oder (nach 46)

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{2 \cdot \sin\sigma \cdot \cos\delta}{2 \cdot \cos\sigma \cdot \sin\delta},$$

oder (nach 26)

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{tg\,\sigma}{tg\,\delta}.$$

**54.** ***Anwendung des Tangentialsatzes.*** — Derselbe dient ebenso wie der Cosinussatz zur Lösung der Aufgabe $ab\gamma$.

Aufgabe 3. — Ein Dreieck zu berechnen aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel. ($ab\gamma$)

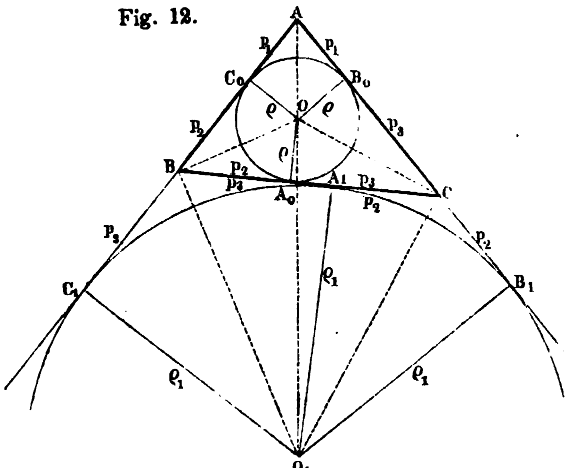
Lösung: 1) $\sigma = R - \frac{\gamma}{2}$; 2) $tg\,\delta = \frac{(a-b)\,tg\,\sigma}{a+b}$; 3) $\begin{cases}\alpha = \sigma + \delta\\ \beta = \sigma - \delta;\end{cases}$

4) $2r = \frac{a}{\sin\alpha}$; 5) $c = 2r \cdot \sin\gamma$.

### c. Der Satz vom einbeschriebenen Kreise.

**55.** ***Vorbemerkung.*** — Eine vierte Methode, ein gegebenes schiefwinkliges Dreieck durch rechtwinklige zu ersetzen, besteht darin, dass man die Mittelpunkte der Berührungskreise mit den Ecken des Dreiecks und den zugehörigen Berührungspunkten [illegible]uf den Se[illegible]en verbindet, [illegible]ie es Fig. 12 für den [illegible]us $O$ beschri[illegible]e- nen In[illegible]is

Fig. 12.



und den aus $O_1$ beschriebenen Ankreis zeigt). Dann ist in dem Hilfsdreiecke $OAC_0$ der Winkel $OAC_0 = \frac{\alpha}{2}$ (Th. II, 196), und die Seite $AC_0 = p_1 = \frac{b+c-a}{2}$ [Th. II, Nr. 99, Formeln 6)].

Aus der Betrachtung des Dreiecks $\overline{OAC_0}$ ergiebt sich nun die Formel:

$$1a)\qquad tg\,\frac{\alpha}{2} = \frac{\varrho}{p_1},$$

und hieraus durch Vertauschung der Buchstaben:

$$1b)\quad tg\,\frac{\beta}{2} = \frac{\varrho}{p_2};\quad 1c)\quad tg\,\frac{\gamma}{2} = \frac{\varrho}{p_3}.$$

Diese drei Formeln enthalten zusammen den Satz:

Die Tangens eines halben Winkels im Dreieck ist gleich dem Quotienten aus dem Radius des Inkreises und der um die halbe Gegenseite verminderten halben Summe der einschliessenden Seiten. 81.

**56.** ***Bestimmung von $\varrho$ durch die Seiten des Dreiecks.*** — Um mittelst der in 81 enthaltenen Formeln die Winkel eines Dreiecks aus seinen Seiten berechnen zu können, ist es noch nöthig, die in jenen Formeln enthaltene Grösse $\varrho$ durch die Seiten auszudrücken.

Nun ist erstens im Dreieck $\overline{O_1AC_1}$ die Seite $AC_1 = c + p_3$ (Th. II, 205) $= p_1 + p_2 + p_3$ [Th. II, Nr. 99, Formeln 1)] $= p$ [daselbst Formel 3)]. Mithin ergiebt sich aus der Betrachtung dieses Dreiecks:

$$2)\qquad tg\,\frac{\alpha}{2} = \frac{\varrho_1}{p}.$$

Zweitens ist im Dreieck $\overline{O_1BA_1}$ die Seite $BA_1 = p_3$ (Th. II, 204), und der Winkel $O_1BA_1 = R - \frac{\beta}{2}$ (Th. II, 196, Anm. z. 122). Mithin ergiebt sich aus der Betrachtung dieses Dreiecks:

$$3)\qquad cot\left(R - \frac{\beta}{2}\right) = tg\,\frac{\beta}{2} = \frac{p_3}{\varrho_1}.$$

Durch Multiplication der Formeln 2) und 3) erhält man

$$tg\,\frac{\alpha}{2}\,.\,tg\,\frac{\beta}{2} = \frac{p_3}{p},$$

und, wenn man $tg\frac{\alpha}{2}$ und $tg\frac{\beta}{2}$ durch ihre aus 1) folgenden Werthe ersetzt:

$$\frac{\varrho^2}{p_1 p_2} = \frac{p_3}{p},$$

82. oder: $$\varrho = \sqrt{\frac{p_1 p_2 p_3}{p}}.$$

**57.** *Ableitung des Satzes vom einbeschriebenen Kreise aus dem Cosinussatze.* — Aus der Formel des Cosinussatzes

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \,.\, \cos\alpha$$

folgt $$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$

Addirt man diese Formel zu $1 = 1$, so folgt:

$$1 + \cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 + 2bc - a^2}{2bc} = \frac{(b+c)^2 - a^2}{2bc} = \frac{(b+c+a)(b+c-a)}{2bc}$$

$$= \frac{2p \,.\, 2p_1}{2bc} = \frac{2pp_1}{bc};$$

$$\frac{1+\cos\alpha}{2} = \frac{pp_1}{bc}; \quad \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{pp_1}{bc}},$$

oder nach (42)

83. $$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{pp_1}{bc}}; \quad \cos\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{pp_2}{ca}}; \quad \cos\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{pp_3}{ab}}.$$

Subtrahirt man $1 = 1$ von der Formel für $\cos\alpha$, so folgt:

$$\cos\alpha - 1 = \frac{b^2 + c^2 - 2bc - a^2}{2bc} = \frac{(b-c)^2 - a^2}{2bc},$$

oder, wenn man auf beiden Seiten mit $(-1)$ multiplicirt:

$$1 - \cos\alpha = \frac{a^2 - (b-c)^2}{2bc} = \frac{(a+b-c)(a-b+c)}{2bc}$$

$$= \frac{2p_3 \,.\, 2p_2}{2bc} = \frac{2p_2 p_3}{bc};$$

$$\frac{1-\cos\alpha}{2} = \frac{p_2 p_3}{bc}; \quad \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{p_2 p_3}{bc}},$$

oder (nach 43)

84. $$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{p_2 p_3}{bc}}; \quad \sin\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{p_3 p_1}{ca}}; \quad \sin\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{p_1 p_2}{ab}}$$

Anm. Wodurch unterscheiden sich die Formeln 83 und 84, und wie sind dieselben zu merken?

Dividirt man die ersten der Formeln 83 und 84 durch einander, so folgt:

$$tg\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{p_2p_3}{pp_1}}=\sqrt{\frac{p_1p_2p_3}{pp_1^2}}=\frac{1}{p_1}\sqrt{\frac{p_1p_2p_3}{p}},$$

oder, wenn man die Wurzelgrösse zur Abkürzung gleich $\varrho$ setzt:

$$tg\frac{\alpha}{2}=\frac{\varrho}{p_1}.$$

Anm. Man erkennt leicht, dass die Wurzelgrösse sich durch die Vertauschungen, welche $tg\frac{\alpha}{2}$ in $tg\frac{\beta}{2}$ und $tg\frac{\gamma}{2}$ überführen, nicht ändert. — Die geometrische Bedeutung von $\varrho$ geht wieder aus Fig. 12 hervor.

**58.** *Anwendung des Satzes vom einbeschriebenen Kreise.* — Derselbe dient ebenso wie der Cosinussatz zur Lösung der Aufgabe *abc*.

Aufgabe 4. — Ein Dreieck zu berechnen aus den drei Seiten. (*abc*)

Lösung: 1) $p=\frac{a+b+c}{2}$; $p_1=p-a$; $p_2=p-b$; $p_3=p-c$ [Th. II, Nr. 99, Formeln 5)]; 2) $\varrho=\sqrt{\frac{p_1p_2p_3}{p}}$;

3) $tg\frac{\alpha}{2}=\frac{\varrho}{p_1}$; $tg\frac{\beta}{2}=\frac{\varrho}{p_2}$; $tg\frac{\gamma}{2}=\frac{\varrho}{p_3}$.

**59.** *Formeln zur Berechnung der Fläche eines Dreiecks.* — Die Fläche eines Dreiecks kann entweder durch Seiten und Winkel allein, oder durch $r$ und die Winkel, oder durch $\varrho$ und die Seiten ausgedrückt werden.

1) Wenn man in der Formel

$$f^2=\frac{ah_1}{2} \text{ (Th. II, 354)}$$

$h_1$ durch seinen Werth $b\,.\,sin\,\gamma$ ersetzt (Fig. 9, S. 42), so folgt:

$$f^2=\frac{ab\,.\,sin\,\gamma}{2}, \qquad 85.$$

woraus zwei weitere Formeln durch Vertauschung sich ergeben. ie drei zusammen enthalten den Satz:

Die Fläche eines Dreiecks ist gleich dem halben ·oduct aus zwei Seiten und dem Sinus des von ihnen ngeschlossenen Winkels.

2) Wenn man in der Formel 85 $a$ und $b$ durch ihre Werthe $.\,sin\,\alpha$ und $2r\,.\,sin\,\beta$ ersetzt [Nr. 50, Formeln 2)], so folgt:

$$f^2=2r^2\,sin\,\alpha\,sin\,\beta\,sin\,\gamma.$$

**In Worten: Die Fläche eines Dreiecks ist gleich dem doppelten Product aus dem Quadrat des Radius des Umkreises, und den Sinus seiner drei Winkel.**

3) Nach Th. II, 357 ist

87. $$f^2 = p\varrho.$$

**In Worten: Die Fläche eines Dreiecks ist gleich dem Product aus seinem halben Umfang und dem Radius des Inkreises.**

Anm. Wenn man in 85 ein $\varrho$ durch seinen Werth $\frac{c}{2r}$ ersetzt [Nr. 50, Formeln 1)], so folgt:

88. $$f^2 = \frac{abc}{4r}.$$

In Worten? — Wenn man in 87 $\varrho$ durch seinen aus 82 folgenden Werth ersetzt, so folgt

89. $$f^2 = \sqrt{pp_1p_2p_3}.$$

Noch andere Formeln s. in der folgenden Nr. (Formeln 91.)

**60.** *Erweiterung. Der Satz vom anbeschriebenen Kreise.* — Aus der Betrachtung des Dreiecks $\overline{O_1AC_1}$ (Fig. 12) folgt [Nr. 56, Formel 2)]:

1a) $$tg\frac{\alpha}{2} = \frac{\varrho_1}{p},$$

und hieraus durch Vertauschung der Buchstaben:

1b) $$tg\frac{\beta}{2} = \frac{\varrho_2}{p};\quad 1c)\ tg\frac{\gamma}{2} = \frac{\varrho_3}{p}.$$

Diese drei Formeln enthalten zusammen den Satz:

90. Die Tangens eines halben Winkels im Dreieck ist gleich dem Quotienten aus dem Radius des der gegenüberliegenden Seite anbeschriebenen Kreises und dem halben Umfange des Dreiecks.

Setzt man die aus 81 und 90 folgenden Werthe für $tg\frac{\alpha}{2}$, $tg\frac{\beta}{2}$, $tg\frac{\gamma}{2}$ einander gleich, so folgt:

$$\frac{\varrho}{p_1} = \frac{\varrho_1}{p};\quad \frac{\varrho}{p_2} = \frac{\varrho_2}{p};\quad \frac{\varrho}{p_3} = \frac{\varrho_3}{p},$$

oder (mit Rücksicht auf 87)

91. 2) $$f^2 = p\varrho = p_1\varrho_1 = p_2\varrho_2 = p_3\varrho_3.$$

Aus der Betrachtung des Dreiecks $\overline{O_1BA_1}$ (Fig. 12) f[olg]t [Nr. 56, Formel 3)]:

3a) $$tg\,\frac{\beta}{2} = \frac{p_3}{\varrho_1},$$

und hieraus durch Vertauschung der Buchstaben:

3b) $$tg\,\frac{\gamma}{2} = \frac{p_1}{\varrho_2};\ tg\,\frac{\alpha}{2} = \frac{p_2}{\varrho_3}.$$ 92.

Endlich folgt aus 2)

$$\frac{p_3}{\varrho_1} = \frac{p_1}{\varrho_3};\ \frac{p_1}{\varrho_2} = \frac{p_2}{\varrho_1};\ \frac{p_2}{\varrho_3} = \frac{p_3}{\varrho_2}.$$

Dies in den Formeln 3) eingesetzt, giebt:

4a) $$tg\,\frac{\beta}{2} = \frac{p_1}{\varrho_3};$$ 4b) $$tg\,\frac{\gamma}{2} = \frac{p_2}{\varrho_1};$$ 4c) $$tg\,\frac{\alpha}{2} = \frac{p_3}{\varrho_2}.$$ 93.

*Zusammenstellung* der in 81, 90, 92, 93 enthaltenen Werthe für $tg\,\frac{\alpha}{2}$, $tg\,\frac{\beta}{2}$, $tg\,\frac{\gamma}{2}$. 94.

| | 81. | 90. | 92. | 93. |
|---|---|---|---|---|
| $tg\,\frac{\alpha}{2}$ | $\frac{\varrho}{p_1}$ | $\frac{\varrho_1}{p}$ | $\frac{p_2}{\varrho_3}$ | $\frac{p_3}{\varrho_2}$ |
| $tg\,\frac{\beta}{2}$ | $\frac{\varrho}{p_2}$ | $\frac{\varrho_2}{p}$ | $\frac{p_3}{\varrho_1}$ | $\frac{p_1}{\varrho_3}$ |
| $tg\,\frac{\gamma}{2}$ | $\frac{\varrho}{p_3}$ | $\frac{\varrho_3}{p}$ | $\frac{p_1}{\varrho_2}$ | $\frac{p_2}{\varrho_1}$ |

Anm. Welche Formeln ergeben sich durch Gleichsetzung der Werthe 81 und 92, 90 und 92? — Wie lassen sich die Formeln 91 direct aus Fig. 12 ableiten?

**61.** ***Berechnung des Dreiecks aus anderen Stücken als Seiten und Winkeln.*** — Sind zur Berechnung des Dreiecks andere Stücke als Seiten und Winkel gegeben, so sucht man dieselben durch die Seiten auszudrücken. Dadurch erhält man drei Gleichungen, aus denen sich die drei Seiten bestimmen lassen. (Diese Gleichungen sind dann von höherem, als dem zweiten Grade, wenn 2 Seiten und eine der Grössen $\varrho$, oder zwei Höhen und eine der Grössen $p$ gegeben sind.) Die folgenden Formeln, welche bereits oben gefunden sind, oder aus oben gefundenen sich unmittelbar ergeben, zeigen, wie verschiedene Stücke des Dreiecks sich durch die Seiten ausdrücken lassen. (Formeln, welche sich durch blosse Vertauschung der Buchstaben finden lassen, sind weggelassen.)

$$f^2 = \sqrt{pp_1p_2p_3};\quad \sin\alpha = \frac{2f^2}{bc};\quad \cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc};$$

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{p_2p_3}{bc}};\quad \cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{pp_1}{bc}};$$

$$\varrho = \frac{f^2}{p};\quad \varrho_1 = \frac{f^2}{p_1};\quad r = \frac{abc}{4f^2};$$

95. $$h_1 = \frac{2f^2}{a};\quad t_1 = \sqrt{\frac{1}{2}\left(b^2+c^2-\frac{a^2}{2}\right)}$$ (Th. II, 366).

Ist $m_1$ die Halbirungslinie des Winkels $\alpha$, welche die Seite $a$ in die Abschnitte $a_1$ (an $b$) und $a_2$ (an $c$) theilt, so folgt aus Betrachtung der Theildreiecke:

$$\frac{m_1}{\sin\gamma} = \frac{b}{\sin\left(\gamma+\frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{a_1}{\sin\frac{\alpha}{2}};\quad \frac{m_1}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\left(\gamma+\frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{a_2}{\sin\frac{\alpha}{2}};$$

Daher:
$$\frac{b+c}{\sin\left(\gamma+\frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{a}{\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Durch Multiplication dieser Gleichung mit $\frac{m_1}{\sin\gamma} = \frac{b}{\sin\left(\gamma+\frac{\alpha}{2}\right)}$ folgt:

$$\frac{m_1(b+c)}{\sin\gamma} = \frac{ab}{\sin\frac{\alpha}{2}};$$ oder: $$m_1(b+c)\sin\frac{\alpha}{2} = ab\,.\,\sin\gamma = 2f^2;$$

also
$$m_1 = \frac{2f^2}{(b+c)\sin\frac{\alpha}{2}},$$

oder, wenn man für $f^2$ und $\sin\frac{\alpha}{2}$ die Werthe 89 und 84 setzt:

96. $$m_1 = \frac{2\sqrt{pp_1bc}}{(b+c)}.$$

Anm. Statt auf die Bestimmung durch die drei Seiten lassen h viele Aufgaben mittelst der früher abgeleiteten Formeln einfacher auf e andere der vier Hauptaufgaben zurückführen. (Näheres s. in den „Uebu s-aufgaben".)

# B. Die Auflösung von Gleichungen.

## I. Die Gleichung vom zweiten Grade.

**62.** *Vorbemerkung.* — Betrachtet man die Formel 41

$$tg\,2\alpha = \frac{2\,tg\,\alpha}{1 - tg^2\,\alpha}$$

als Gleichung, in welcher $tg\,\alpha$ die Unbekannte ist, und bringt diese Gleichung (nach Th. I, Nr. 92) auf die Normalform, so erhält man die gemischt-quadratische Gleichung

$$(1) \qquad tg^2\,\alpha + \frac{2}{tg\,2\alpha} \cdot tg\,\alpha = 1.$$

Ersetzt man ferner in der Formel 40

$$sin\,2\alpha = 2\,sin\,\alpha\,cos\,\alpha$$

$cos\,\alpha$ durch seinen Werth $\sqrt{1 - sin^2\,\alpha}$ (aus 38), betrachtet diese Formel als Gleichung, in welcher $sin^2\,\alpha$ die Unbekannte ist, und bringt diese Gleichung auf die Normalform, so erhält man die gemischt-quadratische Gleichung

$$(2) \qquad sin^4\,\alpha - sin^2\,\alpha = -\frac{sin^2\,2\alpha}{4}.$$

Ist nun eine gemischt-quadratische Gleichung

$$(3) \qquad x^2 + ax = \pm b$$

gegeben, so kann man, um dieselbe aufzulösen, zunächst (1) oder (2) Glied für Glied mit einem vorläufig noch unbestimmten Factor $\lambda^2$ multipliciren, und erhält

$$(4) \qquad \lambda^2\,tg^2\,\alpha + \frac{2\lambda^2}{tg\,2\alpha} \cdot tg\,\alpha = \lambda^2,$$

$$(5) \qquad \lambda^2\,sin^4\,\alpha - \lambda^2\,sin^2\,\alpha = -\frac{\lambda^2\,sin^2\,2\alpha}{4}.$$

Setzt man nun die drei Glieder der Gleichung (3) der Reihe nach gleich den drei Gliedern der Formel (4) oder der F mel (5), so erhält man drei Gleichungen, durch welche die G össen $\alpha$, $\lambda$, $x$ vollkommen bestimmt sind.

Anm. Die Grösse $\alpha$ ist ebenso wie $\lambda$ zuerst unbestimmt, weil (1) u (2) in Wahrheit Formeln sind, die für jeden Werth von $\alpha$ gelten. D Multiplication von (1) oder (2) mit $\lambda^2$ ist nothwendig, weil sonst die G ichsetzung von (3) mit (1) oder (2) drei Gleichungen mit nur zwei Unb annten liefern würde (vgl. Th. I, Nr. 96). — Die Grössen $\alpha$ und $\lambda$ sind a in Bezug auf die Gleichung (3) als Hilfsgrössen zu betrachten, durch

deren Einführung, wie sogleich sich ergeben wird, die Lösung der vorgelegten Gleichung bewerkstelligt werden kann. — Da die rechte Seite von (1) positiv, die von (2) negativ ist, so muss man die Formel (1) oder (2) anwenden, je nachdem in der vorgelegten Gleichung (3) die Grösse $b$ positiv oder negativ ist. Andernfalls würde man für $\lambda$ und $\sin\alpha$, bezw. $tg\,\alpha$ imaginäre Werthe erhalten, die zur Bestimmung von $x$ unbrauchbar sind.

## Erster Fall: $x^2 + ax = + b$.

**63.** Durch Gleichsetzung der Glieder dieser Gleichung mit denen der Formel (4)

$$\lambda^2\, tg^2\,\alpha + \frac{2\lambda^2}{tg\,2\alpha}\,.\,tg\,\alpha = \lambda^2$$

erhält man die drei Gleichungen:

$$(6a)\quad x^2 = \lambda^2\, tg^2\,\alpha;\quad (6b)\quad ax = \frac{2\lambda^2\, tg\,\alpha}{tg\,2\alpha};\quad (6c)\quad b = \lambda^2,$$

oder, durch Elimination von $\lambda^2$:

$$x^2 = b\,.\,tg^2\,\alpha;\quad ax = \frac{2b\, tg\,\alpha}{tg\,2\alpha},$$

oder, wenn man aus der ersten dieser Gleichungen $x$ bestimmt, und den gefundenen Werth in der zweiten einsetzt, die $\sqrt{b}$ aber mit dem Zeichen + nimmt:

$$(7a)\qquad x = \sqrt{b}\,.\,tg\,\alpha;\quad a\sqrt{b}\,.\,tg\,\alpha = \frac{2b\,.\,tg\,\alpha}{tg\,2\alpha};$$

$$(7b)\qquad tg\,2\alpha = \frac{2b}{a\sqrt{b}} = \frac{2\sqrt{b}}{a}.$$

Nun ist nach 29 $tg\,(2R - \alpha) = -\,tg\,\alpha$, oder $tg\,\alpha = -\,tg\,(2R - \alpha)$, oder, da nach 30 $tg\,(-\,\varphi) = -\,tg\,\varphi$ ist: $tg\,\alpha = tg\,(\alpha - 2R)$; $tg\,2\alpha = tg\,(2\alpha - 2R)$. Die Formel (7b) theilt sich also in die folgenden beiden:

$$tg\,2a = \frac{2\sqrt{b}}{a};\quad tg\,(2\alpha - 2R) = \frac{2\sqrt{b}}{a}.$$

Setzt man nun $R - \alpha = \beta$, so ist $tg\,(-\,2\beta) = \frac{2\sqrt{b}}{a}$. Man kann also in (7a) für $\alpha$ auch $(-\,\beta)$ setzen, und erhält

$$x_1 = \sqrt{b}\,.\,tg\,\alpha;\quad x_2 = \sqrt{b}\,.\,tg\,(-\,\beta) = -\sqrt{b}\,.\,tg\,\beta.$$

Da endlich $tg\,\beta = cot\,\alpha$ ist, so folgt

$$(8)\quad tg\,2\alpha = \frac{2\sqrt{b}}{a};\quad x_1 = +\sqrt{b}\,.\,tg\,\alpha;\quad x_2 = -\sqrt{b}\,.\,cot$$

In den Formeln (8) ist die Lösung der gegebenen Gleichung vollständig enthalten. Ist $a$ negativ, so ist $\sqrt{b}$ mit umgekehrtem Vorzeichen zu nehmen, damit $2\alpha$ positiv bleibt.

Anm. Beispiele für diese und die folgenden Methoden s. am Schluss des Buches in der „Uebersicht der Formeln und Regeln". Man verificire an den Werthen (8) die Beziehungen: $x_1 + x_2 = -a$; $x_1 x_2 = -b$ (Th. I, 118).

Zweiter Fall: $x^2 + ax = -b$.

**64.** Durch Gleichsetzung der Glieder dieser Gleichung mit denen der Formel (5)

$$\lambda^2 \sin^4 \alpha - \lambda^2 \sin^2 \alpha = -\frac{\lambda^2 \sin^2 2\alpha}{4}$$

erhält man die drei Gleichungen:

$$(9a)\ x^2 = \lambda^2 \sin^4 \alpha;\ (9b)\ ax = -\lambda^2 \sin^2 \alpha;\ b = \frac{\lambda^2 \sin^2 2\alpha}{4},$$

oder, durch Elimination von $\lambda^2$:

$$x^2 = \frac{4b \sin^4 \alpha}{\sin^2 2\alpha};\quad ax = -\frac{4b \sin^2 \alpha}{\sin^2 2\alpha},$$

oder, wenn man aus der ersten dieser Gleichungen $x$ bestimmt, und den gefundenen Werth in der zweiten einsetzt, die $\sqrt{b}$ aber mit dem Zeichen $-$ nimmt:

$$x = -\frac{2\sqrt{b} . \sin^2 \alpha}{\sin 2\alpha};\quad -\frac{2a\sqrt{b} \sin^2 \alpha}{\sin 2\alpha} = -\frac{4b \sin^2 \alpha}{\sin^2 2\alpha},$$

oder

$$(10a)\ x = -\sqrt{b} . tg\,\alpha\ (40, 26);\ (10b)\ \sin 2\alpha = \frac{2b}{a\sqrt{b}} = \frac{2\sqrt{b}}{a}.$$

Nun ist nach 29 $\sin(2R - \alpha) = \sin \alpha$. Die Formel (10b) theilt sich also in die folgenden beiden:

$$\sin 2\alpha = \frac{2\sqrt{b}}{a};\ \sin(2R - 2\alpha) = \frac{2\sqrt{b}}{a}.$$

Se  man nun $R - \alpha = \beta$, so ist $\sin 2\beta = \frac{2\sqrt{b}}{a}$. Man kann als in (10a) für $\alpha$ auch $\beta$ setzen, und erhält

$$x_1 = -\sqrt{b} . tg\,\alpha;\quad x_2 = -\sqrt{b} . tg\,\beta.$$

Da ndlich $tg\,\beta = \cot \alpha$ ist, so folgt

$$(\quad)\ \sin 2\alpha = \frac{2\sqrt{b}}{a};\ x_1 = -\sqrt{b} . tg\,\alpha;\ x_2 = -\sqrt{b} . \cot \alpha.$$ 98.

In den Formeln (11) ist die Lösung der gegebenen Gleichung vollständig enthalten. — Ist $a$ negativ, so ist $\sqrt{b}$ mit umgekehrtem Vorzeichen zu nehmen.

Anm. Man verificire an den Werthen (11) die Beziehungen $x_1 + x_2 = -a$; $x_1 x_2 = b$. — Da die Funktion $tg$ alle Werthe von 0 bis $\infty$ annehmen kann, so lässt sich mittelst der Formeln (8) der Winkel $\alpha$ stets bestimmen. Da aber die Funktion $sin$ stets zwischen 0 und 1 liegt, so findet man durch die Formeln (11) nur dann einen Werth für $\alpha$, wenn $2\sqrt{b} < a$, d. h. $a^2 > 4b$ ist. Ist diese Bedingung nicht erfüllt, so sind (nach Th. I, Nr. 101) die Wurzeln der Gleichung imaginär. Demnach werden auch Winkel, deren Sinus und Cosinus nicht zwischen 0 und 1 liegen, als imaginär zu betrachten sein.

**65.** *Reduction der algebraischen Lösung der gemischt-quadratischen Gleichung auf die trigonometrische Form.*

Erster Fall: $x^2 + ax = +b$.

Nach Th. I, Nr. 99, Anm. ist

$$x = \frac{\pm\sqrt{a^2+4b} - a}{2},$$

oder (1) $$x = \frac{a}{2}\left[\pm\sqrt{1+\frac{4b}{a^2}} - 1\right].$$

Setzt man nun

(2) $$\frac{4b}{a^2} = tg^2\, 2\alpha,$$

(was zulässig ist, da $b$, also auch $\frac{4b}{a^2}$ positiv, also $tg\,\alpha$ reell ist), woraus

(3) $$\frac{a}{2} = \frac{\sqrt{b}}{tg\, 2\alpha}$$

folgt, und setzt (2) und (3) in (1) ein, so folgt:

$$x = \frac{\sqrt{b}}{tg\, 2\alpha}\left[\pm\sqrt{1+tg^2\, 2\alpha} - 1\right],$$

oder, da

$$\pm\sqrt{1+tg^2\, 2\alpha} - 1 = \pm\sqrt{\frac{cos^2\, 2\alpha + sin^2\, 2\alpha}{cos^2\, 2\alpha}} - 1 = \pm\frac{1}{cos\, 2\alpha} - 1$$
$$= \frac{\pm 1 - cos\, 2\alpha}{cos\, 2\alpha}$$

ist,

$$x = \frac{\sqrt{b}}{tg\, 2\alpha}\cdot\frac{(\pm 1 - cos\, 2\alpha)}{cos\, 2\alpha} = \frac{\sqrt{b}\,(\pm 1 - cos\, 2\alpha)}{sin\, 2\alpha},$$

also (4) $\begin{cases} x_1 = +\sqrt{b}\left(\frac{1-\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}\right) = +\sqrt{b}\,.\,tg\,\alpha & (44a) \\ x_2 = -\sqrt{b}\left(\frac{1+\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}\right) = -\sqrt{b}\,.\,\cot\alpha & (44a). \end{cases}$

Zweiter Fall: $x^2 + ax = -b$; $(a^2 > 4b)$.

Nach Th. I, Nr. 99, Anm. ist

$$x = \frac{\pm\sqrt{a^2 - 4b} - a}{2},$$

oder (5) $$x = \frac{a}{2}\left[\pm\sqrt{1 - \frac{4b}{a^2}} - 1\right].$$

Setzt man nun

(6) $$\frac{4b}{a^2} = \sin^2 2\alpha,$$

(was zulässig ist, da $b$, also auch $\frac{4b}{a^2}$ positiv, überdies $\frac{4b}{a^2} < 1$, also $\sin\alpha$ reell ist), woraus

(7) $$\frac{a}{2} = \frac{\sqrt{b}}{\sin 2\alpha}$$

folgt, und setzt (6) und (7) in (5) ein, so folgt:

$$x = \frac{\sqrt{b}}{\sin 2\alpha}\left[\pm\sqrt{1 - \sin^2 2\alpha} - 1\right],$$

oder, da $\pm\sqrt{1 - \sin^2 2\alpha} - 1 = \pm\cos 2\alpha - 1$ ist,

$$x = \frac{\sqrt{b}}{\sin 2\alpha}(\pm\cos 2\alpha - 1) = \frac{\sqrt{b}(\pm\cos 2\alpha - 1)}{\sin 2\alpha};$$

also: (8) $\begin{cases} x_1 = -\sqrt{b}\left(\frac{1-\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}\right) = -\sqrt{b}\,.\,tg\,\alpha & (44a) \\ x_2 = -\sqrt{b}\left(\frac{1+\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}\right) = -\sqrt{b}\,.\,\cot\alpha & (44a). \end{cases}$

## II. Die Gleichung vom dritten Grade.

Erster Fall: $y^3 - 3py = 2q$ $(p^3 > q^2)$.

**66.** *Vorbemerkung.* — Setzt man in der Formel 34

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

$= 2\alpha$, so folgt:

$$\sin 3\alpha = \sin\alpha . \cos 2\alpha + \cos\alpha . \sin 2\alpha$$
$$= \sin\alpha (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) + 2\sin\alpha\cos^2\alpha \quad (39,\ 40)$$
$$= 3\sin\alpha\cos^2\alpha - \sin^3\alpha = 3\sin\alpha(1-\sin^2\alpha) - \sin^3\alpha,$$

oder:
$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha.$$

Betrachtet man diese Formel als Gleichung, in welcher $\sin\alpha$ die Unbekannte ist, und bringt diese Gleichung auf die Normalform, so erhält man die cubische Gleichung

$$(1) \qquad \sin^3\alpha - \frac{3}{4}\sin\alpha = -\frac{\sin 3\alpha}{4}.$$

Ist nun eine reducirte cubische Gleichung (vgl. Th. I, Nr. 109)

$$(2) \qquad y^3 - 3py = 2q$$

gegeben, so kann man, um dieselbe aufzulösen, zunächst (1) mit einem vorläufig noch unbestimmten Factor $\lambda^3$ multipliciren, und erhält

$$(3) \quad \lambda^3\sin^3\alpha - \frac{3\lambda^3\sin\alpha}{4} = -\frac{\lambda^3\sin 3\alpha}{4}.$$

Setzt man nun die drei Glieder der Gleichung (2) der Reihe nach gleich den drei Gliedern der Formel (3), so erhält man drei Gleichungen, durch welche die Grössen $\alpha$, $\lambda$, $x$ vollkommen bestimmt sind, nämlich

$$(4a)\ y^3 = \lambda^3\sin^3\alpha;\ (4b)\ py = \frac{\lambda^3\sin\alpha}{4};\ (4c)\ 2q = -\frac{\lambda^3\sin 3\alpha}{4},$$

oder, durch Elimination von $\lambda^3$:

$$y^3 = -\frac{8q . \sin^3\alpha}{\sin 3\alpha};\quad py = -\frac{2q . \sin\alpha}{\sin 3\alpha},$$

oder, wenn man aus der zweiten dieser Gleichungen $y$ bestimmt, und den gefundenen Werth in der ersten einsetzt,

$$-\frac{8q^3\sin^3\alpha}{p^3\sin^3 3\alpha} = -\frac{8q\sin^3\alpha}{\sin 3\alpha};\quad \frac{q^2}{p^3\sin^2 3\alpha} = 1$$

$$(5a) \qquad \sin 3\alpha = \sqrt{\frac{q^2}{p^3}} = \frac{q}{\sqrt{p^3}}.$$

Setzt man diesen Werth in der ersten Gleichung ein, so [illegible]:

$$y^3 = -\frac{8q . \sin^3\alpha\sqrt{p^3}}{q};$$

oder $\qquad (5b) \qquad y = -2\sqrt{p} . \sin\alpha.$

Nun ist nach 29 $\sin(2R - \alpha) = \sin\alpha$. Ferner nach [illegible] $[\sin(-\alpha) =]\ \sin(4R - \alpha) = -\sin\alpha$, oder, wenn man hi[illegible]

$(2R+\alpha)$ für $\alpha$ setzt: $\sin(2R-\alpha)=-\sin(2R+\alpha)=\sin(-2R-\alpha)$. Es ist daher

$$\sin 3\alpha = \sin(2R-3\alpha) = \sin(-2R-3\alpha).$$

Setzt man nun $\left(\frac{2}{3}R-\alpha\right)=\beta$, $\frac{2}{3}R+\alpha=\gamma$, so ist

$$\sin 3\alpha = \sin 3\beta = \sin(-3\gamma).$$

Man kann also in (5b) für $\alpha$ auch $\beta$ oder $-\gamma$ setzen, und erhält

$$y_1=-2\sqrt{p}.\sin\alpha;\ y_2=-2\sqrt{p}.\sin\beta;\ y_3=-2\sqrt{p}.\sin(-\gamma)=+2\sqrt{p}\sin\gamma,$$

oder, indem man $\beta$ und $\gamma$ durch ihre Werthe ersetzt:

$$(6) \qquad \sin 3\alpha = \frac{q}{\sqrt{p^3}}; \qquad 99.$$

$$y_1=-2\sqrt{p}\sin\alpha;\ y_2=-2\sqrt{p}.\sin\left(\frac{2}{3}R-\alpha\right);\ y_3=+2\sqrt{p}.\sin\left(\frac{2}{3}R+\alpha\right).$$

In den Formeln (6) ist die Lösung der gegebenen Gleichung vollständig enthalten. — Hier, wie in den folgenden Fällen ist, wenn $q$ negativ, $\sqrt{p}$ mit entgegengesetztem Vorzeichen zu nehmen.

Anm. Der im Vorstehenden behandelte Fall der cubischen Gleichung ist derjenige, in welchem alle drei Wurzeln reell sind, aber durch die cardanische Formel in imaginärer Form gegeben werden (vgl. Th. I, Nr. 111). Umgekehrt giebt die obige Methode keine der Wurzeln in reeller Form, wenn $p^3 < q^2$ ist, da alsdann $\sin 3\alpha > 1$ sein würde. Die algebraische und die oben ausgeführte trigonometrische Methode zur Auflösung der cubischen Gleichung ergänzen sich also in der Weise, dass die Bestimmung einer reellen Wurzel der Gleichung in reeller Form durch die eine Methode gelingt, wenn die andere versagt. Und zwar führt die algebraische Methode zum Ziel, wenn in der Normalform $y^3+3py=2q$ entweder $p$ positiv, oder $p$ negativ und $p^3 < q^2$ ist, dagegen die trigonometrische Methode, wenn $p$ negativ und $p^3 > q^2$ ist. — (Was ist über den Fall $p^3 = q^2$ zu bemerken?)

**67.** *Reduction der algebraischen Lösung der cubischen Gleichung auf die trigonometrische Form.*

Zweiter Fall: $y^3-3py=2q$ $(p^3 < q^2)$.

Nach Th. I, Nr. 110 ist

$$(1)\quad y=\sqrt[3]{q+\sqrt{q^2-p^3}}+\sqrt[3]{q-\sqrt{q^2-p^3}}.$$

Setzt man nun

$$(2) \qquad \frac{p^3}{q^2}=\sin^2 2\beta;\ \text{also}\ q=\frac{\sqrt{p^3}}{\sin 2\beta}$$

(was zulässig ist, da $p$, also auch $\frac{p^3}{q^2}$ positiv, überdies $\frac{p^3}{q^2} < 1$, also $\sin 2\beta$ reell ist), und setzt in (1) für $q$ seinen Werth, so ist zunächst

$$\sqrt[3]{q \pm \sqrt{q^2 - p^3}}$$

$$= \sqrt[3]{\frac{\sqrt{p^3}}{\sin 2\beta} \pm \sqrt{\frac{p^3}{\sin^2 2\beta} - p^3}} = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{p^3} \pm \sqrt{p^3(1 - \sin^2 2\beta)}}{\sin 2\beta}}$$

$$= \sqrt[3]{\frac{\sqrt{p^3} \pm \cos 2\beta \sqrt{p^3}}{\sin 2\beta}} = \sqrt{p} \,.\, \sqrt[3]{\frac{1 \pm \cos 2\beta}{\sin 2\beta}};$$

also nach 44a

$$\sqrt[3]{q + \sqrt{q^2 - p^3}} = \sqrt{p} \,.\, \sqrt[3]{\cot \beta}; \quad \sqrt[3]{q - \sqrt{q^2 - p^3}} = \sqrt{p} \,.\, \sqrt[3]{tg\, \beta}.$$

Setzt man weiter

(3) $\sqrt[3]{tg\, \beta} = tg\, \alpha$, also $\sqrt[3]{\cot \beta} = \cot \alpha$,

so folgt:

$$\sqrt[3]{q + \sqrt{q^2 - p^3}} = \sqrt{p} \,.\, \cot \alpha; \quad \sqrt[3]{q - \sqrt{q^2 - p^3}} = \sqrt{p} \,.\, tg\, \alpha,$$

und durch Einsetzung dieser Werthe in (1):

$$y = \sqrt{p}\,(tg\, \alpha + \cot \alpha) = \sqrt{p}\left(\frac{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha}\right) = \frac{2\sqrt{p}}{\sin 2\alpha}.$$

Die Lösung der gegebenen Gleichung ist also in folgenden Formeln enthalten:

100. (4) $\sin 2\beta = \frac{\sqrt{p^3}}{q}$; $tg\, \alpha = \sqrt[3]{tg\, \beta}$; $y = \frac{2\sqrt{p}}{\sin 2\alpha}$.

Anm. Dieses Verfahren liefert nur die reelle Wurzel der Gleichung, nicht aber die beiden imaginären. Man kann zwar in (4) für $2\beta$ auch $(2R - 2\beta)$, d. h $R - \beta$ für $\beta$ setzen Dadurch verwandelt sich aber in der zweiten Formel nur $tg\, \beta$ in $\cot \beta$, $tg\, \alpha$ in $\cot \alpha$, also $\alpha$ in $R - \alpha$, $2\alpha$ in $(2R - \alpha)$, weche Verwandlung $\sin 2\alpha$, also auch $y$ ungeändert lässt. — Ueber die Bestimmung der imaginären Wurzeln s. die Anm. am S 188 von Nr. 112 in Th I.

## Dritter Fall: $y^3 + 3py = 2q$.

**68.** Nach Th. I, Nr. 110 ist

(5) $$y = \sqrt[3]{q + \sqrt{q^2 + p^3}} + \sqrt[3]{q - \sqrt{q^2 + p^3}}.$$

Setzt man nun

$$(6) \qquad \frac{p^3}{q^2} = tg^2\, 2\beta, \text{ also } q = \sqrt{p^3}\,.\, cot\, 2\beta,$$

und setzt in (5) für $q$ seinen Werth, so ist zunächst

$$\sqrt[3]{q \pm \sqrt{q^2 + p^3}} = \sqrt[3]{\sqrt{p^3}\,.\, cot\, 2\beta \pm \sqrt{p^3\,(cot^2\, 2\beta + 1)}}$$

$$= \sqrt[3]{\sqrt{p^3}\,.\, cot\, 2\beta \pm \frac{\sqrt{p^3}}{sin\, 2\beta}} = \sqrt{p}\,.\, \sqrt[3]{\frac{cos\, 2\beta \pm 1}{sin\, 2\beta}};$$

also nach 44a

$$\sqrt[3]{q + \sqrt{q^2 + p^3}} = \sqrt{p}\,.\, \sqrt[3]{cot\, \beta}; \quad \sqrt[3]{q - \sqrt{q^2 + p^3}} = -\sqrt{p}\,.\, \sqrt[3]{tg\, \beta}.$$

Setzt man weiter

$$(7) \qquad \sqrt[3]{tg\, \beta} = tg\, \alpha, \text{ also } \sqrt[3]{cot\, \beta} = cot\, \alpha,$$

so folgt:

$$\sqrt[3]{q + \sqrt{q^2 + p^3}} = \sqrt{p}\,.\, cot\, \alpha; \quad \sqrt[3]{q - \sqrt{q^2 + p^3}} = \sqrt{p}\,.\, tg\, \alpha,$$

und durch Einsetzung dieser Werthe in (5)

$$y = \sqrt{p}(cot\, \alpha - tg\, \alpha) = \sqrt{p}\left(\frac{cos^2\, \alpha - sin^2\, \alpha}{sin\, \alpha\, cos\, \alpha}\right) = \frac{2\sqrt{p}.cos 2\alpha}{sin\, 2\alpha} = 2\sqrt{p}.cot 2\alpha.$$

Die Lösung der gegebenen Gleichung ist also in folgenden Formeln enthalten:

$$(8) \quad tg\, 2\beta = \frac{\sqrt{p^3}}{q}; \quad tg\, \alpha = \sqrt[3]{tg\, \beta}; \quad y = 2\sqrt{p}\,.\, cot\, 2\alpha.$$ 101.

Anm. Auch dieses Verfahren liefert nur die reelle Wurzel der Gleichung. Vgl. die vorige Anm. — Warum lässt sich die trigonometrische Methode nicht zur Auflösung von Gleichungen höheren Grades anwenden? (S. Formel 58.)

# Uebersicht der Formeln und Regeln.

**(Zur Wiederholung.)**

## Reine Trigonometrie.

### A. Die Winkelfunktionen als geschlossene Ausdrücke.

*I. Funktionen spitzer Winkel.*

**1. Der Cosinus.**

1. Der grössere von zwei spitzen Winkeln hat den kleineren Cosinus.
2. $\cos 0 = 1$.
3. $\cos R = 0$.
4. $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta = 1, \ (\alpha + \beta = R)$.
5. $\cos(\alpha + \alpha_1) = \cos\alpha \cos\alpha_1 - \cos\beta \cos\beta_1, \ (\alpha + \beta = \alpha_1 + \beta_1 = R)$.
6. $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \cos^2\beta, \ (\alpha + \beta = R)$.
7. $\cos\frac{\gamma}{2} = +\sqrt{\frac{1+\cos\gamma}{2}}$.
8. $\cos 60^0 = \frac{1}{2}$.

**2. Die übrigen Funktionen.**

9. Sind $a$ und $b$ Katheten, $c$ Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, so ist

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}, \quad \cos\alpha = \frac{b}{c},$$

$$tg\,\alpha = \frac{a}{b}, \quad \cot\alpha = \frac{b}{a},$$

$$\sec\alpha = \frac{c}{b}, \quad cosec\,\alpha = \frac{c}{a}.$$

10. Jede Funktion eines spitzen Winkels ist gleich der coordinirten Funktion seines Complementwinkels.
11. Nimmt ein spitzer Winkel zu, so nehmen seine directen Funktionen zu, seine indirecten ab.
12. $\sin 0 = 0, \ tg\,0 = 0, \ \sec 0 = 1, \ \cos 0 = 1, \ \cot 0 = \infty, \ cosec\,0 = \infty$.
13. $\sin R = 1, \ tg\,R = \infty, \ \sec R = \infty, \ \cos R = 0, \ \cot R = 0, \ cosec\,R = 1$.
14. $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$.
15. $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = tg\,\alpha$.
16. $tg\,45^0 = 1$.
17. $\cos 72^0 = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$.

*II. Funktionen beliebiger Winkel.*

**1. Der Cosinus.**

18. Congruente Winkel haben gleiche Cosinus. — $\cos(4nR \pm \alpha) = \cos\alpha$.
19. $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$.
20. $\cos(2R - \alpha) = -\cos\alpha$.
21. $\cos 0, \ R, \ 2R, \ 3R, \ 4I \ \ldots$
    $= +1, \ 0, \ -1, \ 0, \ +1 \ \ldots$
22. Der Cosinus eines Winkel ist im ersten und vierten a-

dranten positiv, im zweiten und dritten negativ. — Der Cosinus eines Winkels nimmt zwischen $+1$ und $-1$ im ersten und zweiten Quadranten ab, im dritten und vierten zu.

**23.** Projicirt man von drei aus einem Punkte gehenden Strecken die erste auf die zweite, und diese Projection auf die dritte, so ist die letzte Projection, dividirt durch die dritte Strecke, gleich dem Producte der Cosinus der beiden Zwischenwinkel.

**23a.** $cos\,(R + \alpha) = -\,cos\,(R - \alpha)$.

**24.** $cos\,(\alpha + \beta) = cos\,\alpha\,cos\,\beta -$
$cos\,(R - \alpha)\,cos\,(R - \beta)$.

**2. Die übrigen Funktionen.**

**25.** $sin\,\alpha = cos\,(R - \alpha)$.

**26.** $tg\,\alpha = \dfrac{sin\,\alpha}{cos\,\alpha}$.

**27.** $sec\,\alpha = \dfrac{1}{cos\,\alpha}$; $cosec\,\alpha = \dfrac{1}{sin\,\alpha}$;
$cot\,\alpha = \dfrac{1}{tg\,\alpha}$.

**28.** $sin(R-\alpha) = cos\,\alpha$; $tg(R-\alpha) = cot\,\alpha$.

**29.** $cos\,(2R - \alpha) = -\,cos\,\alpha$;
$sin\,(2R - \alpha) = sin\,\alpha$;
$tg\,(2R - \alpha) = -\,tg\,\alpha$.

pplementwinkel haben entge- ngesetzte Sinus, aber gleiche sinus.

**30.** $(-\alpha) = cos\,\alpha$; $sin(-\alpha) = -sin\,\alpha$;
$tg\,(-\alpha) = -\,tg\,\alpha$.

tgegengesetzte Winkel haben gegengesetzte Sinus, aber iche Cosinus.

31.

| | sin | cos | tg | cot | sec | cosec |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | +1 | 0 | +∞ | +1 | ∓∞ |
| R | +1 | 0 | +∞ | 0 | ±∞ | +1 |
| 2R | 0 | −1 | 0 | −∞ | −1 | ±∞ |
| 3R | −1 | 0 | −∞ | 0 | ∓∞ | −1 |
| 4R | 0 | +1 | 0 | +∞ | +1 | ∓∞ |

32. $cos(\alpha+\beta) = cos\,\alpha\,cos\,\beta - sin\,\alpha\,sin\,\beta$.

33. $cos(\alpha-\beta) = cos\,\alpha\,cos\,\beta + sin\,\alpha\,sin\,\beta$.

34. $sin(\alpha+\beta) = sin\,\alpha\,cos\,\beta + cos\,\alpha\,sin\,\beta$.

35. $sin(\alpha-\beta) = sin\,\alpha\,cos\,\beta - cos\,\alpha\,sin\,\beta$.

36. $tg\,(\alpha + \beta) = \dfrac{tg\,\alpha + tg\,\beta}{1 - tg\,\alpha\,tg\,\beta}$.

37. $tg\,(\alpha - \beta) = \dfrac{tg\,\alpha - tg\,\beta}{1 + tg\,\alpha\,tg\,\beta}$.

38. $cos^2\,\alpha + sin^2\,\alpha = 1$.

39. $cos\,2\alpha = cos^2\,\alpha - sin^2\,\alpha$.

39a. $cos\,2\alpha = 1 - 2\,sin^2\,\alpha = 2\,cos^2\alpha - 1$.

40. $sin\,2\alpha = 2\,sin\,\alpha\,cos\,\alpha$.

41. $tg\,2\alpha = \dfrac{2\,tg\,\alpha}{1 - tg^2\,\alpha}$.

42. $cos\,\dfrac{\beta}{2} = \sqrt{\dfrac{1 + cos\,\beta}{2}}$.

43. $sin\,\dfrac{\beta}{2} = \sqrt{\dfrac{1 - cos\,\beta}{2}}$.

44. $tg\,\dfrac{\beta}{2} = \sqrt{\dfrac{1 - cos\,\beta}{1 + cos\,\beta}}$.

44a. $tg\,\dfrac{\beta}{2} = \dfrac{sin\,\beta}{1 + cos\,\beta} = \dfrac{1 - cos\,\beta}{sin\,\beta}$.

45. $\sigma = \dfrac{\alpha + \beta}{2}$; $\delta = \dfrac{\alpha - \beta}{2}$.

45a. $\sigma + \delta = \alpha$; $\sigma - \delta = \beta$.

46. $sin\,\alpha + sin\,\beta = 2\,sin\,\sigma\,cos\,\delta$.
$sin\,\alpha - sin\,\beta = 2\,cos\,\sigma\,sin\,\delta$.
$cos\,\beta + cos\,\alpha = 2\,cos\,\sigma\,cos\,\delta$.
$cos\,\beta - cos\,\alpha = 2\,sin\,\sigma\,sin\,\delta$.

## B. Die Winkelfunktionen in transcendenter und Reihenform.

47. $\alpha = \frac{2R}{\pi} . x; \; x = \frac{\pi\alpha}{2R}.$

48. $e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots$

49. $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$

50. $a_1 = {}^e l a.$

51. $a^x = 1 + a_1 x + \frac{a_1^2}{2!} x^2 + \frac{a_1^3}{3!} x^3 + \ldots$

51ª. Eine unendliche Reihe convergirt, wenn ihr Quotient von irgend einem Gliede an beständig kleiner bleibt, als eine gegebene Zahl, die kleiner als Eins ist.

52. $e = 2{,}718281828 \ldots$

53. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots$

$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$

54. $e^{xi} = \cos x + i \sin x.$

55. $\cos x = \frac{e^{xi} + e^{-xi}}{2};$

$\sin x = \frac{e^{xi} - e^{-xi}}{2i}.$

56. $(\cos x + i \sin x)(\cos y + i \sin y) = \cos(x + y) + i \sin(x + y).$

57. $(\cos x + i \sin x)^n = \cos nx + i \sin nx.$

58. $\cos nx = \cos^n x - n_2 \cos^{n-2} x . \sin^2 x + n_4 \cos^{n-4} x . \sin^4 x - \ldots$

$\sin nx = n . \cos^{n-1} x . \sin x - n_3 \cos^{n-3} x . \sin^3 x + n_5 \cos^{n-5} x . \sin^5 x - \ldots$

59. $e^{-\frac{\pi}{2}} = i^i.$

60. $e^{4n . \frac{\pi}{2} i} = +1; \; e^{(4n+1)\frac{\pi}{2} i} = +i;$
$e^{(4n+2)\frac{\pi}{2} i} = -1; \; e^{(4n+3)\frac{\pi}{2} i} = -i.$

61. $\cos 4n . \frac{\pi}{2} = +1; \; \cos(4n+1)\frac{\pi}{2} = 0;$

$\cos(4n+2)\frac{\pi}{2} = -1; \; \cos(4n+3)\frac{\pi}{2} = 0.$

$\sin 4n . \frac{\pi}{2} = 0; \; \sin(4n+1)\frac{\pi}{2} = +1;$

$\sin(4n+2)\frac{\pi}{2} = 0; \; \sin(4n+3)\frac{\pi}{2} = -1.$

62. Eine reelle positive Zahl hat unendlich viele Logarithmen, von denen aber nur einer reell ist ($n = 0$).

$${}^e l c = x + 2n\pi i.$$

62ª. Eine reelle negative Zahl hat unendlich viele Logarithmen, die sämmtlich imaginär sind.

$${}^e l(-c) = x + (2n + 1)\pi i.$$

63. $\frac{\pi}{2} = \frac{{}^e l i}{i}.$

64. $\sqrt[k]{1} = e^{\frac{2n\pi i}{k}}.$

65. $arctg\, x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 +$

66. Jede complexe Zahl $a \pm bi$ ka in der Form $ce^{\pm xi}$ dargeste werden, wobei $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ un $x = arctg\, \frac{b}{a}$ ist.

67. ${}^e l(a \pm bi) = \frac{1}{2}\, {}^e l(a^2 + b^2) \pm i\, arctg$

68. $arctg\, z = \frac{1}{2i}\, {}^e l \frac{1 + zi}{1 - zi}.$

69. $^{e}l\frac{1+y}{1-y} = 2\left[y + \frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{5}y^5 + \frac{1}{7}y^7 + \ldots\right].$

70. $^{e}l n = 2\left[\frac{n-1}{n+1} + \frac{1}{3}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^5 + \ldots\right].$

71. $^{e}l(p+q) = {}^{e}l p + 2\left[\frac{q}{2p+q} + \frac{1}{3}\left(\frac{q}{2p+q}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{q}{2p+q}\right)^5 + \ldots\right].$

72. $^{e}l p = \frac{1}{2}\left[{}^{e}l(p+1) + {}^{e}l(p-1)\right] + \frac{1}{2p^2-1} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2p^2-1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2p^2-1}\right)^5 + \ldots$

73. $^{e}l p = \frac{1}{4}\left[{}^{e}l(p^2+1) + {}^{e}l(p+1) + {}^{e}l(p-1)\right] + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2p^4-1} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2p^4-1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2p^4-1}\right)^5 + \ldots\right].$

74. $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$

75. $\frac{\pi}{4} = 8\, arctg\, \frac{1}{10} - 4\, arctg\, \frac{1}{515} - arctg\, \frac{1}{239}.$

# Angewandte Trigonometrie.

## A. Die Berechnung der Dreiecke.

### *I. Das rechtwinklige Dreieck.*

76.

| Gegeben: | Lösung: |
|---|---|
| 1) $a, c.$ | $b = \sqrt{c^2 - a^2};\ cos\,\alpha = \frac{b}{c}.$ |
| 2) $a, b.$ | $c = \sqrt{a^2 + b^2};\ cos\,\alpha = \frac{b}{c}.$ |
| 3) $b, \alpha.$ | $c = \frac{b}{cos\,\alpha};\ a = \sqrt{c^2 - b^2}.$ |
| 4) $c, \alpha.$ | $b = c . cos\,\alpha;\ a = \sqrt{c^2 - b^2}.$ |

### *II. Das schiefwinklige Dreieck.*

**1. Erste Methode.**

77. Die Seiten eines Dreiecks verhalten sich wie die Sinus ihrer Gegenwinkel (Sinussatz).

$$\frac{a}{sin\,\alpha} = \frac{b}{sin\,\beta} = \frac{c}{sin\,\gamma}.$$

78. Das Quadrat einer Dreieckseite ist gleich der Summe der Quadrate der andern Seiten, vermindert um das doppelte Product aus diesen Seiten und dem Cosinus des von ihnen eingeschlossenen Winkels (Cosinussatz).

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\,ab\,cos\,\gamma.$$

**2. Zweite Methode.**

79. Der Sinus eines Winkels im Dreieck ist gleich dem Quotienten aus der gegenüberliegenden Seite und dem Dur

messer des Umkreises. (Satz vom umbeschriebenen Kreise.)

$$\sin\alpha = \frac{a}{2r};\ \sin\beta = \frac{b}{2r};\ \sin\gamma = \frac{c}{2r}.$$

Aufgabe 1.

Ein Dreieck zu berechnen aus einer Seite und zwei Winkeln $(a\beta\gamma)$.

Lösung: $\alpha = 2R - (\beta+\gamma)$; $2r = \frac{a}{\sin\alpha}$; $b = 2r\,.\,\sin\beta$; $c = 2r\,.\,\sin\gamma$.

Beispiel: $a = 510$; $\beta = 76^0\,19'$; $\gamma = 35^0\,18'$.

| Numeri | | Logarithmi | | Neben-rechnung |
|---|---|---|---|---|
| $a$ | 510 | $a$ | 2,7076 | |
| $\beta$ | 76. 19 | $\sin\alpha$ | 9,9683 | |
| $\gamma$ | 35. 18 | $2r$ | 2,7393 | |
| | 111. 37 | $\sin\beta$ | 9,9875 | |
| $\alpha$ | 68. 23 | $\sin\gamma$ | 9,7618 | |
| $b$ | 533 | $b$ | 2,7268 | |
| $c$ | 317 | $c$ | 2,5011 | |

Aufgabe 2.

Ein Dreieck zu berechnen aus zwei Seiten und einem nicht eingeschlossenen Winkel $(ab\alpha)$.

Lösung: $2r = \frac{a}{\sin\alpha}$; $\sin\beta = \frac{b}{2r}$; $\gamma = 2R - (\alpha+\beta)$; $c = 2r\,.\,\sin\gamma$.

Beispiel: $a = 450$; $b = 85$; $\alpha = 87^0\,55'$.

| Numeri | | Logarithmi | | Neben-rechnung |
|---|---|---|---|---|
| $a$ | 450 | $a$ | 2,6532 | |
| $b$ | 85 | $\sin\alpha$ | 9,9997 | |
| $\alpha$ | 87. 55 | $2r$ | 2,6535 | |
| $\beta$ | 10. 53 | $b$ | 1,9294 | |
| | 98. 48 | $\sin\beta$ | 9,2759 | |
| $\gamma$ | 81. 12 | $\sin\gamma$ | 9,9949 | |
| $c$ | 445 | $c$ | 2,6484 | |

80. Die Tangens der halben Summe zweier Winkel im Dreieck verhält sich zur Tangens ihrer halben Differenz, wie die Summe ihrer Gegenseiten zur Differenz derselben (Tangentialsatz).

$$\frac{s}{d} = \frac{tg\,\sigma}{tg\,\delta};\quad s = a + b;\ \sigma = \tfrac{1}{2}(\alpha+\beta);\quad d = a - b;\ \delta = \tfrac{1}{2}(\alpha-\beta).$$

Aufgabe 3.

Ein Dreieck zu berechnen aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel $(ab\gamma)$.

Lösung: $s = a + b$; $d = a - b$; $\sigma = R - \frac{\gamma}{2}$; $tg\,\delta = \frac{d\,.\,tg\,\sigma}{s}$; $\alpha = \sigma + \delta$; $\beta = \sigma - \delta$; $2r = \frac{a}{\sin\alpha}$; $c = 2r\,.\,\sin\gamma$.

Beispiel: $a = 1196$; $b = 353$; $\gamma = 39^0\,36'$.

| Numeri | | Logarithmi | | Neben-rechnung |
|---|---|---|---|---|
| $a$ | 1196 | $tg\,\sigma$ | 0,4437 | |
| $b$ | 353 | $d$ | 2,9258 | |
| $\gamma$ | 39. 36 | | 3,3695 | |
| $s$ | 1549 | $s$ | 3,1901 | |
| $d$ | 843 | $tg\,\delta$ | 0,1794 | |
| $\sigma$ | 70. 12 | $a$ | 3,0777 | |
| $\delta$ | 56. 31 | $\sin\alpha$ | 9,9040 | |
| $\alpha$ | 126. 43 | $2r$ | 3,1737 | |
| $\beta$ | 13. 41 | $\sin\gamma$ | 9,8044 | |
| $c$ | 951 | $c$ | 2,9781 | |

81. Die Tangens eines halben Winkels im Dreieck ist gleich dem

Quotienten aus dem Radius des Inkreises und der um die halbe Gegenseite verminderten halben Summe der einschliessenden Seiten. (Satz vom einbeschriebenen Kreise.)

$$tg\frac{\alpha}{2}=\frac{\varrho}{p_1};\ tg\frac{\beta}{2}=\frac{\varrho}{p_2};\ tg\frac{\gamma}{2}=\frac{\varrho}{p_3}.$$

$$p_1=\frac{b+c-a}{2};\ p_2=\frac{c+a-b}{2};$$

$$p_3=\frac{a+b-c}{2}.$$

82. $\varrho=\sqrt{\frac{p_1p_2p_3}{p}}.$

83. $\cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{pp_1}{bc}};\ \cos\frac{\beta}{2}=\sqrt{\frac{pp_2}{ca}};\ \cos\frac{\gamma}{2}=\sqrt{\frac{pp_3}{ab}}.$

84. $\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{p_2p_3}{bc}};\ \sin\frac{\beta}{2}=\sqrt{\frac{p_3p_1}{ca}};\ \sin\frac{\gamma}{2}=\sqrt{\frac{p_1p_2}{ab}}.$

Aufgabe 4.

Ein Dreieck zu berechnen aus den drei Seiten ($abc$).

Lösung: $p=\frac{1}{2}(a+b+c)$; $p_1=p-a$; $p_2=p-b$; $p_3=p-c$;

$$\varrho=\sqrt{\frac{p_1p_2p_3}{p}};\ tg\frac{\alpha}{2}=\frac{\varrho}{p_1};$$

$$tg\frac{\beta}{2}=\frac{\varrho}{p_2};\ tg\frac{\gamma}{2}=\frac{\varrho}{p_3}.$$

Beispiel: $a=1532$; $b=533$; $c=1299$.

| | Numeri | Logarithmi | | Nebenrechnung |
|---|---|---|---|---|
| $a$ | 1532 | $p_1$ | 2,1761 | |
| $b$ | 533 | $p_2$ | 3,0603 | |
| $c$ | 1299 | $p_3$ | 2,5832 | |
| $p$ | 1682 | | 7,8196 | |
| $p_1$ | 150 | $p$ | 3,2258 | |
| $p_2$ | 1149 | $\varrho^2$ | 4,5938 | |
| $p_3$ | 383 | $\varrho$ | 2,2969 | |
| $\alpha$ | 105. 44 | $tg\,\alpha/2$ | 0,1208 | |
| $\beta$ | 19. 34 | $tg\,\beta/2$ | 9,2366 | |
| $\gamma$ | 54. 42 | $tg\,\gamma/2$ | 9,7137 | |

85. $f^2=\frac{1}{2}(ab\,.\,\sin\gamma).$

86. $f^2=2r^2\,.\,\sin\alpha\,\sin\beta\,\sin\gamma.$

87. $f^2=p\varrho.$

88. $f^2=\frac{abc}{4r}.$

89. $f^2=\sqrt{pp_1p_2p_3}.$

90. Die Tangens eines halben Winkels im Dreieck ist gleich dem Quotienten aus dem Radius des der gegenüberliegenden Seite anbeschriebenen Kreises und dem halben Umfange des Dreiecks.

$$tg\frac{\alpha}{2}=\frac{\varrho_1}{p};\ tg\frac{\beta}{2}=\frac{\varrho_2}{p};\ tg\frac{\gamma}{2}=\frac{\varrho_3}{p}.$$

91. $f^2=p\varrho=p_1\varrho_1=p_2\varrho_2=p_3\varrho_3.$

92. $tg\frac{\alpha}{2}=\frac{p_2}{\varrho_3};\ tg\frac{\beta}{2}=\frac{p_3}{\varrho_1};\ tg\frac{\gamma}{2}=\frac{p_1}{\varrho_2}.$

93. $tg\frac{\alpha}{2}=\frac{p_3}{\varrho_2};\ tg\frac{\beta}{2}=\frac{p_1}{\varrho_3};\ tg\frac{\gamma}{2}=\frac{p_2}{\varrho_1}.$

94.

| | 81 | 90 | 92 | 93 |
|---|---|---|---|---|
| $tg\frac{\alpha}{2}$ | $\frac{\varrho}{p_1}$ | $\frac{\varrho_1}{p}$ | $\frac{p_2}{\varrho_3}$ | $\frac{p_3}{\varrho_2}$ |
| $tg\frac{\beta}{2}$ | $\frac{\varrho}{p_2}$ | $\frac{\varrho_2}{p}$ | $\frac{p_3}{\varrho_1}$ | $\frac{p_1}{\varrho_3}$ |
| $tg\frac{\gamma}{2}$ | $\frac{\varrho}{p_3}$ | $\frac{\varrho_3}{p}$ | $\frac{p_1}{\varrho_2}$ | $\frac{p_2}{\varrho_1}$ |

95. $h_1 = \frac{2f^2}{a}$; $t_1 = \sqrt{\frac{1}{2}\left(b^2 + c^2 - \frac{a^2}{2}\right)}$.

96. $m_1 = \frac{2\sqrt{pp_1 bc}}{(b+c)}$.

## B. Die Auflösung von Gleichungen.

### *I. Die Gleichung vom zweiten Grade.*

Erster Fall: $x^2 + ax = +b$.

97. $tg\, 2\alpha = \frac{2\sqrt{b}}{a}$; $x_1 = +\sqrt{b} \,.\, tg\, \alpha$. $x_2 = -\sqrt{b} \,.\, cot\, \alpha$.

Beispiel: $x^2 + 13x = 140$.

| *Numeri* | | *Logarithmi* | | *Neben-rechnung* |
|---|---|---|---|---|
| $b$ | 140 | $b$ | 2,1461 | |
| $a$ | 13 | $\sqrt{b}$ | 1,0730 | |
| $2\alpha$ | 61. 13 | 2 | 0,3010 | |
| $\alpha$ | 30. 36,5 | $2\sqrt{b}$ | 1,3740 | |
| | $cot\,\alpha = tg\,\beta$ | $a$ | 1,1139 | |
| $\beta$ | 59· 23,5 | $tg\, 2\alpha$ | 0,2601 | |
| | | $tg\, \alpha$ | 9,7721 | |
| | | $tg\, \beta$ | 0,2280 | |
| $x_1$ | + 7 | $x_1$ | 0,8451 | |
| $x_2$ | − 20 | $x_2$ | 1,3010 | |

Zweiter Fall: $x^2 + ax = -b$.

98. $sin\, 2\alpha = \frac{2\sqrt{b}}{a}$; $x_1 = -\sqrt{b} \,.\, tg\, \alpha$. $x_2 = -\sqrt{b} \,.\, cot\, \alpha$.

Beispiel: $x^2 - 13x = -22$.

| *Numeri* | | *Logarithmi* | | *Neben-rechnung* |
|---|---|---|---|---|
| $b$ | 22 | $b$ | 1,3424 | |
| $a$ | − 13 | $-\sqrt{b}$ | 0,6712 | |
| $2\alpha$ | 46. 11 | 2 | 0,3010 | |
| $\alpha$ | 23. 5,5 | $-2\sqrt{b}$ | 0,9722 | |
| | $cot\,\alpha = tg\,\beta$ | $-a$ | 1,1139 | |
| $\beta$ | 66. 54,5 | $sin\, 2\alpha$ | 9,8583 | |
| | | $tg\, \alpha$ | 9,6298 | |
| | | $tg\, \beta$ | 0,3702 | |
| $x_1$ | + 2 | $x_1$ | 0,3010 | |
| $x_2$ | + 11 | $x_2$ | 1,0414 | |

### *II. Die Gleichung vom dritten Grade.*

Erster Fall: $y^3 - 3py = 2q$ $(p^3 > q^2)$.

99. $sin\, 3\alpha = \frac{q}{\sqrt{p^3}}$; $y_1 = -2\sqrt{p} \,.\, sin\, \alpha$;

$$y_2 = -2\sqrt{p} \,.\, sin\left(\frac{2}{3}R - \alpha\right);$$

$$y_3 = +2\sqrt{p} \,.\, sin\left(\frac{2}{3}R + \alpha\right).$$

Beispiel: $y^3 - 15y = 4$ $(5^3 > 2^2)$.

| *Numeri* | | *Logarithmi* | | *Neben-rechnung* |
|---|---|---|---|---|
| $q$ | 2 | $q$ | 0,3010 | |
| $p$ | 5 | $p^3$ | 2,0969 | |
| $3\alpha$ | 10. 18,3 | $\sqrt{p^3}$ | 1,0484 | |
| $\alpha$ | 3. 26,1 | $sin\, 3\alpha$ | 9,2526 | |
| $60^0 - \alpha$ | 56 33,9 | $p$ | 0,6990 | |
| $60^0 + \alpha$ | 63. 26,1 | $\sqrt{p}$ | 0,3495 | |
| | | 2 | 0,3010 | |
| | | $2\sqrt{p}$ | 0,6505 | |
| | | $sin\, \alpha$ | 8,7775 | |
| | | $sin(60^0 - \alpha)$ | 9,9214 | |
| | | $sin(60^0 + \alpha)$ | 9,9515 | |
| $y_1$ | −0,268 | $y_1$ | 9,4280 | |
| $y_2$ | −3,732 | $y_2$ | 0,5719 | |
| $y_3$ | +4 | $y_3$ | 0,6020 | |

Zweiter Fall: $y^3 - 3py = 2q$ $(p^3 < q^2)$

100. $sin\, 2\beta = \frac{\sqrt{p^3}}{q}$; $tg\, \alpha = \sqrt[3]{tg\, \beta}$;

$$y = \frac{2\sqrt{p}}{sin\, 2\alpha}.$$

Beispiel: $y^3 - 9y = 80$ $(3^3 < 40^2)$.

| *Numeri* | | *Logarithmi* | | *Neben-rechnung* |
|---|---|---|---|---|
| $p$ | 3 | $p^3$ | 1,4314 | |
| $q$ | 40 | $\sqrt{p^3}$ | 0,7157 | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| $2\beta$ | 7. 27,8 | $q$ | 1,6021 |
| $\beta$ | 3. 43,9 | $\sin 2\beta$ | 9,1136 |
| $\alpha$ | 21. 55,5 | $tg\,\beta$ | 28,8144 |
| $2\alpha$ | 43. 51 | $tg\,\alpha$ | 9,6048 |
| | | $p$ | 0,4771 |
| | | $\sqrt{p}$ | 0,2385 |
| | | 2 | 0,3010 |
| | | $2\sqrt{p}$ | 0,5395 |
| | | $\sin 2\alpha$ | 9,8406 |
| $y$ | $+5$ | $y$ | 0,6989 |

Dritter Fall: $y^3 + 3py = 2q$

101. $tg\,2\beta = \frac{\sqrt{p^3}}{q}$; $tg\,\alpha = \sqrt[3]{tg\,\beta}$;

$$y = \frac{2\sqrt{p}}{tg\,2\alpha}.$$

Beispiel: $y^3 + 15y = 448.$

| Numeri | | Logarithmi | | Neben-rechnung |
|---|---|---|---|---|
| $p$ | 5 | $p^3$ | 2,0969 | |
| $q$ | 224 | $\sqrt{p^3}$ | 1,0484 | |
| $2\beta$ | 2. 51,4 | $q$ | 2,3502 | |
| $\beta$ | 1. 25,7 | $tg\,2\beta$ | 8,6982 | |
| $\alpha$ | 16. 17,2 | $tg\,\beta$ | 28,3968 | |
| $2\alpha$ | 32. 34,4 | $tg\,\alpha$ | 9,4656 | |
| | | $p$ | 0,6990 | |
| | | $\sqrt{p}$ | 0,3495 | |
| | | 2 | 0,3010 | |
| | | $2\sqrt{p}$ | 0,6505 | |
| | | $tg\,2\alpha$ | 9,8054 | |
| $y$ | $+7$ | $y$ | 0,8451 | |

# Anhang.

## Uebungssätze und Aufgaben.

### 1. Beliebige Winkel.

#### a) Formeln.

$\sin\alpha =$ **1)** $\sqrt{1+\cos\alpha}\,.\,\sqrt{1-\cos\alpha}$, 2) $\cos\alpha\,.\,tg\,\alpha$, 3) $tg\,\alpha : \sec\alpha$, 4) $tg\,\alpha : \sqrt{1+tg^2\alpha}$, 5) $\sqrt{\sec^2\alpha-1} : \sec\alpha$, 6) $1 : \sqrt{1+\cot^2\alpha}$, 7) $1 : (\cot\alpha/2-\cot\alpha)$, 8) $1 : (tg\,\alpha/2+\cot\alpha)$, 9) $2\,tg\,\alpha/2 : (1+tg^2\,\alpha/2)$, 10) $2\sin\alpha/2\cos\alpha/2$, 11) $2 : (tg\,\alpha/2+\cot\alpha/2)$, 12) $[\sin(R/3+\alpha)-\sin(R/3-\alpha)] : \sqrt{3}$, 13) $2\sin^2(R/2+\alpha/2)-1$, 14) $1-2\sin^2(R/2-\alpha/2)$, 15) $[1-tg^2(R/2-\alpha/2)] : [1+tg^2(R/2-\alpha/2)]$, 16) $\sin(\tfrac{2}{3}R+\alpha)-\sin(\tfrac{2}{3}R-\alpha)$.

$\cos\alpha =$ **17)** $\sqrt{1+\sin\alpha}\,.\,\sqrt{1-\sin\alpha}$, 18) $\sin\alpha\,.\,\cot\alpha$, 19) $\cot\alpha : cosec\,\alpha$, 20) $\cot\alpha : \sqrt{1+\cot^2\alpha}$, 21) $1 : \sqrt{1+tg^2\alpha}$, 22) $\sqrt{cosec^2\alpha-1} : cosec\,\alpha$, 23) $\cos^2\alpha/2-\sin^2\alpha/2$, 24) $(\cot^2\alpha/2-1) : (\cot^2\alpha/2+1)$, 25) $1 : (tg\,\alpha\cot\alpha/2-1)$, 26) $\sin 2\alpha : 2\sin\alpha$, 27) $(1-tg^2\,\alpha/2) : (1+tg^2\,\alpha/2)$, 28) $(\cot\alpha/2-tg\,\alpha/2) : (\cot\alpha/2+tg\,\alpha/2)$, 29) $1 : (1+tg\,\alpha\,tg\,\alpha/2)$, 30) $2 : [tg(R/2+\alpha/2)+\cot(R/2+\alpha/2)]$, 31) $2\cos(R/2+\alpha/2)\cos(R/2-\alpha/2)$, 32) $\cos(\tfrac{2}{3}R+\alpha)+\cos(\tfrac{2}{3}R-\alpha)$, 33) $[\sin(\tfrac{2}{3}R+\alpha)+\sin(\tfrac{2}{3}R-\alpha)] : \sqrt{3}$, 34) $\sin(R/3+\alpha)+\sin(R/3-\alpha)$, 35) $[\cos(R/3-\alpha)+\cos(R/3+\alpha)] : \sqrt{3}$.

$tg\,\alpha =$ **36)** $\sqrt{(1:\cos^2\alpha)-1}$, 37) $2\,tg\,\alpha/2 : (1-tg^2\,\alpha/2)$, 38) $2\cot\alpha/2 : (\cot^2\alpha/2-1)$, 39) $2 : (\cot\alpha/2-tg\,\alpha/2)$, 40) $\cot\alpha-2\cot 2\alpha$, 41) $(1-\cos 2\alpha) : \sin 2\alpha$, 42) $\sin 2\alpha : (1+\cos 2\alpha)$, 43) $[tg(R/2+\alpha/2)-tg(R/2-\alpha/2)] : 2$, 44) $1 : \sqrt{cosec^2\alpha-1}$, 45) $\sqrt{\sec^2\alpha-1}$, 46) $[tg(R/2+\alpha)-1] : [tg(R/2+\alpha)+1]$, 47) $[1-tg(R/2-\alpha)] : [1+tg(R/2-\alpha)]$.

$\sec\alpha =$ **48)** $\sqrt{1+tg^2\alpha}$, 49) $\sqrt{1+\cot^2\alpha} : \cot\alpha$, 50) $cosec\,\alpha : \sqrt{cosec^2\alpha-1}$.

$cosec\,\alpha =$ **51)** $\sqrt{1+\cot^2\alpha}$, 52) $\sqrt{1+tg^2\alpha} : tg\,\alpha$, 53) $\sec\alpha : \sqrt{\sec^2\alpha-1}$.

**54)** $\sin(R/2 \pm \alpha) = \cos(R/2 \mp \alpha) =$ 55) $\frac{1}{2}\sqrt{2}(\cos\alpha \pm \sin\alpha)$. — 56) $tg\,(R/2 \pm \alpha) = (1 \pm tg\,\alpha) : (1 \mp tg\,\alpha) =$ 57) $(\cos\alpha \pm \sin\alpha) : (\cos\alpha \mp \sin\alpha) =$ 58) $\sqrt{1 \pm \sin 2\alpha} : \sqrt{1 \mp \sin 2\alpha}$. — 59) $tg\,(R/2 \pm \alpha/2) = \cos\alpha : (1 \mp \sin\alpha) =$ 60) $\sqrt{1 \pm \sin\alpha} : \sqrt{1 \mp \sin\alpha}$. — 61) $\cos\alpha \pm \sin\alpha = \sqrt{2}\sin(R/2 \pm \alpha) =$ 62) $\sqrt{2}\cos(R/2 \mp \alpha)$. — 63) $tg\,(R/2 + \alpha) + tg\,(R/2 - \alpha) = \cot(R/2 + \alpha) + \cot(R/2 - \alpha) =$ 64) $2 \sec 2\alpha$. — 65) $tg\,(R/2 + \alpha) - tg\,(R/2 - \alpha) = \cot(R/2 - \alpha) - \cot(R/2 + \alpha) =$ 66) $2\,tg\,2\alpha$. — 67) $tg\,(R/2 + \alpha)\,tg\,(R/2 - \alpha) = \cot(R/2 + \alpha)\cot(R/2 - \alpha) = 1$. — 68) $\sin(R/2 - \alpha/2) = \cot(R/2 + \alpha/2)$.

**69)** $tg\,\tfrac{1}{2}(\beta \pm \gamma) = (\sin\beta \pm \sin\gamma) : (\cos\beta + \cos\gamma)$. — 70) $tg\,\tfrac{1}{2}(\gamma \mp \beta) = (\cos\beta - \cos\gamma) : (\sin\gamma \pm \sin\beta)$. — 71) $tg\,\beta \pm tg\,\gamma = \sin(\beta \pm \gamma) : (\cos\beta\cos\gamma)$. — 72) $\cot\gamma \pm \cot\beta = \sin(\beta \pm \gamma) : (\sin\beta\sin\gamma)$. — 73) $tg\,\beta \pm \cot\gamma = \pm\cos(\beta \mp \gamma) : (\cos\beta\sin\gamma)$; 74) $\sin(\beta + \gamma) + \sin(\beta - \gamma) = 2\sin\beta\cos\gamma$. — 75) $\sin(\beta + \gamma) - \sin(\beta - \gamma) = 2\cos\beta\sin\gamma$. — 76) $\cos(\beta + \gamma) + \cos(\beta - \gamma) = 2\cos\beta\cos\gamma$. — 77) $\cos(\beta - \gamma) - \cos(\beta + \gamma) = 2\sin\beta\sin\gamma$. — 78) $tg\,\tfrac{1}{2}(\beta + \gamma) + tg\,\tfrac{1}{2}(\beta - \gamma) = 2\sin\beta : (\cos\beta + \cos\gamma)$. — 79) $\cot\tfrac{1}{2}(\beta + \gamma) + \cot\tfrac{1}{2}(\beta - \gamma) = +2\sin\beta : (\cos\gamma - \cos\beta)$. — 80) $\sin(\beta + \gamma)\cos(\beta - \gamma) = \sin\beta\cos\beta + \sin\gamma\cos\gamma$. — 81) $\sin(\beta - \gamma)\cos(\beta + \gamma) = \sin\beta\cos\beta - \sin\gamma\cos\gamma$. — 82) $\sin(\beta + \gamma)\sin(\beta - \gamma) = \sin^2\beta - \sin^2\gamma$. — 83) $\cos(\beta + \gamma)\cos(\beta - \gamma) = \cos^2\gamma - \cos^2\beta$. — 84) $(\sin\beta + \sin\gamma) \pm (\cos\beta + \cos\gamma) = 2\cos\tfrac{1}{2}(\beta - \gamma)\sqrt{1 \pm \sin(\beta + \gamma)}$. — 85) $(\sin\beta - \sin\gamma) \pm (\cos\beta + \cos\gamma) = 2\cos\tfrac{1}{2}(\beta + \gamma)\sqrt{1 \pm \sin(\beta - \gamma)}$.

**86)** $\sin 3\varphi = 3\sin\varphi - 4\sin^3\varphi$. — 87) $\cos 3\varphi = \cos\varphi(1 - 4\sin^2\varphi)$. — 88) $\sin 4\varphi = \cos\varphi(4\sin\varphi - 8\sin^3\varphi)$. — 89) $\cos 4\varphi = 1 - 8\sin^2\varphi + 8\sin^4\varphi$. — 90) $\sin 5\varphi = 5\sin\varphi - 20\sin^3\varphi + 16\sin^5\varphi$. — 91) $\cos 5\varphi = \cos\varphi(1 - 12\sin^2\varphi + 16\sin^4\varphi)$. — 92) $tg\,3\varphi = (3\,tg\,\varphi - tg^3\varphi) : (1 - 3\,tg^2\varphi)$. — 93) $\cot 3\varphi = (\cot\varphi - 3\,tg\,\varphi) : (3 - tg^2\varphi)$.

**94)** $\sin(x + y + z) = \sin x\cos y\cos z + \sin y\cos z\cos x + \sin z\cos x\cos y - \sin x\sin y\sin z$. — 95) $\cos(x + y + z) = \cos x\cos y\cos z - \cos x\sin y\sin z - \cos y\sin z\sin x - \cos z\sin x\sin y$. — 96) $\sin x\cos(y - z) - \sin y\,.\,\cos(x - z) = \cos z\sin(x - y)$. — 97) $\sin\tfrac{1}{2}(x + z)\cos\tfrac{1}{2}(x - z) + \sin\tfrac{1}{2}(y - z)\cos\tfrac{1}{2}(y + z) = \tfrac{1}{2}(\sin x + \sin y)$. — 98) $\sin^2(x - y) + \sin^2(y - z) + \sin^2(z - x) = 2\,[1 - \cos(x - y)\cos(y - z)\cos(z - x)]$ — 99) $\cos^2(x - y) + \cos^2(y - z) + \cos^2(z - x) = 1 + 2\cos(x - y)\cos(y - z)\cos(z - x)$. — 100) $\sin(x - y) + \sin(x - z) + \sin$

$(y-z) = 4\cos\frac{1}{2}(x-y)\sin\frac{1}{2}(x-z)\cos\frac{1}{2}(y-z)$. — 101) $\cos(x-y)+\cos(x-z)+\cos(y-z) = 4\cos\frac{1}{2}(x-y)\cos\frac{1}{2}(x-z)\cos\frac{1}{2}(y-z)-1$. — Setzt man

$$x+y+z=2u;\quad u-x=u_1;\quad u-y=u_2;\quad u-z=u_3,$$

so ist 102) $4\sin x\sin y\sin z = -\sin 2u+\sin 2u_1+\sin 2u_2+\sin 2u_3$. — 103) $4\cos x\cos y\cos z = \cos 2u+\cos 2u_1+\cos 2u_2+\cos 2u_3$. — 104) $\cos^2 u+\cos^2 u_1+\cos^2 u_2+\cos^2 u_3 = 2(1+\cos x\cos y\cos z)$. — 105) $\sin^2 u+\sin^2 u_1+\sin^2 u_2+\sin^2 u_3 = 2(1-\cos x\cos y\cos z)$.

**b) Gleichungen.**

**106)** $\sin x : tg\, x = a$. — 107) $\sin x : \cot x = a$. — 108) $\sin x+\cos x = a$. — 109) $\sin x-\cos x = a$. — 110) $tg\, x+\cot x = a$. — 111) $tg\, x-\cot x = a$. — 112) $\cos x : \cos{}^{x}/_{2} = a$. — 113) $\cos x : \sin{}^{x}/_{2} = a$. — 114) $\sin x : \sin 2x = a$. — 115) $\sin x : tg\, 2x = a$. — 116) $\sin x : tg{}^{x}/_{2} = a$. — 117) $\cos x+\cos 2x = {}^{7}/_{8}$. — 118) $\sin x+\sin 2x = tg\, x$. — 119) $\sin x+\sin 2x+\sin 3x = 0$. — 120) $\sin(x+\alpha)+\cos(x-\alpha) = \cos(x+\alpha)$. — 121) $\sin(\alpha-x) = \cos(\alpha+x)$. — 122) $tg({}^{R}/_{2}+x)-a\, tg\, x = a-1$. — 123) $\cos nx+\cos(n-2)x = \cos x$. — 124) $cosec^2{}^{x}/_{2}-\sec^2{}^{x}/_{2} = 2\sqrt{3}\, cosec^2 x$. — 125) $\cot x\, tg\, 2x - tg\, x\cot 2x = 2$. — 126) $tg\, 3x = \sin 6x$. — 127) $\sin x = tg\, x$. — 128) $\cos x = tg\, x$. — 129) $\cos x = \sin^2 x-\cos^2 x$. — 130) $\frac{1}{2}\cos x = \sin^2 x-\cos^2 x$. — 131) $\cos^2 x-\sin^2 x+tg^2 x = {}^{5}/_{6}$. — 132) $\sin\alpha+\sin(x-\alpha)+\sin(2x+\alpha) = \sin(x+\alpha)+\sin(2x-\alpha)$. — 133) $tg\, x(1+\cos 2\alpha) = \cos 2\alpha\,.\, tg\, 2x$. — 134) $\sin x-\cos x = 4\cos^2 x\sin x+4\sin^3 x$. — 135) $\sin x+\sin 3x = a$. — 136) $\cos x+\cos 3x = a$. — 137) $tg\, x+tg\, 3x = a$.

**138)** $\sin x : \sin y = a$; $\cos x : \cos y = b$. — 139) $\sin x : \sin y = a$; $tg\, x : tg\, y = b$. — 140) $\sin x+\sin y = a$; $\cos x+\cos y = b$. — 141) $\sin(x-y) = \cos(x+y) = \frac{1}{2}$. — 142) $tg(x+y) = a$; $tg(x-y) = b$. — 143) $\sin x = a\,.\sin y$; $2\, tg\, x = tg{}^{y}/_{2}$. — 144) $tg{}^{x}/_{2}\, tg{}^{y}/_{2}+tg{}^{y}/_{2}\, tg{}^{z}/_{2}+tg{}^{z}/_{2}\, tg{}^{x}/_{2} = tg^2 x$; $tg(x+y) = -tg\, z$; $\sin^2 x+\sin^2 y = \cos^2 y$; $(x, y, z < R)$.

## 2. Winkel im Dreieck.*)

### a) Rechtwinkliges Dreieck ($\alpha+\beta=R$).

**145)** $tg\,\alpha = (\sin\alpha+\cos\beta):(\cos\alpha+\sin\beta)$. — 146) $\sin\alpha+\cos\alpha = \sin\beta+\cos\beta$. — 147) $\cos(\alpha-\beta) = \sin 2\alpha$. — Ein

*) Bezeichnungen im Dreieck: $abc$ Seiten, $\alpha\beta\gamma$ Winkel, $h_1h_2h_3$ Höhen, $t_1t_2t_3$ Mittellinien, $m_1m_2m_3$ Winkelhalbirende, $r$ Radius des Um-

Dreieck mit den Winkeln $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ ist rechtwinklig, wenn 148) $\sin\gamma = (\sin\alpha + \sin\beta) : (\cos\alpha + \cos\beta)$, 149) $\cot\gamma/_2 - \cot\beta/_2 = \cot\beta/_2 - \cot\alpha/_2 = 1$ (wie verhalten sich die Seiten dieses Dreiecks zu einander?), 150) $\sin\alpha - \cos\beta = \cos\gamma$, 151) $\sin\alpha : \cos\beta = \sin\gamma + \cos\gamma\cot\alpha$, 152) $2\sin\alpha\sin\beta = \sin 2\alpha\sin\gamma - \cos\gamma$.

**b) Schiefwinkliges Dreieck** ($\alpha + \beta + \gamma = 2R$).

**153)** $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 4\cos\alpha/_2\cos\beta/_2\cos\gamma/_2$. — 154) $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 1 + 4\sin\alpha/_2\sin\beta/_2\sin\gamma/_2$. — 155) $\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma = 4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$. — 156) $\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma = -1 - 4\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$. — 157) $tg\,\alpha + tg\,\beta + tg\,\gamma = tg\,\alpha \,.\, tg\,\beta \,.\, tg\,\gamma$ (Beispiel: $tg\,\alpha = 1$, $tg\,\beta = 2$, $tg\,\gamma = 3$). — 158) $\cot\alpha/_2 + \cot\beta/_2 + \cot\gamma/_2 = \cot\alpha/_2\cot\beta/_2\cot\gamma/_2$. — 159) $\cos^2\alpha/_2 + \cos^2\beta/_2 + \cos^2\gamma/_2 = 2 + 2\sin\alpha/_2\sin\beta/_2\sin\gamma/_2$. — 160) $\sin^2\alpha/_2 + \sin^2\beta/_2 + \sin^2\gamma/_2 = 1 - 2\sin\alpha/_2\sin\beta/_2\sin\gamma/_2$. — 161) $tg\,\alpha/_2\,tg\,\beta/_2 + tg\,\beta/_2\,tg\,\gamma/_2 + tg\,\gamma/_2\,tg\,\alpha/_2 = 1$. — 162) $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 - 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$. — 163) $\sin\alpha : \sin\beta = (\cot\beta/_2 + \cot\gamma/_2) : (\cot\alpha/_2 + \cot\gamma/_2)$. — 164) $\cot\alpha + \cot\beta + \cot\gamma = \cot\alpha\cot\beta\cot\gamma - \operatorname{cosec}\alpha\operatorname{cosec}\beta\operatorname{cosec}\gamma$. — 165) $\sin\alpha + \sin\beta - \sin\gamma = 4\sin\alpha/_2\sin\beta/_2\cos\gamma/_2$. — 166) $\sin 2\alpha + \sin 2\beta - \sin 2\gamma = 4\cos\alpha\cos\beta\sin\gamma$. — 167) $\sin^2\alpha + \sin^2\beta - \sin^2\gamma = 2\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma$.

## 3. Formeln zwischen den Stücken des Dreiecks.

**a) Rechtwinkliges Dreieck.**

**168)** $2\cot\beta : \sin 2\alpha = c^2 : b^2$. — 169) $tg\,2\alpha - \sec 2\beta = (b + a) : (b - a)$. — 170) $a : (c - b) = (1 + \cos\alpha) : \sin\alpha$. — 171) $(a + b) : c = \cos 2\alpha : (\cos\alpha - \sin\alpha)$. — 172) $(a + b + c)^2 : c^2 = \sin 2\alpha + 2\sin\alpha + 4\cos^2\alpha/_2$. — 173) $\sin 2\alpha = 2ab : c^2$. — 174) $a^2 : bc = (1 - \cos^2\alpha) : \cos\alpha$.

**b) Schiefwinkliges Dreieck.**

**175)** $(a + b) : c = \cos\frac{1}{2}(\alpha - \beta) : \sin\gamma/_2$. — 176) $(a - b) : c = \sin\frac{1}{2}(\alpha - \beta) : \cos\gamma/_2$. — 177) $(b + c)^2 = a^2 + 4f^2\cot\alpha/_2$. — 178) $(b - c)^2 = a^2 - 4f^2\,tg\,\alpha/_2$. — 179) $pr\varrho = abc$. — 180) $\varrho = a\,.\sin\beta/_2\sin\gamma/_2 : \cos\alpha/_2$. — 181) $h_1 = a\sin\beta\sin\gamma : \sin\alpha$. — 182) $\varrho = a : (\cot\beta/_2 + \cot\gamma/_2)$. — 183) $\varrho = 4r\,.\sin\alpha/_2\sin\beta/_2\sin\gamma/_2$. —

kreises, $\varrho$ Radius des Inkreises, $\varrho_1\varrho_2\varrho_3$ Radien der Ankreise, $2p = a + b + c$, $2p_1 = -a + b + c$, $2p_2 = a - b + c$, $2p_3 = a + b - c$, $f^2$ Fläche. Im rechtwinkligen D. ist $\gamma = R$, im gleichschenkligen $b = c$.

184) $\varrho_1 = a : (tg\, \beta/_2 + tg\, \gamma/_2)$. — 185) $\varrho_2 + \varrho_3 = a \cot \alpha/_2$. — 186) $\varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3 = 4r + \varrho$. — 187) $h_1 = 2r \sin\beta \sin\gamma$. — 188) $\varrho_1 = 4r \sin \alpha/_2 \cos \beta/_2 \cos \gamma/_2$. — 189) $\varrho + \varrho_1 = 4r \sin \alpha/_2 \cos \tfrac{1}{2}(\beta - \gamma)$. — 190) $\varrho_1 + \varrho_2 = 4r \cos^2 \gamma/_2$. — 191) $\varrho_1 - \varrho = 4r \sin^2 \alpha/_2$. — 192) $\varrho_1 - \varrho_2 = 4r \cos \gamma/_2 \sin \tfrac{1}{2}(\alpha - \beta)$. — 193) $(\varrho_1 - \varrho) : (\varrho_2 + \varrho_3) = tg^2\, \alpha/_2$. — 194) $(\varrho + \varrho_1) : (\varrho_2 - \varrho_3) = tg\, \alpha/_2 \cot \tfrac{1}{2}(\beta - \gamma)$. — 195) $\varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3 - 3\varrho = 4r(\sin^2 \alpha/_2 + \sin^2 \beta/_2 + \sin^2 \gamma/_2)$. — 196) $\varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3 = 2r(\cos^2 \alpha/_2 + \cos^2 \beta/_2 + \cos^2 \gamma/_2)$. — 197) $\varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3 + 3\varrho = 4r(\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma)$. — 198) $r + \varrho = r(\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma)$. — 199) $\varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3 - 3r = r(\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma)$. — 200) $f^2 = 4r\varrho \cos \alpha/_2 \cos \beta/_2 \cos \gamma/_2$. — 201) $4pp_3 = \cot \alpha/_2 \cot \beta/_2$. — 202) $h_1 h_2 h_3 c = a^2 b^2 \sin^3 \gamma$. — 203) $bc : a^2 = (\cos\beta \,.\, \cos\gamma + \cos\alpha) : \sin^2\alpha$. — 204) $(a^2 - b^2) : c = a\cos\beta - b\cos\alpha$. — 205) $a^2 + b^2 + c^2 = 2(bc\cos\alpha + ca\cos\beta + ab\cos\gamma)$. — 206) $p_1 = p\, tg\, \beta/_2\, tg\, \gamma/_2$. — 207) $\varrho = p\, tg\, \alpha/_2\, tg\, \beta/_2\, tg\, \gamma/_2$.

## 4. Berechnung von Dreiecken.

### a) Rechtwinklige Dreiecke.

Gegeben: **208)** $\alpha, b + c$. — 209) $\alpha, c - b$. — 210) $\alpha, a + b$. — 211) $\alpha, a - b$. — 212) $\alpha, p_3$. — 213) $\alpha, p_1$. — 214) $c, a + b$. — 215) $c, a - b$. — 216) $a : b, h_3$. — 217) $a : b, h_1$. — 218) $a : b, f^2$. — 219) $a, \alpha - \beta$. — 220) $\alpha, p$. — 221) $t_1, t_2$. — 222) $r, \alpha$. — 223) $\varrho, a$. — 224) $t_1, r$. — 225) $\varrho_1, a$. — 226) $\varrho_1, \varrho_2$. — 227) $t_1, c$. — 228) $\varrho, \varrho_1$.

### b) Gleichschenklige Dreiecke.

Gegeben: **229)** $h_1, h_2$. — 230) $\alpha, h_1 + h_2$. — 231) $\alpha, h_1 - h_2$. — 232) $b + h_1, \alpha$. — 233) $\alpha, h_2$. — 234) $p, h_1$. — 235) $a : b, h_1$.

### c) Schiefwinklige Dreiecke.*)

Gegeben: **236)** $b + c, b - c, \alpha$. — 237) $b + c, b - c, a$. — 238) $p, a - b, b - c$. — 239) $a + b, b + c, a - b$. — 240) $a, \alpha - \beta, \gamma$. — 241) $b, \alpha - \beta, \gamma$. — 242) $a + b, a : b, \gamma$. — 243) $\alpha, b + c, b^2 + c^2$.

*) Andeutungen zur Lösung: 236—243: Durch algebraische Op tionen auf eine der vier Hauptaufgaben zurückzuführen — 244—2 Mittelst rechtwinkliger Dreiecke zu lösen. — 273—285: Satz 79. 286—289: Satz 80. — 290—311: Satz 81—84. — 312—321: Zum Tl durch Satz 78. — 322—346: 95, erste Formel. — 347—362: Forr 90—93. — 363—379: 95, zweite Formel; 78. — 380—390: Formel 9(

**244)** $h_1, b, c$. — 245) $h_1, b, \beta$. — 246) $h_1, \alpha, \beta$. — 247) $h_1, a, b$. — 248) $h_1, a, \beta$. — 249) $h_1, b, \alpha$. — 250) $f^2, a, b$. — 251) $h_1, h_2, a$. — 252) $h_1, h_2, \gamma$. — 253) $b+c, h_1, \beta$. — 254) $b+c, h_2, \alpha$. — 255) $b-c, h_1, \beta$. — 256) $b-c, h_1, \gamma$. — 257) $b-c, h_2, \alpha$. — 258) $b+c, h_2, f^2$. — 259) $b-c, h_2, f^2$. — 260) $h_1, t_1, a$. — 261) $h_1, t_1, b$. — 262) $h_1, t_1, \beta$. — 263) $h_1, m_1, \alpha$. — 264) $h_1, m_1, c$. — 265) $a, \beta, \varrho$. 266) $a, h_1, b:c$. — 267) $h, b:c, \alpha$. — 268) $f^2, \alpha, h_2:h_3$. 269) $a, \alpha, h_2+h_3$. — 270) $h_1, h_2, c$. — 271) $h_1, h_2, \alpha$. — 272) $a+b, h_1+h_2, c$.

**273)** $a, b+c, \alpha$. — 274) $a, b-c, \alpha$. — 275) $r, b+c, \beta-\gamma$. — 276) $r, a, b$. — 277) $r, a, \beta$. — 278) $r, \alpha, \beta$. — 279) $h_1, r, b$. — 280) $b+c, r, \beta$. — 281) $b-c, r, \beta$. — 282) $b-c, r, \gamma$. — 283) $b+c, r, \alpha$. — 284) $b+c, r, a$. — 285) $b-c, r, a$.

**286)** $b+c, \beta, \gamma$. — 287) $a, b:c, \alpha$. — 288) $b+c, \alpha, h_3-h_2$. — 289) $b-c, \alpha, h_3+h_2$.

**290)** $a, b+c, \beta$. — 291) $a, b-c, \gamma$. — 292) $a, \alpha, f^2$. — 293) $a, b+c, f^2$. — 294) $p, \alpha, f^2$. — 295) $p, \alpha, \beta$. — 296) $a, \alpha, \varrho$. — 297) $a, b-c, \varrho$. — 298) $a, b+c, h_1$. — 299) $a, b-c, h_1$. — 300) $\varrho, \alpha, \beta$. — 301) $\varrho, b+c, a$. — 302) $\varrho, b+c, \alpha$. — 303) $\varrho, h_1, \alpha$. 304) $a, \varrho, f^2$. — 305) $\varrho, b-c, \beta$. — 306) $p, \varrho, \alpha$. — 307) $r, \varrho, a$. — 308) $r, \varrho, \alpha$. — 309) $h_1, \varrho, f^2$. — 310) $h_1, p, f^2$. — 311) $p, r, \alpha$.

**312)** $p_3, \alpha, \beta$. — 313) $a, b, \alpha-\beta$. — 314) $a:b, c, \alpha$. — 315) $a:b, c, \gamma$. — 316) $a:b, c, r$. — 317) $b+c, a+c, \alpha$. — 318) $b+c, a+c, \gamma$. — 319) $p, a-b, \alpha$. — 320) $p, a-b, \gamma$. — 321) $p, a-b, \beta$.

**322)** $f^2, r, a$. — 323) $f^2, r, \alpha$. — 324) $f^2, b+c, \alpha$. — 325) $f^2, b-c, a$.

**326)** $h_1, p, \alpha$. — 327) $h_1, b+c, \alpha$. — 328) $h_1, a+b, c$. — 329) $h_1, a+b, \beta$. — 330) $h_1, b-c, \alpha$. — 331) $h_1, a-b, c$. — 332) $h_1, p, \beta$. — 333) $h_1, p, \alpha$. — 334) $h_1, r, \alpha$. — 335) $h_1, \varrho, \alpha$. — 336) $h_1, \varrho, b$. — 337) $h_1, \varrho, \beta$. — 338) $a+b, h_1, h_2$. — 339) $a-b, h_1, h_2$. — 340) $h_1, h_2, h_3$. — 341) $h_1, b+c, r$. — 342) $h_1, b-c, r$. — 343) $h_1, a, \alpha$. — 344) $h_2, b+c, \alpha$. — 345) $h_1, b-c, \beta-\gamma$. — 346) $h_1, b+c, \beta-\gamma$.

**347)** $\varrho, a, b$ (Gl. 3. Grades). — 348) $\varrho_1, a, \beta$. — 349) $\varrho_1, \alpha$. — 350) $\varrho_1, b, \gamma$. — 351) $\varrho_1, \alpha, \beta$. — 352) $\varrho_1, a, \alpha$. — 353) $\varrho_1, \beta$. — 354) $\varrho, \varrho_1, a$. — 355) $\varrho, \varrho_1, b$. — 356) $\varrho_1, \varrho_2, a$. — 357) $, \varrho_2, c$. — 358) $\varrho_1, a, b$. — 359) $\varrho_1, b, c$. — 360) $\varrho, \varrho_1, \varrho_2$. — 61) $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$. — 362) $p, p_1, \varrho_2$.

**363)** $t_1, \alpha, r$. — 364) $t_1, a, \alpha$. — 365) $t_1, \alpha, \beta$. — 366) $b, c, \angle(t_1 a)$. — 367) $t_1, \alpha, \angle(t_1 a)$. — 368) $t_1, a, b$. — 369) $t_1, a, \beta$. —

370) $t_1, b, c$. — 371) $t_1, a:b, c$. — 372) $t_1, t_2, a$. — 373) $t_1, t_2, c$. — 374) $t_1, a, b+c$. — 375) $t_1, a, b-c$. — 376) $t_1, t_2, \alpha$. — 377) $t_1, t_2, \gamma$. — 378) $t_1, t_2, t_3$. — 379) $t_1, h_1, \alpha$.

**380)** $m_1, b, c$. — 381) $m_1, b, \alpha$. — $m_1, b, \gamma$. — 382) $m_1, \alpha, \beta$. — 383) $m_1, a, b$. — 384) $m_1, a, \alpha$. — 385) $a:m_1, \varrho, \varrho_1$. — 386) $a:m_1, \varrho, h_1$. — 387) $m_1, r, a:(b+c)$. — 388) $m_1, a, h_1$. — 389) $m_1, b+c, \alpha$. — 390) $m_1, b+c, a$.

**391)** $\alpha, a_1, a_2$ (Projectionen von $b$ und $c$ auf $a$). — 392) $\alpha, n_2, n_3$ (Halbirungslinien von $\beta$ und $\gamma$ bis zu ihrem Schnittpunkte). — 393) $a, r_2, r_3$ (Mittelsenkrechten auf $b$ und $c$ bis zu ihrem Schnittpunkte). — 394) $r_1, r_2, r_3$ (Gl. 3. Grades). — 385) $b-c, \beta, r_3$.

## 5. Vermischte Sätze und Aufgaben.

**396)** Sind $d_1$ und $d_2$ die Diagonalen, $f^2$ die Fläche eines Vierecks, so ist $f^2 = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin(d_1 d_2)$. — 397) Ist im rechtwinkligen Dreieck $ABC$ die Strecke $BB_1$ so gezogen, dass $ABB_1 = B/3$ ist, so ist $BA \,.\, BB_1 = 2BC \,.\, AB_1$. — 399) Ist die Basis eines gleichschenkligen Dreiecks in drei gleiche Theile getheilt, jeder Theilpunkt mit der Spitze verbunden, und $x$ der Winkel zwischen einem Schenkel und der benachbarten Verbindungslinie, so ist $\cot x = (2 + \cos \alpha) : \sin \alpha$. — 399) Sind $abcd$ der Reihe nach die Seiten eines Sehnenvierecks, so ist $\cos(ad) = (a^2 + d^2 - b^2 - c^2) : (2ad + 2bc)$ (Cosinussatz für das Sehnenviereck). — Ist ferner $a + b + c + d = 2p$, $p - a = p_1$, $p - b = p_2$, $p - c = p_3$, $p - d = p_4$, so ist 400) $\cos^2 \frac{1}{2}(ad) = p_2 p_3 : (ad + bc)$, 401) $\sin^2 \frac{1}{2}(ad) = \frac{p_1 p_4}{ad + bc}$, 402) $\sin(ad) = 2\sqrt{p_1 p_2 p_3 p_4} : (ad + bc)$, 403) $f^2 = \sqrt{p_1 p_2 p_3 p_4}$. — 404) Ist $e$ diejenige Diagonale, welche mit $a$ und $b$ ein Dreieck bildet, so ist $e^2 = (ad + bc) \,.\, (ac + bd) : (ab + cd)$. — 405) Ist endlich $r$ der Radius des Umkreises, so ist $16r^2 = (ab + cd)(ac + bd)(ad + bc) : p_1 p_2 p_3 p_4$.

**406)** In welchem Verhältniss stehen die Umfänge des regelmässigen Achtecks und Fünfzehnecks bei gleicher Fläche? — 407) Dgl. die Flächen derselben Polygone bei gleichem Umfang? — 408) In welchem Verhältniss stehen die Umfänge des regelmässigen Sechszehnecks und Fünfecks, wenn der Umkreis des ersteren die doppelte Fläche hat vom Inkreise des letzteren? — 409) In ein regelmässiges Zehneck und um ein regelmässiges Siebzehneck sind Kreise beschrieben. Wie verhalten

sich deren Umfänge, wenn beide Polygone flächengleich sind? — 410) Wie gross ist die Seite eines regelmässigen Zwanzigecks, dessen Fläche diejenige eines regelmässigen Zwölfecks von gleichem Umfang um eine gegebene Grösse übertrifft? — 411) Die Seite des regelmässigen Fünfzehnecks aus der Breite des Ringes zu berechnen, der von seinem Umkreise und Inkreise gebildet wird. — 412) Den wievielten Theil des Radius des Umkreises beträgt die Differenz zwischen der Seite des regelmässigen Siebenecks und der halben Seite des regelmässigen Dreiecks? — 413) Aus der Fläche eines Segments und dem zugehörigen Centriwinkel Sehne und Bogen des Segmentes zu berechnen. — 414) Seiten und Fläche eines Sehnenvierecks zu berechnen, wenn der Radius des Kreises und die Verhältnisse der zu den Seiten gehörigen Bogen gegeben sind. — 415) Aus den Centriwinkeln der gemeinsamen Sehne zweier sich schneidender Kreislinien und dem Radius der einen den Radius der andern zu berechnen. — 416) Seite und Fläche eines einem gegebenen Kreise einbeschriebenen, 417) umbeschriebenen $n$-Ecks zu berechnen. — 418) Den zwischen zwei parallelen Sehnen liegenden Theil der Kreisfläche zu berechnen, wenn der Radius des Kreises, und die Abstände der Sehnen vom Mittelpunkte gegeben sind. — 419) Drei Kreise mit gegebenen Radien berühren sich von aussen. Man berechne die Winkel des Dreiecks ihrer Centrallinien.

Ein gleichschenkliges Trapez*) zu berechnen aus **420)** $a$, $b$, $\beta$. — 421) $a$, $f^2$, $\beta$.

Ein Trapez zu berechnen aus **422)** $f^2$, $b$, $c$, $\gamma$. — 423) $a_1$, $b$, $c$, $\beta+\gamma$. — 424) $f^2$, $b$, $c$, $\beta+\gamma$.

Vermessungsaufgaben. **425)** Die Höhe eines senkrechten Gegenstandes aus der Länge seines Schattens und der Sonnenhöhe zu berechnen. — 426) Den Radius eines Kreises aus dem Gesichtswinkel, unter welchem derselbe von einem in derselben Ebene ausserhalb liegenden Punkte erscheint, und aus dem Abstande dieses Punktes vom Mittelpunkte zu berechnen. — 427) Wie weit kann man von einem Punkte aus sehen, dessen Höhe über der Oberfläche der Erdkugel gegeben ist? — 428) Die Höhe $XY$ eines senkrechten Gegenstandes aus der Entfernung zweier, mit seinem Fusspunkte $Y$ in gerader Linie liegenden Punkte $A$, $B$ der Ebene, und den Winkeln

*) Bezeichnungen im Trapez: $aa_1$ parallele, $bc$ nicht parallele Seiten, $\angle(ab)=\gamma$, $\angle ac=\beta$, $f^2$ Fläche.

*XAY* und *XBY* zu berechnen.*) — 429) Die Entfernung eines Punktes *X* von einer gegebenen Strecke *AB* und von ihren Endpunkten aus der Länge dieser Strecke, und den Winkeln *XAB* und *XBA* zu berechnen. — 430) Dgl. die Entfernung zweier Punkte *X* und *Y* aus der Länge einer geg. Strecke *AB*, und den Winkeln *XAB*, *XBA*, *YAB*, *YBA*. — 431) Dgl. die Entfernung eines Punktes *A* von den Ecken eines geg. Dreiecks *XYZ* aus den Winkeln *XAY* und *YAZ* (Pothenot'sche Aufgabe).

---

## Rationale Dreiecke.

*Vorbemerkung.* — Ein Dreieck heisst rational, wenn die Masszahlen seiner Seiten und die Funktionen seiner Winkel rational sind. Dann folgt aus 85, dass auch seine Fläche, aus 91, dass die Radien seiner Berührungskreise, aus 95, dass seine Höhen, aus 79, dass der Radius seines Umkreises rationale Masszahlen haben. — Da die Seiten eines Dreiecks sich durch die Grössen $p$, $p_1$, $p_2$, $p_3$ und alle Funktionen seiner Winkel durch $tg\,{}^{\alpha}/_2$, $tg\,{}^{\beta}/_2$, $tg\,{}^{\gamma}/_2$ rational ausdrücken lassen, letztere aber wieder (nach 81) durch $\varrho$ und $p_1$, $p_2$, $p_3$, so kommt es schliesslich, um rationale Dreiecke zu erhalten, nur darauf an, $\varrho$ und die drei Grössen $p$, oder vielmehr, da zwischen diesen noch die Gleichung 82 besteht, $\varrho$ und zwei der Grössen $p$ rational zu wählen.

***Methoden zur Aufstellung rationaler Dreiecke.*** — a) Das rechtwinklige Dreieck. — Da die Winkelfunktionen des rechtwinkligen Dreiecks seinen Seitenverhältnissen gleich sind, so genügt es zur Rationalität des Dreiecks, wenn seine Seiten rational sind. Eine Methode zur Aufstellung solcher Dreiecke ist bereits in Th. II, S. 148, Fussnote, mitgetheilt. Danach hat man in den Ausdrücken

$$a = p^2 - q^2;\ b = 2pq;\ c = p^2 + q^2$$

für $p$ und $q$ zwei beliebige (aber keinen gemeinsamen Fac enthaltende) Zahlen zu setzen, von denen eine gerade, die dere ungerade sein muss. (Andernfalls würde man für *a*, *b* Werthe erhalten, die einen gemeinsamen Factor hätten,

---

*) Die durch *X*, *Y*, *Z* bezeichneten Punkte in dieser und den folg den Aufgaben kann man sich als unzugänglich, die durch *A*, *B*, *C* . . zeichneten als zugänglich vorstellen.

man also einfacher durch Multiplication andrer Werthe von $a$, $b$, $c$ mit diesem Factor erhalten würde.)

b) Das schiefwinklige Dreieck. — Ersetzt man in der Formel 82

$$\varrho^2 = \frac{p_1 p_2 p_3}{p}$$

$p$ durch seinen Werth $p_1 + p_2 + p_3$ [Th. II, Nr. 99, Formel 3)] und bestimmt $p_1$, so folgt:

$$1) \qquad p_1 = \frac{\varrho^2 (p_2 + p_3)}{p_2 p_3 - \varrho^2}.$$

Setzt man hierin für $\varrho$, $p_2$, $p_3$ beliebige ganze Zahlen, so erhält man $p_1$ als Bruch, und wenn man $\varrho$, $p_1$, $p_2$, $p_3$ mit dem Nenner dieses Bruches multiplicirt, als ganze Zahl. Dann ist weiter [Th. II, Nr. 99, Formel 1)]:

$$2) \quad a = p_2 + p_3,\ b = p_3 + p_1;\ c = p_1 + p_2.$$

Ferner (81), (87)

$$3) \quad tg\,\frac{\alpha}{2} = \frac{\varrho}{p_1};\ tg\,\frac{\beta}{2} = \frac{\varrho}{p_2};\ tg\,\frac{\gamma}{2} = \frac{\varrho}{p_3}.$$

$$4) \qquad p = p_1 + p_2 + p_3;\ f^2 = p\varrho.$$

Um durch $a$, $b$, $c$, $f^2$ (diese Stücke enthalten die folgenden Tafeln) alle andern oben genannten Stücke des Dreiecks zu bestimmen, dienen die Formeln:

$$5) \quad \varrho = \frac{f^2}{p};\ \varrho_1 = \frac{f^2}{p_1};\ \varrho_2 = \frac{f^2}{p_2};\ \varrho_3 = \frac{f^2}{p_3}. \quad (91)$$

$$6) \qquad h_1 = \frac{2f^2}{a};\ h_2 = \frac{2f^2}{b};\ h_3 = \frac{2f^2}{c}. \qquad (95)$$

$$7) \qquad r = \frac{abc}{4f^2} \qquad (88)$$

Die im Allgemeinen irrationalen Stücke $t$ und $m$ werden durch 95 und 96 bestimmt, nämlich:

$$8) \qquad t_1 = \sqrt{\tfrac{1}{2}(b^2 + c^2 - \tfrac{1}{2} a^2)}.$$

$$9) \qquad m_1 = \frac{2\sqrt{pp_1 bc}}{b + c}.$$

Hieraus erhält man $t_2$, $t_3$, $m_2$, $m_3$ durch die bekannten Vertauschungen.

Anm. Mittelst der Formeln 5) bis 9) lassen sich aus den folgenden Tafeln leicht Zahlenwerthe bestimmen, welche für die Aufgaben des vorigen Abschnittes Beispiele zu liefern geeignet sind. — Das unter b) beschriebene Verfahren ist von H. Grassmann in Grunert's Archiv Bd. 49 (1868) mitgetheilt.

## I. Tafel rechtwinkliger Dreiecke.

| No. | *a* | *b* | *c* | *α* | *β* | *F* |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 4 | 3 | 5 | 53°. 7′. 48,4″ | 36°. 52′. 11,6″ | 6 |
| 2 | 12 | 5 | 13 | 67. 22. 48,5 | 22. 37. 11,5 | 30 |
| 3 | 8 | 15 | 17 | 28. 4. 20,9 | 61. 55. 39,1 | 60 |
| 4 | 24 | 7 | 25 | 73. 44. 23,3 | 16. 15. 36,7 | 84 |
| 5 | 20 | 21 | 29 | 43. 36. 10,1 | 46. 23. 49,9 | 210 |
| 6 | 40 | 9 | 41 | 77. 19. 10,6 | 12. 40. 49,4 | 180 |
| 7 | 12 | 35 | 37 | 18. 55. 28,7 | 71. 4. 31,3 | 210 |
| 8 | 60 | 11 | 61 | 79. 36. 40,0 | 10. 23. 20,0 | 330 |
| 9 | 28 | 45 | 53 | 31. 53. 26,8 | 58. 6. 33,2 | 630 |
| 10 | 56 | 33 | 65 | 59. 29. 23,2 | 30. 30. 36,8 | 924 |
| 11 | 84 | 13 | 85 | 81. 12. 9,3 | 8. 47. 50,7 | 546 |
| 12 | 16 | 63 | 65 | 14. 15. 0,1 | 75. 44. 59,9 | 504 |
| 13 | 48 | 55 | 73 | 41. 6. 43,5 | 48. 53. 16,5 | 1320 |
| 14 | 80 | 39 | 89 | 64. 0. 38,8 | 25. 59. 21,2 | 1560 |
| 15 | 112 | 15 | 113 | 82. 22. 18,7 | 7, 37. 41,3 | 840 |
| 16 | 36 | 77 | 85 | 25. 3. 27,4 | 64. 56. 32,6 | 1386 |
| 17 | 72 | 65 | 97 | 47. 55. 29,9 | 42. 4. 30,1 | 2340 |
| 18 | 144 | 17 | 145 | 83. 16. 1,5 | 6. 43. 58,5 | 1224 |
| 19 | 20 | 99 | 101 | 11. 25. 16,3 | 78. 34. 43,7 | 990 |
| 20 | 60 | 91 | 109 | 33. 23. 54,6 | 56. 36. 5,4 | 2730 |
| 21 | 140 | 51 | 149 | 69. 59. 2,5 | 20. 0. 57,5 | 3570 |
| 22 | 180 | 19 | 181 | 83. 58. 27,9 | 6. 1. 32,1 | 1710 |
| 23 | 44 | 117 | 125 | 20. 36. 34,9 | 69. 23. 25,1 | 2574 |
| 24 | 88 | 105 | 137 | 39. 57. 58,4 | 50. 2. 1,6 | 4620 |
| 25 | 132 | 85 | 157 | 57. 13. 15,3 | 32. 46. 44,7 | 5610 |
| 26 | 176 | 57 | 185 | 72. 3. 17,1 | 17. 56. 42,9 | 5016 |
| 27 | 220 | 21 | 221 | 84. 32. 50,5 | 5. 27. 9,5 | 2310 |
| 28 | 24 | 143 | 145 | 9. 31. 38,2 | 80. 28. 21,8 | 1716 |
| 29 | 120 | 119 | 169 | 45. 14. 23,0 | 44. 45. 37,0 | 7140 |
| 30 | 168 | 95 | 193 | 60. 30. 46,4 | 29. 29. 13,6 | 7980 |
| 31 | 264 | 23 | 265 | 85. 1. 15,3 | 4. 58. 44,7 | 3036 |
| 32 | 52 | 165 | 173 | 17. 29. 32,4 | 72. 30. 27,6 | 4290 |
| 33 | 104 | 153 | 185 | 34. 12. 19,6 | 55. 47. 40,4 | 7956 |
| 34 | 156 | 133 | 205 | 49. 33. 1,0 | 40. 26. 59,0 | 10374 |
| 35 | 208 | 105 | 233 | 63. 12. 54,0 | 26. 47. 6,0 | 10920 |
| 36 | 260 | 69 | 269 | 75. 8. 13,8 | 14. 51. 46,2 | 8970 |
| 37 | 312 | 25 | 313 | 85. 25. 7,6 | 4. 34. 52,4 | 3900 |
| 38 | 28 | 195 | 197 | 8. 10. 16,4 | 81. 49. 43,6 | 27[illegible] |
| 39 | 84 | 187 | 205 | 24. 11. 22,3 | 65. 48. 37,7 | 78[illegible] |
| 40 | 140 | 171 | 221 | 39. 18. 27,5 | 50. 41. 32,5 | 119[illegible] |
| 41 | 252 | 115 | 227 | 65. 28. 13,6 | 24. 31. 46,4 | 144[illegible] |
| 42 | 308 | 75 | 317 | 76. 18. 52,0 | 13. 41. 8,0 | 115[illegible] |
| 43 | 364 | 27 | 365 | 85. 45. 28,1 | 4. 14. 31,9 | 49[illegible] |
| 44 | 60 | 221 | 229 | 15. 11. 21,4 | 74. 48. 38,6 | 66[illegible] |
| 45 | 120 | 209 | 241 | 29. 51. 46,0 | 60. 8. 14,0 | 125[illegible] |
| 46 | 240 | 161 | 289 | 56. 8. 41,9 | 33. 51. 18,1 | 193[illegible] |

| No. | *a* | *b* | *c* | *α* | *β* | *F* |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 47 | 420 | 29 | 421 | 86°. 3′. 0,4″ | 3°. 56′. 59,6″ | 6090 |
| 48 | 32 | 255 | 257 | 7. 9. 9,6 | 82. 50. 50,4 | 4080 |
| 49 | 96 | 247 | 265 | 21. 14. 21,5 | 68. 45. 38,5 | 11856 |
| 50 | 160 | 231 | 281 | 34. 42. 29,0 | 55. 17. 31,0 | 18480 |
| 51 | 224 | 207 | 305 | 47. 15. 31,5 | 42. 44. 28,5 | 23184 |
| 52 | 288 | 175 | 337 | 58. 42. 55,8 | 31. 17. 4,2 | 25200 |
| 53 | 352 | 135 | 377 | 69. 1. 1,4 | 20. 58. 58,6 | 23760 |
| 54 | 416 | 87 | 425 | 78. 11. 15,8 | 11. 48. 44,2 | 18096 |
| 55 | 480 | 31 | 481 | 86. 18. 17,2 | 3. 41. 42,8 | 7440 |
| 56 | 68 | 285 | 293 | 13. 25. 10,8 | 76. 34. 49,2 | 9690 |
| 57 | 136 | 273 | 305 | 26. 28. 51,7 | 63. 31. 8,3 | 18564 |
| 58 | 204 | 253 | 325 | 38. 52. 48,3 | 51. 7. 11,7 | 25806 |
| 59 | 272 | 225 | 353 | 50. 24. 8,1 | 39. 35. 51,9 | 30600 |
| 60 | 340 | 189 | 389 | 60. 55. 51,9 | 29. 4. 8,1 | 32130 |
| 61 | 408 | 145 | 433 | 70. 26. 6,7 | 19. 33. 53,3 | 29580 |
| 62 | 476 | 93 | 485 | 78. 56. 41,7 | 11. 3. 18,3 | 22134 |
| 63 | 544 | 33 | 545 | 86. 31. 42,9 | 3. 28. 17,1 | 8976 |
| 64 | 36 | 323 | 325 | 6. 21. 34,8 | 83. 38. 25,2 | 5814 |
| 65 | 180 | 299 | 349 | 31. 2. 53,6 | 58. 57. 6,4 | 26910 |
| 66 | 252 | 275 | 373 | 42. 30. 3,6 | 47. 29. 56,4 | 34650 |
| 67 | 396 | 203 | 445 | 62. 51. 32,9 | 27. 8. 27,1 | 40194 |
| 68 | 468 | 155 | 493 | 71. 40. 31,1 | 18. 19. 28,9 | 36270 |
| 69 | 612 | 35 | 613 | 86. 43. 36,6 | 3. 16. 23,4 | 10710 |
| 70 | 76 | 357 | 365 | 12. 1. 4,9 | 77. 58. 55,1 | 13566 |
| 71 | 152 | 345 | 377 | 23. 46. 38,3 | 66. 13. 21,7 | 26220 |
| 72 | 228 | 325 | 397 | 35. 3. 4,1 | 54. 56. 55,9 | 37050 |
| 73 | 304 | 297 | 425 | 45. 40. 2,3 | 44. 19: 57,7 | 45144 |
| 74 | 380 | 261 | 461 | 55. 31. 1,5 | 34. 28. 58,5 | 49590 |
| 75 | 456 | 217 | 505 | 64. 33. 4,6 | 25. 26. 55,4 | 49476 |
| 76 | 532 | 165 | 557 | 72. 46. 7,3 | 17. 13. 52,7 | 43890 |
| 77 | 608 | 105 | 617 | 80. 12. 6,5 | 9. 57. 53,5 | 31920 |
| 78 | 684 | 37 | 685 | 86. 54. 13,3 | 3. 5. 46,7 | 12654 |
| 79 | 40 | 399 | 401 | 5. 43. 29,3 | 84. 16. 30,7 | 7980 |
| 80 | 120 | 391 | 409 | 17. 3. 41,5 | 72. 56. 18,5 | 23460 |
| 81 | 280 | 351 | 449 | 38. 34. 48,3 | 51. 25. 11,7 | 49140 |
| 82 | 360 | 319 | 481 | 48. 27. 19,7 | 41. 32. 40,3 | 57420 |
| 83 | 440 | 279 | 521 | 57. 37. 17,7 | 32. 22. 42,3 | 61380 |
| 84 | 520 | 231 | 569 | 66. 2. 51,9 | 23. 57. 8,1 | 60060 |
| 85 | 680 | 111 | 689 | 80. 43. 44,6 | 9. 16. 15,4 | 37740 |
| 86 | 760 | 39 | 761 | 87. 3. 44,6 | 2. 56. 15,4 | 14820 |
| 7 | 84 | 437 | 445 | 10. 52. 50,4 | 79. 7. 9,6 | 18354 |
| 8 | 168 | 425 | 457 | 21. 34. 6,9 | 68. 25. 53,1 | 35700 |
| 9 | 336 | 377 | 505 | 41. 42. 32,1 | 48. 17. 27,9 | 63336 |
| 0 | 420 | 341 | 541 | 50. 55. 36,1 | 39. 4. 23,9 | 71610 |
| 1 | 672 | 185 | 697 | 74. 36. 28,4 | 15. 23. 31,6 | 62160 |
| 2 | 840 | 41 | 841 | 87. 12. 20,3 | 2. 47. 39,7 | 17220 |
| 3 | 44 | 483 | 485 | 5. 12. 18,4 | 84. 47. 41,6 | 10626 |
| 94 | 132 | 475 | 493 | 15. 31. 49,2 | 74. 28. 10,8 | 31350 |
| 95 | 220 | 459 | 509 | 25. 36. 30,7 | 64. 23. 29,3 | 50490 |

| No. | a | b | c | α | β | F |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 96 | 308 | 435 | 533 | 35°.18′. 0,9″ | 54°.41′.59,1″ | 66990 |
| 97 | 396 | 403 | 565 | 44. 29. 53,0 | 45. 30. 7,0 | 79794 |
| 98 | 572 | 315 | 653 | 61. 9. 30,4 | 28. 50. 29,6 | 90090 |
| 99 | 660 | 259 | 709 | 68. 34. 25,5 | 21. 25. 34,5 | 85470 |
| **100** | 748 | 195 | 773 | 75. 23. 18,5 | 14. 36. 41,5 | 72930 |

# II. Tafel schiefwinkliger Dreiecke.

| No. | a | b | c | α | β | γ | F |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 14 | 15 | 13 | 59°.29′.23,1″ | 67°.22′.48,5″ | 53°. 7′.48,4″ | 84 |
| 2 | 150 | 25 | 145 | 96. 43. 58,5 | 9. 31. 38,2 | 73. 44. 23,3 | 1800 |
| 3 | 120 | 29 | 101 | 124. 58. 33,6 | 11. 25. 16,3 | 43. 36. 10,1 | 1200 |
| 4 | 408 | 41 | 401 | 96. 57. 20,1 | 5. 43. 29,3 | 77. 19. 10,6 | 8160 |
| 5 | 40 | 13 | 37 | 93. 41. 42,8 | 18. 55. 28,7 | 67. 22. 48,5 | 240 |
| 6 | 44 | 15 | 37 | 107. 56. 42,9 | 18. 55. 28,7 | 53. 7. 48,4 | 264 |
| 7 | 102 | 61 | 109 | 66. 59. 25,4 | 33. 23. 54,6 | 79. 36. 40,0 | 3060 |
| 8 | 232 | 61 | 229 | 85. 11. 58,6 | 15. 11. 21,4 | 79. 36. 40,0 | 6960 |
| 9 | 312 | 109 | 229 | 131. 24. 44,0 | 15. 11. 21,4 | 33. 23. 54,6 | 9360 |
| **10** | 240 | 53 | 197 | 139. 56. 16,8 | 8. 10. 16,4 | 31. 53. 26,8 | 3360 |
| 11 | 200 | 85 | 205 | 74. 36. 28,4 | 24. 11. 22,3 | 81. 12. 9,3 | 8400 |
| 12 | 450 | 85 | 445 | 87. 55. 0,3 | 10. 52. 50,4 | 81. 12. 9,3 | 18900 |
| 13 | 624 | 205 | 445 | 144. 55. 47,3 | 10. 52. 50,4 | 24. 11. 22,3 | 26208 |
| 14 | 222 | 149 | 221 | 70. 42. 30,0 | 39. 18. 27,5 | 69. 59. 2,5 | 15540 |
| 15 | 400 | 85 | 325 | 148. 34. 57,8 | 6. 21. 34,8 | 25. 3. 27,4 | 7200 |
| 16 | 318 | 181 | 349 | 64. 58. 38,5 | 31. 2. 53,6 | 83. 58. 27,9 | 28620 |
| 17 | 630 | 73 | 577 | 134. 6. 57,7 | 4. 46. 18,8 | 41. 6. 43,5 | 15120 |
| 18 | 600 | 125 | 485 | 154. 11. 6,7 | 5. 12. 18,4 | 20. 36. 34,9 | 13200 |
| 19 | 328 | 169 | 241 | 104. 53. 51,0 | 29. 51. 46,0 | 45. 14. 23,0 | 19680 |
| **20** | 510 | 169 | 409 | 117. 41. 55,5 | 17. 3. 41,5 | 45. 14. 24,0 | 30600 |
| 21 | 600 | 241 | 409 | 133. 4. 32,5 | 17. 3. 41,5 | 29. 51. 46,0 | 36000 |
| 22 | 520 | 193 | 457 | 97. 55. 6,7 | 21. 34. 6,9 | 60. 30. 46,4 | 43680 |
| 23 | 560 | 157 | 493 | 107. 14. 55,5 | 15. 31. 49,2 | 57. 13. 15,3 | 36960 |
| 24 | 390 | 373 | 277 | 72. 1. 42,8 | 65. 28. 13,6 | 42. 30. 3,6 | 49140 |
| 25 | 480 | 509 | 221 | 69. 50. 38,8 | 84. 32. 50,5 | 25. 36. 30,7 | 52800 |
| 26 | 712 | 601 | 289 | 100. 19. 6,4 | 56. 8. 41,9 | 23. 32. 11,7 | 85440 |
| 27 | 510 | 533 | 317 | 68. 23. 7,1 | 76. 18. 52,0 | 35. 18. 0,9 | 78 |
| 28 | 606 | 565 | 445 | 72. 38. 34,1 | 62. 51. 32,9 | 44. 29. 53,0 | 119 |
| 29 | 904 | 625 | 505 | 105. 46. 14,4 | 41. 42. 32,1 | 32. 31. 13,5 | 151 |
| **30** | 370 | 541 | 421 | 43. 1. 23,5 | 86. 3. 0,4 | 50. 55. 36,1 | 777 |
| 31 | 120 | 17 | 113 | 110. 26. 39,6 | 7. 37. 41,3 | 61. 55. 39,1 | [illegible] |
| 32 | 240 | 221 | 29 | 128. 9. 0,6 | 46. 23. 49,9 | 5. 27. 9,5 | 25 |
| 33 | 840 | 761 | 89 | 151. 4. 23,4 | 25. 59. 21,2 | 2. 56. 15,4 | 16 |
| 34 | 1040 | 1013 | 53 | 119. 20. 41,0 | 58. 6. 33,2 | 2. 32. 45,8 | 23 |
| 35 | 296 | 233 | 137 | 103. 10. 52,4 | 50. 2. 1,6 | 26. 47. 6.0 | 15 |

| No. | a | b | c | α | β | γ | F |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 36 | 816 | 233 | 617 | 143°. 25′. 0,5″ | 9°. 57′. 53,5″ | 26°. 47′. 6,0″ | 42840 |
| 37 | 696 | 137 | 617 | 120. 10. 4,9 | 9. 57. 53,5 | 50. 2. 1,6 | 36540 |
| 38 | 584 | 557 | 173 | 90. 15. 39,7 | 72. 30. 27,6 | 17. 13. 52,7 | 48180 |
| 39 | 776 | 773 | 197 | 83. 33. 34,9 | 81. 49. 43,6 | 14. 36. 41,5 | 75660 |
| **40** | 680 | 569 | 281 | 100. 45. 20,9 | 55. 17. 31,0 | 23. 57. 8,1 | 78540 |
| 41 | 872 | 785 | 305 | 96. 7. 48,0 | 63. 31. 8,3 | 20. 21. 3,7 | 119028 |
| 42 | 1160 | 821 | 629 | 105. 29. 41,2 | 43. 0. 10,3 | 31. 30. 8,5 | 248820 |
| 43 | 861 | 500 | 689 | 91. 22. 50,0 | 35. 29. 21,6 | 53. 7. 48,4 | 172200 |
| 44 | 1869 | 1700 | 881 | 86. 41. 20,5 | 65. 14. 18.6 | 28. 4. 20,9 | 747600 |
| 45 | 549 | 1300 | 1201 | 24. 57. 29,3 | 87. 39. 42,2 | 67. 22. 48,5 | 329400 |
| 46 | 354,9 | 370,0 | 120,1 | 73. 24. 49,1 | 87. 39. 42,2 | 18. 55. 28,7 | 21294 |
| 47 | 93 | 34 | 65 | 137. 40. 39,0 | 14. 15. 0,1 | 28. 4. 20,9 | 744 |
| 48 | 69 | 50 | 73 | 65. 8. 53,2 | 41. 6. 43,5 | 73. 44. 23,3 | 1656 |
| 49 | 51 | 58 | 41 | 59. 4. 39,3 | 77. 19. 10,6 | 43. 36. 10,1 | 1020 |
| **50** | 123 | 106 | 65 | 88. 37. 10,0 | 59. 29. 23,2 | 31. 53. 26,8 | 3444 |
| 51 | 52 | 15 | 41 | 130. 26. 59,0 | 12. 40. 49,4 | 36. 52. 11,6 | 234 |
| 52 | 44 | 39 | 17 | 95. 27. 9,4 | 61. 55. 39,1 | 22. 37. 11,5 | 330 |
| 53 | 92 | 75 | 29 | 117. 20. 33,4 | 46. 23. 49,9 | 16. 15. 36,7 | 966 |
| 54 | 236 | 183 | 65 | 139. 6. 3,2 | 30. 30. 36,8 | 10. 23. 20,0 | 3894 |
| 55 | 52 | 51 | 53 | 59. 57. 47,7 | 58. 6. 33,2 | 61. 55. 39,1 | 1170 |
| 56 | 332 | 255 | 89 | 145. 12. 48,1 | 25. 59. 21,2 | 8. 47. 50,7 | 6474 |
| 57 | 76 | 87 | 65 | 57. 51. 10,2 | 75. 44. 59,9 | 46. 23. 49,4 | 2394 |
| 58 | 188 | 195 | 101 | 70. 54. 39,5 | 78. 34. 43,7 | 30. 30. 36,8 | 9306 |
| 59 | 572 | 149 | 435 | 153. 15. 4,0 | 6. 43. 58,5 | 20. 0. 57,5 | 14586 |
| **60** | 284 | 125 | 267 | 84. 37. 13,7 | 25. 59. 21,2 | 69. 23. 25,1 | 16614 |
| 61 | 1924 | 137 | 1839 | 126. 41. 35,0 | 3. 16. 23,4 | 50. 2. 1,6 | 101010 |
| 62 | 716 | 185 | 543 | 156. 1. 45,0 | 6. 1. 32,1 | 17. 56. 42,9 | 20406 |
| 63 | 196 | 173 | 219 | 58. 36. 15,9 | 48. 53. 16,5 | 72. 30. 27,6 | 16170 |
| 64 | 244 | 233 | 111 | 82. 8. 22,7 | 71. 4. 31,3 | 26. 47. 6,0 | 12810 |
| 65 | 1052 | 269 | 795 | 160. 9. 29,1 | 4. 58. 44,7 | 14. 51. 46,2 | 36294 |
| 66 | 244 | 197 | 291 | 56. 5. 46,3 | 42. 4. 30,1 | 81. 49. 43,6 | 23790 |
| 67 | 668 | 221 | 555 | 111. 21. 44,6 | 17. 56. 42,9 | 50. 41. 32,5 | 57114 |
| 68 | 1244 | 317 | 939 | 161. 43. 59,6 | 4. 34. 52,4 | 13. 41. 8,0 | 46650 |
| 69 | 484 | 365 | 123 | 163. 4. 38,7 | 12. 40. 49,4 | 4. 14. 31,9 | 6534 |
| **70** | 428 | 257 | 471 | 64. 22. 24,9 | 32. 46. 44,7 | 82. 50. 50,4 | 54570 |
| 71 | 268 | 281 | 255 | 59. 45. 56,4 | 64. 56. 32,6 | 55. 17. 31,0 | 30954 |
| 72 | 1004 | 305 | 807 | 122. 23. 45,3 | 14. 51. 46,2 | 42. 44. 28,5 | 103914 |
| 73 | 436 | 377 | 159 | 100. 54. 38,2 | 58. 6. 33,2 | 20. 58. 58,6 | 29430 |
| 74 | 1676 | 425 | 1263 | 164. 14. 16,2 | 3. 56. 59,6 | 11. 48. 44,2 | 72906 |
| 75 | 572 | 293 | 579 | 73. 55. 57,2 | 29. 29. 13,6 | 76. 34, 49,2 | 81510 |
| 76 | 316 | 305 | 327 | 59. 52. 46,3 | 56. 36. 5,4 | 63. 31. 8,3 | 43134 |
| 77 | 1196 | 353 | 951 | 126. 43. 0,1 | 13. 41. 8,0 | 39. 35. 51,9 | 134550 |
| 78 | 388 | 389 | 195 | 75. 10. 52,0 | 75. 44. 59,9 | 29. 4. 8,1 | 36666 |
| 79 | 1916 | 485 | 1443 | 165. 14. 58,9 | 3. 41. 42,8 | 11. 3. 18,3 | 89094 |
| **80** | 436 | 365 | 507 | 57. 15. 27,9 | 44. 45. 37,0 | 77. 58. 55,1 | 77826 |
| 81 | 908 | 377 | 681 | 89. 14. 51,9 | 24. 31. 46,4 | 66. 13. 21,7 | 156630 |
| 82 | 364 | 425 | 303 | 57. 5. 18,6 | 78. 34. 43,7 | 44. 19. 57,7 | 54054 |
| 83 | 1628 | 461 | 1275 | 133. 42. 17,3 | 11. 48. 44,2 | 34. 28. 58,5 | 212454 |
| 84 | 676 | 557 | 219 | 113. 52. 50,8 | 48. 53. 16,5 | 17. 13. 52,7 | 55770 |

| No. | $a$ | $b$ | $c$ | $\alpha$ | $\beta$ | $\gamma$ | $F$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 85 | 644 | 617 | 111 | 99°. 7′. 35,2″ | 71°. 4′. 31,3″ | 9°. 57′. 53,5″ | 33810 |
| 86 | 508 | 401 | 615 | 55. 16. 30,3 | 40. 26. 59,0 | 84. 16. 30,7 | 101346 |
| 87 | 412 | 449 | 375 | 59. 11. 23,2 | 69. 23. 25,1 | 51. 25. 11,7 | 72306 |
| 88 | 1868 | 521 | 1455 | 136. 33. 59,4 | 11. 3. 18,3 | 32. 22. 42,3 | 260586 |
| 89 | 628 | 569 | 255 | 91. 6. 19,3 | 64. 56. 32,6 | 23. 57. 8,1 | 72534 |
| **90** | 2732 | 689 | 2055 | 167. 37. 57,9 | 3. 5. 46,7 | 9. 16. 15,4 | 151626 |
| 91 | 764 | 485 | 867 | 61. 21. 0,3 | 33. 51. 18,1 | 84. 47. 41,6 | 184506 |
| 92 | 532 | 509 | 555 | 59. 48. 50,3 | 55. 47. 40,4 | 64. 23. 29,3 | 122094 |
| 93 | 1532 | 533 | 1299 | 105. 44. 7,6 | 19. 33. 53,3 | 54. 41. 59,1 | 333210 |
| 94 | 964 | 773 | 291 | 123. 18. 48,4 | 42. 4. 30,1 | 14. 36. 41,5 | 93990 |
| 95 | 3356 | 845 | 2523 | 168. 50. 8,9 | 2. 47. 39,7 | 8. 22. 11,4 | 206394 |
| 96 | 956 | 533 | 1011 | 68. 39. 17,9 | 31. 17. 4,2 | 80. 3. 37,9 | 250950 |
| 97 | 604 | 545 | 663 | 59. 2. 21,3 | 50. 41. 32,5 | 70. 16. 6,2 | 154926 |
| 98 | 1772 | 593 | 1479 | 110. 1. 59,9 | 18. 19. 28,9 | 51. 38. 31,2 | 411990 |
| 99 | 532 | 629 | 435 | 56. 31. 27,9 | 80. 28. 21,8 | 43. 0. 10,3 | 114114 |
| **100** | 2684 | 725 | 2067 | 143. 23. 11,2 | 9. 16. 15,4 | 27. 20. 33,4 | 446886 |

# Register.


| | Nr. |
|---|---|
| Aenderung, stetige | 2 |
| Arcuscosinus | 39 |
| Arcussinus | 39 |
| Arcustangens | 39 |
| Cofunktion | 15 |
| Cosecans | 13. 27 |
| Cosinus | 8. 21 |
| Cosinussatz | 48 |
| Cotangens | 13. 27 |
| Funktion | 1 |
| „ algebraische | 3 |
| „ coordinirte | 14 |
| „ directe | 15 |
| „ indirecte | 15 |
| „ inverse | 39 |
| Funktion reciproke | 14 |
| „ transcendente | 3 |
| Funktionsgrösse | 2 |
| Modul des log. Systems | 43 |
| Primzahl | 43 |
| Quotient der Reihe | 36 |
| Reihe, convergente | 36 |
| „ divergente | 36 |
| Secans | 13. 27 |
| Sinus *) | 13. 27 |
| Sinussatz | 47 |
| Tangens | 13. 27 |
| Tangentialsatz | 52 |
| Winkel, congruente | 21 |
| Winkelfunktion | 5 |


*) Uebersetzung eines arabischen Wortes, welches ausser dem mathematischen Begriffe noch die Bedeutung „Busen“ hat.

**Berichtigungen.**

Seite 64 Formel 13 muss es heissen $\sin R = 1$ statt $\sin R = 0$.

# Tafeln

# vierstelliger Logarithmen.

---

**Anhang**

zum

Lehrbuch der elementaren Mathematik, Th. III

von

**Victor Schlegel,**
Oberlehrer am Gymnasium in Waren.

---

# Einleitung.*)

Die in den folgenden Tafeln stehenden Logarithmen beziehen sich auf die Grundzahl Zehn, gehören also dem gemeinen logarithmischen Systeme an.

**Tafel I. Die Logarithmen der Decimalzahlen** (S. 98—101).

Die Kennziffer des Logarithmus wird nach Th. I, 172, 175, 176 bestimmt; die Tafel enthält nur die Mantissen.

### A. Gegeben die Zahl, gesucht der Logarithmus.

1) Liegt die Zahl zwischen 0 und 200, so suche man sie in der ersten, mit N. überschriebenen Spalte auf; die in der zweiten (mit L. 0 überschriebenen) Spalte rechts daneben stehende Zahl ist die zugehörige Mantisse. (Z. B.: $l\,167 = 2{,}2227$.)

2) Liegt die Zahl zwischen 200 und 2000, so denke man sich ihre Einerstelle weg, und suche die übrig bleibende Zahl (wie in 1) in der ersten, mit N. überschriebenen Spalte auf; dann gehe man in derselben wagerechten Reihe nach rechts bis in diejenige Spalte, welche mit der Einerziffer der gegebenen Zahl überschrieben ist; die dort stehende Zahl ist die zu der gegebenen Zahl gehörige Mantisse. (Z. B.: $l\,1837 = 3{,}2641$.)

3) Liegt die Zahl zwischen 2000 und 20000, so denke man sich ihre Einerstelle weg, und suche den Logarithmus der brig bleibenden Zahl nach 2) auf. Dann bestimme man den Interschied zwischen der gefundenen und der folgenden Mansse,**) suche in der mit P. P. überschriebenen Spalte die-

---

*) Ueber die Anwendung der Logarithmen zur Berechnung von äherungswerthen im Allgemeinen, und über das gemeine logarithmische ystem insbesondere siehe Th. I, Nr. 167, 168, 169.

**) Sämmtliche Mantissen auf den 4 Seiten der Tafel folgen aufeinanler wie die Wörter, Zeilen und Seiten eines Buches.

jenige kleine Tafel auf, welche mit diesem Unterschiede überschrieben ist, und suche in dieser Tafel links die Einerziffer der gegebenen Zahl auf. Den rechts danebenstehenden Decimalbruch addire man zu der vorher gefundenen Mantisse, und runde seine Decimalstelle (welche für die Mantisse die Bedeutung einer fünften Decimalstelle hat) nach Th. I, Regel 169 ab. (Z. B.: *l*12489. Es ist

Mantisse von *l*1248 gleich 0962.
Differenz zwischen 0962 und 0966 gleich 4.
In Tafel 4 steht neben 9 der Bruch 3.6. Also:

$$\begin{array}{r} 0962 \\ 3.6 \\ \hline 0965.6. \end{array}$$

Also, da die wegzulassende Decimalstelle $6 > 4$ ist, *l*12489 = 4,0966.)

Anm. Bereits in diesem Intervall sind die Logarithmen zweier auf einander folgender Zahlen um so häufiger einander gleich, je grösser die gegebene Zahl ist. So ist z. B. *l*12489 = *l*12490. Dasselbe findet statt, wenn die gegebene Zahl grösser als 20000 ist. Man runde daher in diesem Falle ihre Einerstelle ab (z. B. 16 zu 20, 14 zu 10) und verfahre dann nach 3).

**B. Gegeben der Logarithmus, gesucht die Zahl.**

Die Mantissen von 0000 bis 3031 suche man auf S. 100 und 101, die von 3032 bis 9999 auf S. 98 unterhalb der starken wagerechten Linie, und auf S. 99.

1) Steht die Mantisse des gegebenen Logarithmus in der Tafel, so gehe man in derselben wagerechten Reihe nach links bis in die mit N. überschriebene Spalte. Die dort stehende Zahl ist der erste Theil der gesuchten Zahl (bis auf die Einerstelle). Als Einerstelle schreibt man dann die Ziffer, welche die Ueberschrift derjenigen Spalte bildet, in der man die Mantisse gefunden. Zuletzt wird das Komma bestimmt. (Z. B.· Gegeben 2,1995. Die Zahl ist 158,3.)

2) Steht die Mantisse des gegebenen Logarithmus nicht in der Tafel, so suche man die nächst kleinere Mantisse, und bestimme nach 1) die zugehörige Zahl. Dann bestimme man den Unterschied zwischen der gefundenen und der folgenden Mantisse, suche in der mit P. P. überschriebenen Spalte diejenige kleine Tafel auf, welche mit die

sem Unterschiede überschrieben ist, und suche in dieser Tafel rechts den Unterschied zwischen der gefundenen und der gegebenen Mantisse (oder denjenigen Decimalbruch, welcher diesem Unterschiede am nächsten kommt). Die links daneben stehende Zahl schreibt man als Einerziffer zu der bereits gefundenen Zahl hinzu. Zuletzt wird das Komma bestimmt. (Z. B.: Gegeben 1,4376. Die nächst kleinere Mantisse ist 4362, die zugehörige Zahl 273.

Unterschied zwischen der gefundenen und der folgenden Mantisse: $4378 - 4362 = 16$. Also Tafel 16.

Unterschied zwischen der gefundenen und der gegebenen Mantisse: $4376 - 4362 = 14$.

In Tafel 16 kommt diesem Unterschied am nächsten 14.4. Die links dabei stehende Zahl ist 9, also die gesuchte Zahl 2739, und nach Bestimmung des Kommas 27,39.)

## Tafel II. Die Logarithmen der trigonometrischen Funktionen (S. 102—115).

Die Kennziffer für alle in einer Spalte befindlichen Mantissen steht am Fuss dieser Spalte. Steht über der ersten Ziffer der Mantisse ein wagerechter Strich, so ist die Kennziffer um Eins zu erniedrigen. — Sämmtliche Kennziffern sind um Zehn zu gross.

### A. Gegeben der Winkel, gesucht der *ltg* oder *lsin*.

1) Ist der Winkel in Graden und Minuten gegeben, so gehe man in der mit der Zahl der Grade überschriebenen Spalte bis in diejenige wagerechte Reihe, welche links in der ersten Spalte mit der Anzahl der Minuten bezeichnet ist. Die dort stehende Zahl ist die gesuchte Mantisse. (Z. B.: *lsin* $36^0\,44' = 9{,}7768$).

Anm. Die Tafel der *lsin* enthält von $45^0$ bis $90^0$ nur die geraden Minuten. Ist nun die Minutenzahl des gegebenen Winkels ungerade, so addire man zu der Mantisse, welche zu der nächst niederen geraden Zahl gehört, 2, wenn die Differenz dieser und der folgenden Mantisse 3 beträgt, dagegen 1, wenn diese Differenz 2 oder 1 beträgt, und nichts, wenn sie 0 beträgt.

2) Ist der Winkel in Graden, Minuten und Zehntelminuten gegeben (oder auf solche abgerundet), so suche man

zuerst [nach 1)] die zu den Graden und Minuten gehörige Mantisse. Dann bestimme man den Unterschied zwischen der gefundenen und der folgenden Mantisse, suche in der mit P. P. überschriebenen Spalte diejenige kleine Tafel auf, welche mit diesem Unterschiede überschrieben ist, und suche in dieser Tafel links die Zahl der Zehntelminuten auf. Den rechts danebenstehenden Decimalbruch addire man zu der vorhergefundenen Mantisse, und runde seine Decimalstelle (welche für die Mantisse die Bedeutung einer fünften Decimalstelle hat) nach Th. I, Regel 169 ab. (Z. B.: $l\,tg\,11^0\,34{,}6'$. Es ist

Mantisse von $l\,tg\,11^0\,34'$ gleich 3110.
Differenz zwischen 3110 und 3117 gleich 7.
In Tafel 7 steht neben 6 der Bruch 4 . 2. Also:

$$\begin{array}{r} 3110 \\ 4\,.\,2 \\ \hline 3114\,.\,2. \end{array}$$

Also, da die wegzulassende Decimalstelle $2 < 5$ ist, $l\,tg\,11^0\,34{,}6' = 9{,}3114$.)

Anm. Zwischen $0^0$ und $5^0$ beträgt beim $l\,sin$, wie beim $l\,tg$ der Unterschied zweier auf einander folgender Mantissen meistens mehr als 15, während die kleinen Tafeln für höhere Differenzen als 15 fehlen. Man findet dann die zur Mantisse zu addirende Zahl, indem man die Differenz der beiden Mantissen durch 10 dividirt, und mit der Zahl der Zehntelminuten multiplicirt. (Z. B. $l\,tg\,3^0\,32{,}7'$. Mantisse zu $3^0\,32'$: 7906. Folgende Mantisse: 7927. Differenz: 21. Durch 10 dividirt: 2,1. Mit 7 multiplicirt: 14,7. Abgerundet: 15. Zu 7906 addirt: 7921. Also $l\,tg\,3^0\,32{,}7' = 8{,}7921$.)

**B. Gegeben der $l\,tg$ oder $l\,sin$, gesucht der Winkel.**

1) Steht der gegebene Logarithmus in der Tafel, so giebt die Ueberschrift der Spalte, in der man ihn gefunden, die Zahl der Grade, und die in derselben wagerechten Reihe links in der ersten Spalte stehende Zahl die Zahl der Minuten des gesuchten Winkels an. (Z. B.: Gegeben $l\,sin\,x = 9{,}4588$. Der Winkel ist $16^0\,43'$.)

Anm. Findet sich dieselbe Mantisse mehrmals hinter einander in der Tafel (was in der Tafel der $l\,sin$ von $69^0$ an vorkommt), so nehme man das arithmetische Mittel der zur ersten und zur letzten dieser gleichen Mantissen gehörigen Minutenzahlen.

2) Steht der gegebene Logarithmus nicht in der Tafel, so suche man die nächst kleinere Mantisse und bestimme nach 1) den zugehörigen Winkel. Dann bestimme man den Unterschied zwischen der gefundenen und der folgenden Mantisse, suche in der mit P. P. überschriebenen Spalte diejenige kleine Tafel auf, welche mit diesem Unterschiede überschrieben ist, und suche in dieser Tafel rechts den Unterschied zwischen der gefundenen und der gegebenen Mantisse (oder denjenigen Decimalbruch, welcher diesem Unterschiede am nächsten kommt). Die links daneben stehende Zahl ist die Anzahl der Zehntelminuten des gesuchten Winkels. (Z. B.: Gegeben $l\,tg\,x = 9{,}0376$. Die nächst kleinere Mantisse ist 0371, der zugehörige Winkel $6^0\,13'$.

Unterschied zwischen der gefundenen und der folgenden Mantisse: $0383 - 0371 = 12$. Also Tafel 12.

Unterschied zwischen der gefundenen und der gegebenen Mantisse: $0376 - 0371 = 5$.

In Tafel 12 kommt diesem Unterschied am nächsten 4 . 8. Die links dabei stehende Zahl ist 4, also der gesuchte Winkel $6^0\,13{,}4'$.)

Anm. Fehlt die kleine Tafel, in der man die Anzahl der Zehntelminuten aufsuchen soll [s. Anm. zu A, 2)], so multiplicire man den Unterschied zwischen der gefundenen und der gegebenen Mantisse mit Zehn, und dividire ihn dann durch den Unterschied zwischen der gefundenen und der folgenden Mantisse. Dieser Quotient, zu Ganzen abgerundet, giebt die gesuchten Zehntelminuten. (Z. B.: Gegeben $l\,tg\,x = 8{,}7921$. Die nächst kleinere Mantisse ist 7906, der zugehörige Winkel $3^0\,32'$.

Unterschied zwischen der gefundenen und der folgenden Mantisse

$$7927 - 7906 = 21.$$

Unterschied zwischen der gefundenen und der gegebenen Mantisse

$$7921 - 7906 = 15.$$

Also:

```
21 | 150 | 7,1
     147
     ---
      30
```

Man hat also, wenn 7,1 zu 7 abgerundet wird, 7 Zehntelminuten, und der gesuchte Winkel ist $3^0\,32{,}7'$.)

*Weitere Bemerkungen zu Tafel II.* — In der Tafel der Tangenslogarithmen ist 2 die kleinste Differenz zweier auf einander folgender Mantissen. In der Tafel der Sinuslogarithmen verschwindet diese Differenz bei Winkeln über $45^0$ oft

zuerst [nach 1)] die zu den Graden und Minuten gehörige Mantisse. Dann bestimme man den Unterschied zwischen der gefundenen und der folgenden Mantisse, suche in der mit P. P. überschriebenen Spalte diejenige kleine Tafel auf, welche mit diesem Unterschiede überschrieben ist, und suche in dieser Tafel links die Zahl der Zehntelminuten auf. Den rechts danebenstehenden Decimalbruch addire man zu der vorhergefundenen Mantisse, und runde seine Decimalstelle (welche für die Mantisse die Bedeutung einer fünften Decimalstelle hat) nach Th. I, Regel 169 ab. (Z. B.: $l_{tg}\,11^0\,34{,}6'$. Es ist

Mantisse von $l_{tg}\,11^0\,34'$ gleich 3110.
Differenz zwischen 3110 und 3117 gleich 7.
In Tafel 7 steht neben 6 der Bruch 4 . 2. Also:

$$\begin{array}{r} 3110 \\ 4\,.\,2 \\ \hline 3114\,.\,2. \end{array}$$

Also, da die wegzulassende Decimalstelle $2 < 5$ ist, $l_{tg}\,11^0\,34{,}6' = 9{,}3114$.)

Anm. Zwischen $0^0$ und $5^0$ beträ… $l_{sin}$, wie beim $l_{tg}$ der Unterschied zweier auf einander folgen… …meistens mehr als 15, während die kleinen Tafeln für h… …als 15 fehlen. Man findet dann die zur Mantisse zu… der beiden Mantissen durch … minuten multiplicirt. (Z. … gende Mantisse: 7927. … tiplicirt: 14,7. Ab… $= 8{,}7921$.)

B. Ge…

1) Ste… …nkel. so giebt di… die Zahl d… links in d… des ges… Der W…

A…

der T… …ter in man … nehme Man… …er gleichen

zahl des gegebenen Winkels, die daneben stehende Zahl (innerhalb derselben Doppellinien) giebt die Minuten des Complementwinkels.

2) Bestimmung des Logarithmus der Funktion eines stumpfen Winkels. — Da jede Funktion eines Winkels (abgesehen vom Vorzeichen) gleich derselben Funktion seines Supplementwinkels ist, so kommt es, um den Logarithmus der Funktion eines stumpfen Winkels zu finden, nur darauf an, zu jedem Winkel $x$ den Supplementwinkel $180^0 - x$ zu bestimmen. Diesen Winkel liefert ebenfalls Tafel III, und zwar durch das in 1) beschriebene Verfahren. Nur hat man als Gradzahl des Supplementwinkels die rechts neben der gegebenen Zahl in der mit S unterschriebenen Spalte stehende Zahl zu nehmen.

---

| N. | L. 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | P. P. | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | —∞ | 0000 | 3010 | 4771 | 6021 | 6990 | 7782 | 8451 | 9031 | 9542 | | 22 | 21 |
| 1 | 0000 | 0414 | 0792 | 1139 | 1461 | 1761 | 2041 | 2304 | 2553 | 2788 | 1 | 2.2 | 2.1 |
| 2 | 3010 | 3222 | 3424 | 3617 | 3802 | 3979 | 4150 | 4314 | 4472 | 4624 | 2 | 4.4 | 4.2 |
| 3 | 4771 | 4914 | 5051 | 5185 | 5315 | 5441 | 5563 | 5682 | 5798 | 5911 | 3 | 6.6 | 6.3 |
| 4 | 6021 | 6128 | 6232 | 6335 | 6435 | 6532 | 6628 | 6721 | 6812 | 6902 | 4 | 8.8 | 8.4 |
| 5 | 6990 | 7076 | 7160 | 7243 | 7324 | 74[illegible] | 7482 | 7559 | 7634 | 7709 | 5 | 11.0 | 10.5 |
| 6 | 7782 | 7853 | 7924 | 7993 | 8062 | 8[illegible] | 8195 | 8261 | 8325 | 8388 | 6 | 13.2 | 12.6 |
| 7 | 8451 | 8513 | 8573 | 8633 | 8692 | 8751 | 8808 | 8865 | 8921 | 8976 | 7 | 15.4 | 14.7 |
| 8 | 9031 | 9085 | 9138 | 9191 | 9243 | 9294 | 9345 | 9395 | 9445 | 9494 | 8 | 17.6 | 16.8 |
| 9 | 9542 | 9590 | 9638 | 9685 | 9731 | 9777 | 9823 | 9868 | 9912 | 9956 | 9 | 19.8 | 18.9 |
| 10 | 0000 | 0043 | 0086 | 0128 | 0170 | 0212 | 0253 | 0294 | 0334 | 0374 | | 20 | 19 |
| 11 | 0414 | 0453 | 0492 | 0531 | 0569 | 0607 | 0645 | 0682 | 0719 | 0755 | 1 | 2.0 | 1.9 |
| 12 | 0792 | 0828 | 0864 | 0899 | 0934 | 0969 | 1004 | 1038 | 1072 | 1106 | 2 | 4.0 | 3.8 |
| 13 | 1139 | 1173 | 1206 | 1239 | 1271 | 1303 | 1335 | 1367 | 1399 | 1430 | 3 | 6.0 | 5.7 |
| 14 | 1461 | 1492 | 1523 | 1553 | 1584 | 1614 | 1644 | 1673 | 1703 | 1732 | 4 | 8.0 | 7.6 |
| 15 | 1761 | 1790 | 1818 | 1847 | 1875 | 1903 | 1931 | 1959 | 1987 | 2014 | 5 | 10.0 | 9.5 |
| 16 | 2041 | 2068 | 2095 | 2122 | 2148 | 2175 | 2201 | 2227 | 2253 | 2279 | 6 | 12.0 | 11.4 |
| 17 | 2304 | 2330 | 2355 | 2380 | 2405 | 2430 | 2455 | 2480 | 2504 | 2529 | 7 | 14.0 | 13.3 |
| 18 | 2553 | 2577 | 2601 | 2625 | 2648 | 2672 | 2695 | 2718 | 2742 | 2765 | 8 | 16.0 | 15.2 |
| 19 | 2788 | 2810 | 2833 | 2856 | 2878 | 2900 | 2923 | 2945 | 2967 | 2989 | 9 | 18.0 | 17.1 |
| 20 | 3010 | 3032 | 3054 | 3075 | 3096 | 3118 | 3139 | 3160 | 3181 | 3201 | | 18 | 17 |
| 21 | 3222 | 3243 | 3263 | 3284 | 3304 | 3324 | 3345 | 3365 | 3385 | 3404 | 1 | 1.8 | 1.7 |
| 22 | 3424 | 3444 | 3464 | 3483 | 3502 | 3522 | 3541 | 3560 | 3579 | 3598 | 2 | 3.6 | 3.4 |
| 23 | 3617 | 3636 | 3655 | 3674 | 3692 | 3711 | 3729 | 3747 | 3766 | 3784 | 3 | 5.4 | 5.1 |
| 24 | 3802 | 3820 | 3838 | 3856 | 3874 | 3892 | 3909 | 3927 | 3945 | 3962 | 4 | 7.2 | 6.8 |
| 25 | 3979 | 3997 | 4014 | 4031 | 4048 | 4065 | 4082 | 4099 | 4116 | 4133 | 5 | 9.0 | 8.5 |
| 26 | 4150 | 4166 | 4183 | 4200 | 4216 | 4232 | 4249 | 4265 | 4281 | 4298 | 6 | 10.8 | 10.2 |
| 27 | 4314 | 4330 | 4346 | 4362 | 4378 | 4393 | 4409 | 4425 | 4440 | 4456 | 7 | 12.6 | 11.9 |
| 28 | 4472 | 4487 | 4502 | 4518 | 4533 | 4548 | 4564 | 4579 | 4594 | 4609 | 8 | 14.4 | 13.6 |
| 29 | 4624 | 4639 | 4654 | 4669 | 4683 | 4698 | 4713 | 4728 | 4742 | 4757 | 9 | 16.2 | 15.3 |
| 30 | 4771 | 4786 | 4800 | 4814 | 4829 | 4843 | 4857 | 4871 | 4886 | 4900 | | 16 | 15 |
| 31 | 4914 | 4928 | 4942 | 4955 | 4969 | 4983 | 4997 | 5011 | 5024 | 5038 | 1 | 1.6 | 1.5 |
| 32 | 5051 | 5065 | 5079 | 5092 | 5105 | 5119 | 5132 | 5145 | 5159 | 5172 | 2 | 3.2 | 3.0 |
| 33 | 5185 | 5198 | 5211 | 5224 | 5237 | 5250 | 5263 | 5276 | 5289 | 5302 | 3 | 4.8 | 4.5 |
| 34 | 5315 | 5328 | 5340 | 5353 | 5366 | 5378 | 5391 | 5403 | 5416 | 5428 | 4 | 6.4 | 6.0 |
| 35 | 5441 | 5453 | 5465 | 5478 | 5490 | 5502 | 5514 | 5527 | 5539 | 5551 | 5 | 8.0 | 7.5 |
| 36 | 5563 | 5575 | 5587 | 5599 | 5611 | 5623 | 5635 | 5647 | 5658 | 5670 | 6 | 9.6 | 9.0 |
| 37 | 5682 | 5694 | 5705 | 5717 | 5729 | 5740 | 5752 | 5763 | 5775 | 5786 | 7 | 11.2 | 10.5 |
| 38 | 5798 | 5809 | 5821 | 5832 | 5843 | 5855 | 5866 | 5877 | 5888 | 5900 | 8 | 12.8 | 12.0 |
| 39 | 5911 | 5922 | 5933 | 5944 | 5955 | 5966 | 5977 | 5988 | 5999 | 6010 | 9 | 14.4 | 13.5 |
| 40 | 6021 | 6031 | 6042 | 6053 | 6064 | 6075 | 6085 | 6096 | 6107 | 6117 | | 14 | 13 |
| 41 | 6128 | 6138 | 6149 | 6160 | 6170 | 6180 | 6191 | 6201 | 6212 | 6222 | 1 | 1.4 | 1.3 |
| 42 | 6232 | 6243 | 6253 | 6263 | 6274 | 6284 | 6294 | 6304 | 6314 | 6325 | 2 | 2.8 | 2.6 |
| 43 | 6335 | 6345 | 6355 | 6365 | 6375 | 6385 | 6395 | 6405 | 6415 | 6425 | 3 | 4.2 | 3.9 |
| 44 | 6435 | 6444 | 6454 | 6464 | 6474 | 6484 | 6493 | 6503 | 6513 | 6522 | 4 | 5.6 | 5.2 |
| 45 | 6532 | 6542 | 6551 | 6561 | 6571 | 6580 | 6590 | 6599 | 6609 | 6618 | 5 | 7.0 | 6.5 |
| 46 | 6628 | 6637 | 6646 | 6656 | 6665 | 6675 | 6684 | 6693 | 6702 | 6712 | 6 | 8.4 | 7.8 |
| 47 | 6721 | 6730 | 6739 | 6749 | 6758 | 6767 | 6776 | 6785 | 6794 | 6803 | 7 | 9.8 | 9.1 |
| 48 | 6812 | 6821 | 6830 | 6839 | 6848 | 6857 | 6866 | 6875 | 6884 | 6893 | 8 | 11.2 | 10.4 |
| 49 | 6902 | 6911 | 6920 | 6928 | 6937 | 6946 | 6955 | 6964 | 6972 | 6981 | 9 | 12.6 | 11.7 |
| 50 | 6990 | 6998 | 7007 | 7016 | 7024 | 7033 | 7042 | 7050 | 7059 | 7067 | | | |
| L. | L. 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | | | |

| N. | L. 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 50 | 6990 | 6998 | 7007 | 7016 | 7024 | 7033 | 7042 | 7050 | 7059 | 7067 |
| 51 | 7076 | 7084 | 7093 | 7101 | 7110 | 7118 | 7126 | 7135 | 7143 | 7152 |
| 52 | 7160 | 7168 | 7177 | 7185 | 7193 | 7202 | 7210 | 7218 | 7226 | 7235 |
| 53 | 7243 | 7251 | 7259 | 7267 | 7275 | 7284 | 7292 | 7300 | 7308 | 7316 |
| 54 | 7324 | 7332 | 7340 | 7348 | 7356 | [illegible] | 7372 | 7380 | 7388 | 7396 |
| 55 | 7404 | 7412 | 7419 | 7427 | 7435 | 7443 | 7451 | 7459 | 7466 | 7474 |
| 56 | 7482 | 7490 | 7497 | 7505 | 7513 | 7520 | 7528 | 7536 | 7543 | 7551 |
| 57 | 7559 | 7566 | 7574 | 7582 | 7589 | 7597 | 7604 | 7612 | 7619 | 7627 |
| 58 | 7634 | 7642 | 7649 | 7657 | 7664 | 7672 | 7679 | 7686 | 7694 | 7701 |
| 59 | 7709 | 7716 | 7723 | 7731 | 7738 | 7745 | 7752 | 7760 | 7767 | 7774 |
| 60 | 7782 | 7789 | 7796 | 7803 | 7810 | 7818 | 7825 | 7832 | 7839 | 7846 |
| 61 | 7853 | 7860 | 7868 | 7875 | 7882 | 7889 | 7896 | 7903 | 7910 | 7917 |
| 62 | 7924 | 7931 | 7938 | 7945 | 7952 | 7959 | 7966 | 7973 | 7980 | 7986 |
| 63 | 7993 | 8000 | 8007 | 8014 | 8021 | 8028 | 8035 | 8041 | 8048 | 8055 |
| 64 | 8062 | 8069 | 8075 | 8082 | 8089 | 8096 | 8102 | 8109 | 8116 | 8122 |
| 65 | 8129 | 8136 | 8142 | 8149 | 8156 | 8162 | 8169 | 8176 | 8182 | 8189 |
| 66 | 8195 | 8202 | 8209 | 8215 | 8222 | 8228 | 8235 | 8241 | 8248 | 8254 |
| 67 | 8261 | 8267 | 8274 | 8280 | 8287 | 8293 | 8299 | 8306 | 8312 | 8319 |
| 68 | 8325 | 8331 | 8338 | 8344 | 8351 | 8357 | 8363 | 8370 | 8376 | 8382 |
| 69 | 8388 | 8395 | 8401 | 8407 | 8414 | 8420 | 8426 | 8432 | 8439 | 8445 |
| 70 | 8451 | 8457 | 8463 | 8470 | 8476 | 8482 | 8488 | 8494 | 8500 | 8506 |
| 71 | 8513 | 8519 | 8525 | 8531 | 8537 | 8543 | 8549 | 8555 | 8561 | 8567 |
| 72 | 8573 | 8579 | 8585 | 8591 | 8597 | 8603 | 8609 | 8615 | 8621 | 8627 |
| 73 | 8633 | 8639 | 8645 | 8651 | 8657 | 8663 | 8669 | 8675 | 8681 | 8686 |
| 74 | 8692 | 8698 | 8704 | 8710 | 8716 | 8722 | 8727 | 8733 | 8739 | 8745 |
| 75 | 8751 | 8756 | 8762 | 8768 | 8774 | 8779 | 8785 | 8791 | 8797 | 8802 |
| 76 | 8808 | 8814 | 8820 | 8825 | 8831 | 8837 | 8842 | 8848 | 8854 | 8859 |
| 77 | 8865 | 8871 | 8876 | 8882 | 8887 | 8893 | 8899 | 8904 | 8910 | 8915 |
| 78 | 8921 | 8927 | 8932 | 8938 | 8943 | 8949 | 8954 | 8960 | 8965 | 8971 |
| 79 | 8976 | 8982 | 8987 | 8993 | 8998 | 9004 | 9009 | 9015 | 9020 | 9025 |
| 80 | 9031 | 9036 | 9042 | 9047 | 9053 | 9058 | 9063 | 9069 | 9074 | 9079 |
| 81 | 9085 | 9090 | 9096 | 9101 | 9106 | 9112 | 9117 | 9122 | 9128 | 9133 |
| 82 | 9138 | 9143 | 9149 | 9154 | 9159 | 9165 | 9170 | 9175 | 9180 | 9186 |
| 83 | 9191 | 9196 | 9201 | 9206 | 9212 | 9217 | 9222 | 9227 | 9232 | 9238 |
| 84 | 9243 | 9248 | 9253 | 9258 | 9263 | 9269 | 9274 | 9279 | 9284 | 9289 |
| 85 | 9294 | 9299 | 9304 | 9309 | 9315 | 9320 | 9325 | 9330 | 9335 | 9340 |
| 86 | 9345 | 9350 | 9355 | 9360 | 9365 | 9370 | 9375 | 9380 | 9385 | 9390 |
| 87 | 9395 | 9400 | 9405 | 9410 | 9415 | 9420 | 9425 | 9430 | 9435 | 9440 |
| 88 | 9445 | 9450 | 9455 | 9460 | 9465 | 9469 | 9474 | 9479 | 9484 | 9489 |
| 89 | 9494 | 9499 | 9504 | 9509 | 9513 | 9518 | 9523 | 9528 | 9533 | 9538 |
| 90 | 9542 | 9547 | 9552 | 9557 | 9562 | 9566 | 9571 | 9576 | 9581 | 9586 |
| 91 | 9590 | 9595 | 9600 | 9605 | 9609 | 9614 | 9619 | 9624 | 9628 | 9633 |
| 92 | 9638 | 9643 | 9647 | 9652 | 9657 | 9661 | 9666 | 9671 | 9675 | 9680 |
| 93 | 9685 | 9689 | 9694 | 9699 | 9703 | 9708 | 9713 | 9717 | 9722 | 9727 |
| 94 | 9731 | 9736 | 9741 | 9745 | 9750 | 9754 | 9759 | 9763 | 9768 | 9773 |
| 95 | 9777 | 9782 | 9786 | 9791 | 9795 | 9800 | 9805 | 9809 | 9814 | 9818 |
| 96 | 9823 | 9827 | 9832 | 9836 | 9841 | 9845 | 9850 | 9854 | 9859 | 9863 |
| 97 | 9868 | 9872 | 9877 | 9881 | 9886 | 9890 | 9894 | 9899 | 9903 | 9908 |
| 98 | 9912 | 9917 | 9921 | 9926 | 9930 | 9934 | 9939 | 9943 | 9948 | 9952 |
| 99 | 9956 | 9961 | 9965 | 9969 | 9974 | 9978 | 9983 | 9987 | 9991 | 9996 |
| 100 | 0000 | 0004 | 0009 | 0013 | 0017 | 0022 | 0026 | 0030 | 0035 | 0039 |
| N. | L. 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |

P. P.

| | 12 | 11 | 9 | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1.2 | 1.1 | 0.9 | 0.8 | 0.7 | 0.6 | 0.5 | 0.4 |
| 2 | 2.4 | 2.2 | 1.8 | 1.6 | 1.4 | 1.2 | 1.0 | 0.8 |
| 3 | 3.6 | 3.3 | 2.7 | 2.4 | 2.1 | 1.8 | 1.5 | 1.2 |
| 4 | 4.8 | 4.4 | 3.6 | 3.2 | 2.8 | 2.4 | 2.0 | 1.6 |
| 5 | 6.0 | 5.5 | 4.5 | 4.0 | 3.5 | 3.0 | 2.5 | 2.0 |
| 6 | 7.2 | 6.6 | 5.4 | 4.8 | 4.2 | 3.6 | 3.0 | 2.4 |
| 7 | 8.4 | 7.7 | 6.3 | 5.6 | 4.9 | 4.2 | 3.5 | 2.8 |
| 8 | 9.6 | 8.8 | 7.2 | 6.4 | 5.6 | 4.8 | 4.0 | 3.2 |
| 9 | 10.8 | 9.9 | 8.1 | 7.2 | 6.3 | 5.4 | 4.5 | 3.6 |

| N. | L. 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 100 | 0000 | 0004 | 0009 | 0013 | 0017 | 0022 | 0026 | 0030 | 0035 | 0039 |
| 101 | 0043 | 0048 | 0052 | 0056 | 0060 | 0065 | 0069 | 0073 | 0077 | 0082 |
| 102 | 0086 | 0090 | 0095 | 0099 | 0103 | 0107 | 0111 | 0116 | 0120 | 0124 |
| 103 | 0128 | 0133 | 0137 | 0141 | 0145 | 0149 | 0154 | 0158 | 0162 | 0166 |
| 104 | 0170 | 0175 | 0179 | 0183 | 0187 | 0191 | 0195 | 0199 | 0204 | 0208 |
| 105 | 0212 | 0216 | 0220 | 0224 | 0228 | 0233 | 0237 | 0241 | 0245 | 0249 |
| 106 | 0253 | 0257 | 0261 | 0265 | 0269 | 0273 | 0278 | 0282 | 0286 | 0290 |
| 107 | 0294 | 0298 | 0302 | 0306 | 0310 | 0314 | 0318 | 0322 | 0326 | 0330 |
| 108 | 0334 | 0338 | 0342 | 0346 | 0350 | 0354 | 0358 | 0362 | 0366 | 0370 |
| 109 | 0374 | 0378 | 0382 | 0386 | 0390 | 0394 | 0398 | 0402 | 0406 | 0410 |
| 110 | 0414 | 0418 | 0422 | 0426 | 0430 | 0434 | 0438 | 0441 | 0445 | 0449 |
| 111 | 0453 | 0457 | 0461 | 0465 | 0469 | 0473 | 0477 | 0481 | 0484 | 0488 |
| 112 | 0492 | 0496 | 0500 | 0504 | 0508 | 0512 | 0515 | 0519 | 0523 | 0527 |
| 113 | 0531 | 0535 | 0538 | 0542 | 0546 | 0550 | 0554 | 0558 | 0561 | 0565 |
| 114 | 0569 | 0573 | 0577 | 0580 | 0584 | 0588 | 0592 | 0596 | 0599 | 0603 |
| 115 | 0607 | 0611 | 0615 | 0618 | 0622 | 0626 | 0630 | 0633 | 0637 | 0641 |
| 116 | 0645 | 0648 | 0652 | 0656 | 0660 | 0663 | 0667 | 0671 | 0674 | 0678 |
| 117 | 0682 | 0686 | 0689 | 0693 | 0697 | 0700 | 0704 | 0708 | 0711 | 0715 |
| 118 | 0719 | 0722 | 0726 | 0730 | 0734 | 0737 | 0741 | 0745 | 0748 | 0752 |
| 119 | 0755 | 0759 | 0763 | 0766 | 0770 | 0774 | 0777 | 0781 | 0785 | 0788 |
| 120 | 0792 | 0795 | 0799 | 0803 | 0806 | 0810 | 0813 | 0817 | 0821 | 0824 |
| 121 | 0828 | 0831 | 0835 | 0839 | 0842 | 0846 | 0849 | 0853 | 0856 | 0860 |
| 122 | 0864 | 0867 | 0871 | 0874 | 0878 | 0881 | 0885 | 0888 | 0892 | 0896 |
| 123 | 0899 | 0903 | 0906 | 0910 | 0913 | 0917 | 0920 | 0924 | 0927 | 0931 |
| 124 | 0934 | 0938 | 0941 | 0945 | 0948 | 0952 | 0955 | 0959 | 0962 | 0966 |
| 125 | 0969 | 0973 | 0976 | 0980 | 0983 | 0986 | 0990 | 0993 | 0997 | 1000 |
| 126 | 1004 | 1007 | 1011 | 1014 | 1017 | 1021 | 1024 | 1028 | 1031 | 1035 |
| 127 | 1038 | 1041 | 1045 | 1048 | 1052 | 1055 | 1059 | 1062 | 1065 | 1069 |
| 128 | 1072 | 1075 | 1079 | 1082 | 1086 | 1089 | 1093 | 1096 | 1099 | 1103 |
| 129 | 1106 | 1109 | 1113 | 1116 | 1119 | 1123 | 1126 | 1129 | 1133 | 1136 |
| 130 | 1139 | 1143 | 1146 | 1149 | 1153 | 1156 | 1159 | 1163 | 1166 | 1169 |
| 131 | 1173 | 1176 | 1179 | 1183 | 1186 | 1189 | 1193 | 1196 | 1199 | 1202 |
| 132 | 1206 | 1209 | 1212 | 1216 | 1219 | 1222 | 1225 | 1229 | 1232 | 1235 |
| 133 | 1239 | 1242 | 1245 | 1248 | 1252 | 1255 | 1258 | 1261 | 1265 | 1268 |
| 134 | 1271 | 1274 | 1278 | 1281 | 1284 | 1287 | 1290 | 1294 | 1297 | 1300 |
| 135 | 1303 | 1307 | 1310 | 1313 | 1316 | 1319 | 1323 | 1326 | 1329 | 1332 |
| 136 | 1335 | 1339 | 1342 | 1345 | 1348 | 1351 | 1355 | 1358 | 1361 | 1364 |
| 137 | 1367 | 1370 | 1374 | 1377 | 1380 | 1383 | 1386 | 1389 | 1392 | 1396 |
| 138 | 1399 | 1402 | 1405 | 1408 | 1411 | 1414 | 1418 | 1421 | 1424 | 1427 |
| 139 | 1430 | 1433 | 1436 | 1440 | 1443 | 1446 | 1449 | 1452 | 1455 | 1458 |
| 140 | 1461 | 1464 | 1467 | 1471 | 1474 | 1477 | 1480 | 1483 | 1486 | 1489 |
| 141 | 1492 | 1495 | 1498 | 1501 | 1504 | 1508 | 1511 | 1514 | 1517 | 1520 |
| 142 | 1523 | 1526 | 1529 | 1532 | 1535 | 1538 | 1541 | 1544 | 1547 | 1550 |
| 143 | 1553 | 1556 | 1559 | 1562 | 1565 | 1569 | 1572 | 1575 | 1578 | 1581 |
| 144 | 1584 | 1587 | 1590 | 1593 | 1596 | 1599 | 1602 | 1605 | 1608 | 1611 |
| 145 | 1614 | 1617 | 1620 | 1623 | 1626 | 1629 | 1632 | 1635 | 1638 | 1641 |
| 146 | 1644 | 1647 | 1649 | 1652 | 1655 | 1658 | 1661 | 1664 | 1667 | 1670 |
| 147 | 1673 | 1676 | 1679 | 1682 | 1685 | 1688 | 1691 | 1694 | 1697 | 1700 |
| 148 | 1703 | 1706 | 1708 | 1711 | 1714 | 1717 | 1720 | 1723 | 1726 | 1729 |
| 149 | 1732 | 1735 | 1738 | 1741 | 1744 | 1746 | 1749 | 1752 | 1755 | 1758 |
| 150 | 1761 | 1764 | 1767 | 1770 | 1772 | 1775 | 1778 | 1781 | 1784 | 1787 |

| P. P. | 5 | 4 | 3 | 2 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.5 | 0.4 | 0.3 | 0.2 |
| 2 | 1.0 | 0.8 | 0.6 | 0.4 |
| 3 | 1.5 | 1.2 | 0.9 | 0.6 |
| 4 | 2.0 | 1.6 | 1.2 | 0.8 |
| 5 | 2.5 | 2.0 | 1.5 | 1.0 |
| 6 | 3.0 | 2.4 | 1.8 | 1.2 |
| 7 | 3.5 | 2.8 | 2.1 | 1.4 |
| 8 | 4.0 | 3.2 | 2.4 | 1.6 |
| 9 | 4.5 | 3.6 | 2.7 | 1.8 |

| N. | L. 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | P. P. | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **150** | 1761 | 1764 | 1767 | 1770 | 1772 | 1775 | 1778 | 1781 | 1784 | 1787 | | |
| 151 | 1790 | 1793 | 1796 | 1798 | 1801 | 1804 | 1807 | 1810 | 1813 | 1816 | | |
| 152 | 1818 | 1821 | 1824 | 1827 | 1830 | 1833 | 1836 | 1838 | 1841 | 1844 | | |
| 153 | 1847 | 1850 | 1853 | 1855 | 1858 | 1861 | 1864 | 1867 | 1870 | 1872 | | |
| 154 | 1875 | 1878 | 1881 | 1884 | 1886 | 1889 | 1892 | 1895 | 1898 | 1901 | | |
| 155 | 1903 | 1906 | 1909 | 1912 | 1915 | 1917 | 1920 | 1923 | 1926 | 1928 | | |
| 156 | 1931 | 1934 | 1937 | 1940 | 1942 | 1945 | 1948 | 1951 | 1953 | 1956 | | |
| 157 | 1959 | 1962 | 1965 | 1967 | 1970 | 1973 | 1976 | 1978 | 1981 | 1984 | | |
| 158 | 1987 | 1989 | 1992 | 1995 | 1998 | 2000 | 2003 | 2006 | 2009 | 2011 | | |
| 159 | 2014 | 2017 | 2019 | 2022 | 2025 | 2028 | 2030 | 2033 | 2036 | 2038 | | |
| **160** | 2041 | 2044 | 2047 | 2049 | 2052 | 2055 | 2057 | 2060 | 2063 | 2066 | | 3 |
| 161 | 2068 | 2071 | 2074 | 2076 | 2079 | 2082 | 2084 | 2087 | 2090 | 2092 | 1 | 0.3 |
| 162 | 2095 | 2098 | 2101 | 2103 | 2106 | 2109 | 2111 | 2114 | 2117 | 2119 | 2 | 0.6 |
| 163 | 2122 | 2125 | 2127 | 2130 | 2133 | 2135 | 2138 | 2140 | 2143 | 2146 | 3 | 0.9 |
| 164 | 2148 | 2151 | 2154 | 2156 | 2159 | 2162 | 2164 | 2167 | 2170 | 2172 | 4 | 1.2 |
| 165 | 2175 | 2177 | 2180 | 2183 | 2185 | 2188 | 2191 | 2193 | 2196 | 2198 | 5 | 1.5 |
| 166 | 2201 | 2204 | 2206 | 2209 | 2212 | 2214 | 2217 | 2219 | 2222 | 2225 | 6 | 1.8 |
| 167 | 2227 | 2230 | 2232 | 2235 | 2238 | 2240 | 2243 | 2245 | 2248 | 2251 | 7 | 2.1 |
| 168 | 2253 | 2256 | 2258 | 2261 | 2263 | 2266 | 2269 | 2271 | 2274 | 2276 | 8 | 2.4 |
| 169 | 2279 | 2281 | 2284 | 2287 | 2289 | 2292 | 2294 | 2297 | 2299 | 2302 | 9 | 2.7 |
| **170** | 2304 | 2307 | 2310 | 2312 | 2315 | 2317 | 2320 | 2322 | 2325 | 2327 | | |
| 171 | 2330 | 2333 | 2335 | 2338 | 2340 | 2343 | 2345 | 2348 | 2350 | 2353 | | |
| 172 | 2355 | 2358 | 2360 | 2363 | 2365 | 2368 | 2370 | 2373 | 2375 | 2378 | | |
| 173 | 2380 | 2383 | 2385 | 2388 | 2390 | 2393 | 2395 | 2398 | 2400 | 2403 | | |
| 174 | 2405 | 2408 | 2410 | 2413 | 2415 | 2418 | 2420 | 2423 | 2425 | 2428 | | |
| 175 | 2430 | 2433 | 2435 | 2438 | 2440 | 2443 | 2445 | 2448 | 2450 | 2453 | | |
| 176 | 2455 | 2458 | 2460 | 2463 | 2465 | 2467 | 2470 | 2472 | 2475 | 2477 | | |
| 177 | 2480 | 2482 | 2485 | 2487 | 2490 | 2492 | 2494 | 2497 | 2499 | 2502 | | |
| 178 | 2504 | 2507 | 2509 | 2512 | 2514 | 2516 | 2519 | 2521 | 2524 | 2526 | | |
| 179 | 2529 | 2531 | 2533 | 2536 | 2538 | 2541 | 2543 | 2545 | 2548 | 2550 | | |
| **180** | 2553 | 2555 | 2558 | 2560 | 2562 | 2565 | 2567 | 2570 | 2572 | 2574 | | 2 |
| 181 | 2577 | 2579 | 2582 | 2584 | 2586 | 2589 | 2591 | 2594 | 2596 | 2598 | 1 | 0.2 |
| 182 | 2601 | 2603 | 2605 | 2608 | 2610 | 2613 | 2615 | 2617 | 2620 | 2622 | 2 | 0.4 |
| 183 | 2625 | 2627 | 2629 | 2632 | 2634 | 2636 | 2639 | 2641 | 2643 | 2646 | 3 | 0.6 |
| 184 | 2648 | 2651 | 2653 | 2655 | 2658 | 2660 | 2662 | 2665 | 2667 | 2669 | 4 | 0.8 |
| 185 | 2672 | 2674 | 2676 | 2679 | 2681 | 2683 | 2686 | 2688 | 2690 | 2693 | 5 | 1.0 |
| 186 | 2695 | 2697 | 2700 | 2702 | 2704 | 2707 | 2709 | 2711 | 2714 | 2716 | 6 | 1.2 |
| 187 | 2718 | 2721 | 2723 | 2725 | 2728 | 2730 | 2732 | 2735 | 2737 | 2739 | 7 | 1.4 |
| 188 | 2742 | 2744 | 2746 | 2749 | 2751 | 2753 | 2755 | 2758 | 2760 | 2762 | 8 | 1.6 |
| 189 | 2765 | 2767 | 2769 | 2772 | 2774 | 2776 | 2778 | 2781 | 2783 | 2785 | 9 | 1.8 |
| **190** | 2788 | 2790 | 2792 | 2794 | 2797 | 2799 | 2801 | 2804 | 2806 | 2808 | | |
| 191 | 2810 | 2813 | 2815 | 2817 | 2819 | 2822 | 2824 | 2826 | 2828 | 2831 | | |
| 192 | 2833 | 2835 | 2838 | 2840 | 2842 | 2844 | 2847 | 2849 | 2851 | 2853 | | |
| 193 | 2856 | 2858 | 2860 | 2862 | 2865 | 2867 | 2869 | 2871 | 2874 | 2876 | | |
| 194 | 2878 | 2880 | 2883 | 2885 | 2887 | 2889 | 2891 | 2894 | 2896 | 2898 | | |
| 195 | 2900 | 2903 | 2905 | 2907 | 2909 | 2911 | 2914 | 2916 | 2918 | 2920 | | |
| 196 | 2923 | 2925 | 2927 | 2929 | 2931 | 2934 | 2936 | 2938 | 2940 | 2942 | | |
| 197 | 2945 | 2947 | 2949 | 2951 | 2953 | 2956 | 2958 | 2960 | 2962 | 2964 | | |
| 198 | 2967 | 2969 | 2971 | 2973 | 2975 | 2978 | 2980 | 2982 | 2984 | 2986 | | |
| 199 | 2989 | 2991 | 2993 | 2995 | 2997 | 2999 | 3002 | 3004 | 3006 | 3008 | | |
| **200** | 3010 | 3012 | 3015 | 3017 | 3019 | 3021 | 3023 | 3025 | 3028 | 3030 | | |

| | | | | | | | 6° | 7° | 8° | 9° | 10° | 11° | 12° | 13° | 14° | 15° | 16° | 17° | 18° | 19° | 20° | 21° |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | −∞ | 2419 | 5431 | 7194 | 8446 | 9420 | 0216 | 0891 | 1478 | 1997 | 2463 | 2887 | 3275 | 3634 | 3968 | 4281 | 4575 | 4853 | 5118 | 5370 | 5611 | 5842 |
| 1 | 4637 | 2491 | 5467 | 7218 | 8465 | 9434 | 0228 | 0902 | 1487 | 2005 | 2471 | 2893 | 3281 | 3639 | 3973 | 4286 | 4580 | 4858 | 5122 | 5374 | 5615 | 5846 |
| 2 | 7648 | 2562 | 5503 | 7242 | 8483 | 9449 | 0240 | 0912 | 1496 | 2013 | 2478 | 2900 | 3287 | 3645 | 3978 | 4291 | 4584 | 4862 | 5126 | 5378 | 5619 | 5849 |
| 3 | 9408 | 2631 | 5538 | 7266 | 8501 | 9463 | 0253 | 0923 | 1505 | 2022 | 2485 | 2907 | 3293 | 3651 | 3984 | 4296 | 4589 | 4867 | 5131 | 5382 | 5622 | 5853 |
| 4 | 0658 | 2700 | 5573 | 7290 | 8518 | 9477 | 0265 | 0933 | 1515 | 2030 | 2493 | 2913 | 3300 | 3657 | 3989 | 4301 | 4594 | 4871 | 5135 | 5386 | 5626 | 5857 |
| 5 | 1627 | 2767 | 5608 | 7313 | 8536 | 9492 | 0277 | 0943 | 1524 | 2038 | 2500 | 2920 | 3306 | 3662 | 3995 | 4306 | 4599 | 4876 | 5139 | 5390 | 5630 | 5861 |
| 6 | 2419 | 2833 | 5643 | 7337 | 8554 | 9506 | 0289 | 0954 | 1533 | 2046 | 2507 | 2927 | 3312 | 3668 | 4000 | 4311 | 4603 | 4880 | 5143 | 5394 | 5634 | 5864 |
| 7 | 3088 | 2899 | 5677 | 7360 | 8572 | 9520 | 0300 | 0964 | 1542 | 2054 | 2515 | 2934 | 3318 | 3674 | 4005 | 4316 | 4608 | 4885 | 5148 | 5398 | 5638 | 5868 |
| 8 | 3668 | 2963 | 5711 | 7383 | 8589 | 9534 | 0312 | 0974 | 1551 | 2062 | 2522 | 2940 | 3324 | 3680 | 4011 | 4321 | 4613 | 4889 | 5152 | 5402 | 5642 | 5872 |
| 9 | 4180 | 3026 | 5745 | 7406 | 8607 | 9549 | 0324 | 0984 | 1560 | 2070 | 2529 | 2947 | 3330 | 3685 | 4016 | 4326 | 4618 | 4894 | 5156 | 5407 | 5646 | 5876 |
| 10 | 4637 | 3089 | 5779 | 7429 | 8624 | 9563 | 0336 | 0995 | 1569 | 2078 | 2536 | 2953 | 3336 | 3691 | 4021 | 4331 | 4622 | 4898 | 5161 | 5411 | 5650 | 5879 |
| 11 | 5051 | 3150 | 5812 | 7452 | 8642 | 9577 | 0348 | 1005 | 1578 | 2086 | 2544 | 2960 | 3343 | 3697 | 4027 | 4336 | 4627 | 4903 | 5165 | 5415 | 5654 | 5883 |
| 12 | 5429 | 3211 | 5845 | 7475 | 8659 | 9591 | 0360 | 1015 | 1587 | 2094 | 2551 | 2967 | 3349 | 3702 | 4032 | 4341 | 4632 | 4907 | 5169 | 5419 | 5658 | 5887 |
| 13 | 5777 | 3271 | 5878 | 7497 | 8676 | 9605 | 0371 | 1025 | 1596 | 2102 | 2558 | 2973 | 3355 | 3708 | 4037 | 4346 | 4637 | 4912 | 5173 | 5423 | 5662 | 5891 |
| 14 | 6099 | 3330 | 5911 | 7520 | 8694 | 9619 | 0383 | 1035 | 1605 | 2110 | 2565 | 2980 | 3361 | 3714 | 4042 | 4351 | 4641 | 4916 | 5178 | 5427 | 5665 | 5894 |
| 15 | 6398 | 3389 | 5943 | 7542 | 8711 | 9633 | 0395 | 1045 | 1613 | 2118 | 2573 | 2987 | 3367 | 3719 | 4048 | 4356 | 4646 | 4921 | 5182 | 5431 | 5669 | 5898 |
| 16 | 6678 | 3446 | 5975 | 7565 | 8728 | 9646 | 0407 | 1056 | 1622 | 2126 | 2580 | 2993 | 3373 | 3725 | 4053 | 4361 | 4651 | 4925 | 5186 | 5435 | 5673 | 5902 |
| 17 | 6942 | 3503 | 6007 | 7587 | 8745 | 9660 | 0418 | 1066 | 1631 | 2134 | 2587 | 3000 | 3379 | 3731 | 4058 | 4366 | 4655 | 4930 | 5190 | 5439 | 5677 | 5906 |
| 18 | 7190 | 3559 | 6038 | 7609 | 8762 | 9674 | 0430 | 1076 | 1640 | 2142 | 2594 | 3006 | 3385 | 3736 | 4064 | 4371 | 4660 | 4934 | 5195 | 5443 | 5681 | 5909 |
| 19 | 7425 | 3614 | 6070 | 7631 | 8778 | 9688 | 0441 | 1086 | 1649 | 2150 | 2601 | 3013 | 3391 | 3742 | 4069 | 4376 | 4665 | 4939 | 5199 | 5447 | 5685 | 5913 |
| 20 | 7648 | 3669 | 6101 | 7652 | 8795 | 9701 | 0453 | 1096 | 1658 | 2158 | 2609 | 3020 | 3397 | 3748 | 4074 | 4381 | 4669 | 4943 | 5203 | 5451 | 5689 | 5917 |
| 21 | 7860 | 3723 | 6132 | 7674 | 8812 | 9715 | 0464 | 1106 | 1667 | 2166 | 2616 | 3026 | 3403 | 3753 | 4079 | 4386 | 4674 | 4947 | 5207 | 5455 | 5693 | 5921 |
| 22 | 8062 | 3776 | 6163 | 7696 | 8829 | 9729 | 0476 | 1116 | 1675 | 2174 | 2623 | 3033 | 3409 | 3759 | 4085 | 4390 | 4679 | 4952 | 5212 | 5459 | 5696 | 5924 |
| 23 | 8255 | 3829 | 6193 | 7717 | 8845 | 9742 | 0487 | 1125 | 1684 | 2181 | 2630 | 3039 | 3416 | 3764 | 4090 | 4395 | 4683 | 4956 | 5216 | 5463 | 5700 | 5928 |
| 24 | 8439 | 3881 | 6223 | 7739 | 8862 | 9756 | 0499 | 1135 | 1693 | 2189 | 2637 | 3046 | 3422 | 3770 | 4095 | 4400 | 4688 | 4961 | 5220 | 5467 | 5704 | 5932 |
| 25 | 8617 | 3932 | 6254 | 7760 | 8878 | 9769 | 0510 | 1145 | 1702 | 2197 | 2644 | 3052 | 3428 | 3776 | 4100 | 4405 | 4693 | 4965 | 5224 | 5471 | 5708 | 5935 |
| 26 | 8787 | 3983 | 6283 | 7781 | 8895 | 9782 | 0521 | 1155 | 1710 | 2205 | 2651 | 3059 | 3434 | 3781 | 4106 | 4410 | 4697 | 4970 | 5228 | 5475 | 5712 | 5939 |
| 27 | 8951 | 4033 | 6313 | 7802 | 8911 | 9796 | 0533 | 1165 | 1719 | 2213 | 2658 | 3065 | 3440 | 3787 | 4111 | 4415 | 4702 | 4974 | 5233 | 5479 | 5716 | 5943 |
| 28 | 9109 | 4083 | 6343 | 7823 | 8927 | 9809 | 0544 | 1175 | 1728 | 2221 | 2666 | 3072 | 3446 | 3792 | 4116 | 4420 | 4707 | 4978 | 5237 | 5483 | 5720 | 5947 |
| 29 | 9261 | 4132 | 6372 | 7844 | 8944 | 9823 | 0555 | 1185 | 1736 | 2228 | 2673 | 3078 | 3452 | 3798 | 4121 | 4425 | 4711 | 4983 | 5241 | 5487 | 5724 | 5950 |
| | 7 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 |

P. P.

| | 15 | 14 |
|---|---|---|
| 1 | 1.5 | 1.4 |
| 2 | 3.0 | 2.8 |
| 3 | 4.5 | 4.2 |
| 4 | 6.0 | 5.6 |
| 5 | 7.5 | 7.0 |
| 6 | 9.0 | 8.4 |
| 7 | 10.5 | 9.8 |
| 8 | 12.0 | 11.2 |
| 9 | 13.5 | 12.6 |

| | 13 | 12 |
|---|---|---|
| 1 | 1.3 | 1.2 |
| 2 | 2.6 | 2.4 |
| 3 | 3.9 | 3.6 |
| 4 | 5.2 | 4.8 |
| 5 | 6.5 | 6.0 |
| 6 | 7.8 | 7.2 |
| 7 | 9.1 | 8.4 |
| 8 | 10.4 | 9.6 |
| 9 | 11.7 | 10.8 |

| | 11 | 9 |
|---|---|---|
| 1 | 1.1 | 0.9 |
| 2 | 2.2 | 1.8 |
| 3 | 3.3 | 2.7 |
| 4 | 4.4 | 3.6 |
| 5 | 5.5 | 4.5 |
| 6 | 6.6 | 5.4 |
| 7 | 7.7 | 6.3 |
| 8 | 8.8 | 7.2 |
| 9 | 9.9 | 8.1 |

| ′ | 0° | 1° | 2° | 3° | 4° | 5° | 6° | 7° | 8° | 9° | 10° | 11° | 12° | 13° | 14° | 15° | 16° | 17° | 18° | 19° | 20° | 21° | P. P. | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 30 | 9409 | 4181 | 6401 | 7865 | 8960 | 9836 | 0567 | 1194 | 1745 | 2236 | 2680 | 3085 | 3458 | 3804 | 4127 | 4430 | 4716 | 4987 | 5245 | 5491 | 5727 | 5954 | | 8 | 7 |
| 31 | 9551 | 4229 | 6430 | 7886 | 8976 | 9849 | 0578 | 1204 | 1754 | 2244 | 2687 | 3091 | 3464 | 3809 | 4132 | 4435 | 4721 | 4992 | 5249 | 5496 | 5731 | 5958 | 1 | 0.8 | 0.7 |
| 32 | 9689 | 4276 | 6459 | 7906 | 8992 | 9862 | 0589 | 1214 | 1762 | 2252 | 2694 | 3098 | 3469 | 3815 | 4137 | 4440 | 4725 | 4996 | 5254 | 5500 | 5735 | 5961 | 2 | 1.6 | 1.4 |
| 33 | 9823 | 4323 | 6487 | 7927 | 9008 | 9875 | 0600 | 1223 | 1771 | 2259 | 2701 | 3104 | 3475 | 3820 | 4142 | 4445 | 4730 | 5000 | 5258 | 5504 | 5739 | 5965 | 3 | 2.4 | 2.1 |
| 34 | 9952 | 4370 | 6515 | 7947 | 9024 | 9888 | 0611 | 1233 | 1779 | 2267 | 2708 | 3110 | 3481 | 3826 | 4147 | 4449 | 4735 | 5005 | 5262 | 5508 | 5743 | 5969 | 4 | 3.2 | 2.8 |
| 35 | 0078 | 4416 | 6544 | 7967 | 9040 | 9901 | 0622 | 1243 | 1788 | 2275 | 2715 | 3117 | 3487 | 3831 | 4153 | 4454 | 4739 | 5009 | 5266 | 5512 | 5747 | 5972 | 5 | 4.0 | 3.5 |
| 36 | 0200 | 4461 | 6571 | 7988 | 9056 | 9915 | 0633 | 1252 | 1797 | 2282 | 2722 | 3123 | 3493 | 3837 | 4158 | 4459 | 4744 | 5014 | 5270 | 5516 | 5750 | 5976 | 6 | 4.8 | 4.2 |
| 37 | 0319 | 4506 | 6599 | 8008 | 9071 | 9928 | 0645 | 1262 | 1805 | 2290 | 2729 | 3130 | 3499 | 3842 | 4163 | 4464 | 4748 | 5018 | 5275 | 5520 | 5754 | 5980 | 7 | 5.6 | 4.9 |
| 38 | 0435 | 4551 | 6627 | 8028 | 9087 | 9940 | 0656 | 1272 | 1814 | 2298 | 2736 | 3136 | 3505 | 3848 | 4168 | 4469 | 4753 | 5022 | 5279 | 5524 | 5758 | 5984 | 8 | 6.4 | 5.6 |
| 39 | 0548 | 4595 | 6654 | 8048 | 9103 | 9953 | 0667 | 1281 | 1822 | 2305 | 2743 | 3142 | 3511 | 3853 | 4173 | 4474 | 4758 | 5027 | 5283 | 5528 | 5762 | 5987 | 9 | 7.2 | 6.3 |
| 40 | 0658 | 4638 | 6682 | 8067 | 9118 | 9966 | 0678 | 1291 | 1831 | 2313 | 2750 | 3149 | 3517 | 3859 | 4178 | 4479 | 4762 | 5031 | 5287 | 5531 | 5766 | 5991 | | 6 | 5 |
| 41 | 0765 | 4682 | 6709 | 8087 | 9134 | 9979 | 0688 | 1300 | 1839 | 2321 | 2757 | 3155 | 3523 | 3864 | 4184 | 4484 | 4767 | 5035 | 5291 | 5535 | 5770 | 5995 | 1 | 0.6 | 0.5 |
| 42 | 0870 | 4725 | 6736 | 8107 | 9150 | 9992 | 0699 | 1310 | 1848 | 2328 | 2764 | 3162 | 3529 | 3870 | 4189 | 4488 | 4771 | 5040 | 5295 | 5539 | 5773 | 5998 | 2 | 1.2 | 1.0 |
| 43 | 0972 | 4767 | 6762 | 8126 | 9165 | 0005 | 0710 | 1319 | 1856 | 2336 | 2770 | 3168 | 3535 | 3875 | 4194 | 4493 | 4776 | 5044 | 5300 | 5543 | 5777 | 6002 | 3 | 1.8 | 1.5 |
| 44 | 1072 | 4809 | 6789 | 8146 | 9180 | 0017 | 0721 | 1329 | 1864 | 2343 | 2777 | 3174 | 3541 | 3881 | 4199 | 4498 | 4781 | 5049 | 5304 | 5547 | 5781 | 6006 | 4 | 2.4 | 2.0 |
| 45 | 1170 | 4851 | 6815 | 8165 | 9196 | 0030 | 0732 | 1338 | 1873 | 2351 | 2784 | 3181 | 3546 | 3886 | 4204 | 4503 | 4785 | 5053 | 5308 | 5551 | 5785 | 6009 | 5 | 3.0 | 2.5 |
| 46 | 1265 | 4892 | 6842 | 8185 | 9211 | 0043 | 0743 | 1348 | 1881 | 2359 | 2791 | 3187 | 3552 | 3892 | 4209 | 4508 | 4790 | 5057 | 5312 | 5555 | 5789 | 6013 | 6 | 3.6 | 3.0 |
| 47 | 1359 | 4933 | 6868 | 8204 | 9226 | 0055 | 0754 | 1357 | 1890 | 2366 | 2798 | 3193 | 3558 | 3897 | 4214 | 4513 | 4794 | 5062 | 5316 | 5559 | 5792 | 6017 | 7 | 4.2 | 3.5 |
| 48 | 1450 | 4973 | 6894 | 8223 | 9241 | 0068 | 0764 | 1367 | 1898 | 2374 | 2805 | 3200 | 3564 | 3903 | 4220 | 4517 | 4799 | 5066 | 5320 | 5563 | 5796 | 6020 | 8 | 4.8 | 4.0 |
| 49 | 1540 | 5013 | 6920 | 8242 | 9256 | 0080 | 0775 | 1376 | 1906 | 2381 | 2812 | 3206 | 3570 | 3908 | 4225 | 4522 | 4803 | 5070 | 5324 | 5567 | 5800 | 6024 | 9 | 5.4 | 4.5 |
| 50 | 1627 | 5053 | 6945 | 8261 | 9272 | 0093 | 0786 | 1385 | 1915 | 2389 | 2819 | 3212 | 3576 | 3914 | 4230 | 4527 | 4808 | 5075 | 5329 | 5571 | 5804 | 6028 | | 4 | 3 |
| 51 | 1713 | 5092 | 6971 | 8280 | 9287 | 0105 | 0796 | 1395 | 1923 | 2396 | 2825 | 3219 | 3581 | 3919 | 4235 | 4532 | 4813 | 5079 | 5333 | 5575 | 5808 | 6031 | 1 | 0.4 | 0.3 |
| 52 | 1798 | 5131 | 6996 | 8299 | 9302 | 0118 | 0807 | 1404 | 1931 | 2404 | 2832 | 3225 | 3587 | 3924 | 4240 | 4537 | 4817 | 5083 | 5337 | 5579 | 5811 | 6035 | 2 | 0.8 | 0.6 |
| 53 | 1880 | 5170 | 7021 | 8317 | 9316 | 0130 | 0818 | 1413 | 1940 | 2411 | 2839 | 3231 | 3593 | 3930 | 4245 | 4541 | 4822 | 5088 | 5341 | 5583 | 5815 | 6039 | 3 | 1.2 | 0.9 |
| 54 | 1962 | 5208 | 7046 | 8336 | 9331 | 0143 | 0828 | 1423 | 1948 | 2419 | 2846 | 3237 | 3599 | 3935 | 4250 | 4546 | 4826 | 5092 | 5345 | 5587 | 5819 | 6042 | 4 | 1.6 | 1.2 |
| 55 | 2041 | 5246 | 7071 | 8355 | 9346 | 0155 | 0839 | 1432 | 1956 | 2426 | 2853 | 3244 | 3605 | 3941 | 4255 | 4551 | 4831 | 5096 | 5349 | 5591 | 5823 | 6046 | 5 | 2.0 | 1.5 |
| 56 | 2120 | 5283 | 7096 | 8373 | 9361 | 0167 | 0849 | 1441 | 1964 | 2434 | 2859 | 3250 | 3611 | 3946 | 4260 | 4556 | 4835 | 5101 | 5353 | 5595 | 5827 | 6050 | 6 | 2.4 | 1.8 |
| 57 | 2196 | 5321 | 7121 | 8392 | 9376 | 0180 | 0860 | 1450 | 1973 | 2441 | 2866 | 3256 | 3616 | 3952 | 4265 | 4561 | 4840 | 5105 | 5357 | 5599 | 5830 | 6053 | 7 | 2.8 | 2.1 |
| 58 | 2272 | 5358 | 7145 | 8410 | 9390 | 0192 | 0871 | 1460 | 1981 | 2448 | 2873 | 3262 | 3622 | 3957 | 4270 | 4565 | 4844 | 5109 | 5362 | 5603 | 5834 | 6057 | 8 | 3.2 | 2.4 |
| 59 | 2346 | 5394 | 7170 | 8428 | 9405 | 0204 | 0881 | 1469 | 1989 | 2456 | 2880 | 3269 | 3628 | 3962 | 4275 | 4570 | 4849 | 5113 | 5366 | 5607 | 5838 | 6060 | 9 | 3.6 | 2.7 |
| | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | | | |

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 6064 | 6279 | 6486 | 6687 | 6882 | 7072 | 7257 | 7438 | 7614 | 7788 | 7958 | 8125 | 8290 | 8452 | 8613 | 8771 | 8928 | 9084 | 9238 | 9392 | 9544 | 9697 | 9848 | 4 |
| 1 | 6068 | 6282 | 6489 | 6690 | 6885 | 7075 | 7260 | 7441 | 7617 | 7791 | 7961 | 8128 | 8293 | 8455 | 8615 | 8774 | 8931 | 9086 | 9241 | 9394 | 9547 | 9699 | 9851 | 1 0.4 |
| 2 | 6071 | 6286 | 6493 | 6693 | 6888 | 7078 | 7263 | 7443 | 7620 | 7793 | 7964 | 8131 | 8295 | 8458 | 8618 | 8776 | 8933 | 9089 | 9243 | 9397 | 9549 | 9702 | 9853 | 2 0.8 |
| 3 | 6075 | 6289 | 6496 | 6697 | 6891 | 7081 | 7266 | 7446 | 7623 | 7796 | 7966 | 8133 | 8298 | 8460 | 8621 | 8779 | 8936 | 9091 | 9246 | 9399 | 9552 | 9704 | 9856 | 3 1.2 |
| 4 | 6079 | 6293 | 6499 | 6700 | 6895 | 7084 | 7269 | 7449 | 7626 | 7799 | 7969 | 8136 | 8301 | 8463 | 8623 | 8782 | 8939 | 9094 | 9248 | 9402 | 9555 | 9707 | 9858 | 4 1.6 |
| 5 | 6082 | 6296 | 6503 | 6703 | 6898 | 7087 | 7272 | 7452 | 7629 | 7802 | 7972 | 8139 | 8303 | 8466 | 8626 | 8784 | 8941 | 9097 | 9251 | 9404 | 9557 | 9709 | 9861 | 5 2.0 |
| 6 | 6086 | 6300 | 6506 | 6706 | 6901 | 7090 | 7275 | 7455 | 7632 | 7805 | 7975 | 8142 | 8306 | 8468 | 8629 | 8787 | 8944 | 9099 | 9254 | 9407 | 9560 | 9712 | 9864 | 6 2.4 |
| 7 | 6090 | 6303 | 6510 | 6710 | 6904 | 7093 | 7278 | 7458 | 7635 | 7808 | 7978 | 8145 | 8309 | 8471 | 8631 | 8790 | 8946 | 9102 | 9256 | 9409 | 9562 | 9714 | 9866 | 7 2.8 |
| 8 | 6093 | 6307 | 6513 | 6713 | 6907 | 7097 | 7281 | 7461 | 7638 | 7811 | 7980 | 8147 | 8312 | 8474 | 8634 | 8792 | 8949 | 9104 | 9259 | 9412 | 9565 | 9717 | 9869 | 8 3.2 |
| 9 | 6097 | 6310 | 6516 | 6716 | 6911 | 7100 | 7284 | 7464 | 7641 | 7813 | 7983 | 8150 | 8314 | 8476 | 8637 | 8795 | 8952 | 9107 | 9261 | 9415 | 9567 | 9719 | 9871 | 9 3.6 |
| 10 | 6100 | 6314 | 6520 | 6720 | 6914 | 7103 | 7287 | 7467 | 7644 | 7816 | 7986 | 8153 | 8317 | 8479 | 8639 | 8797 | 8954 | 9110 | 9264 | 9417 | 9570 | 9722 | 9874 | |
| 11 | 6104 | 6317 | 6523 | 6723 | 6917 | 7106 | 7290 | 7470 | 7646 | 7819 | 7989 | 8156 | 8320 | 8482 | 8642 | 8800 | 8957 | 9112 | 9266 | 9420 | 9572 | 9724 | 9876 | |
| 12 | 6108 | 6321 | 6527 | 6726 | 6920 | 7109 | 7293 | 7473 | 7649 | 7822 | 7992 | 8158 | 8323 | 8484 | 8644 | 8803 | 8959 | 9115 | 9269 | 9422 | 9575 | 9727 | 9879 | |
| 13 | 6111 | 6324 | 6530 | 6729 | 6923 | 7112 | 7296 | 7476 | 7652 | 7825 | 7994 | 8161 | 8325 | 8487 | 8647 | 8805 | 8962 | 9117 | 9271 | 9425 | 9577 | 9729 | 9881 | |
| 14 | 6115 | 6328 | 6533 | 6733 | 6927 | 7115 | 7299 | 7479 | 7655 | 7828 | 7997 | 8164 | 8328 | 8490 | 8650 | 8808 | 8965 | 9120 | 9274 | 9427 | 9580 | 9732 | 9884 | |
| 15 | 6118 | 6331 | 6537 | 6736 | 6930 | 7118 | 7302 | 7482 | 7658 | 7831 | 8000 | 8167 | 8331 | 8493 | 8652 | 8811 | 8967 | 9122 | 9277 | 9430 | 9582 | 9735 | 9886 | |
| 16 | 6122 | 6334 | 6540 | 6739 | 6933 | 7121 | 7305 | 7485 | 7661 | 7833 | 8003 | 8169 | 8333 | 8495 | 8655 | 8813 | 8970 | 9125 | 9279 | 9432 | 9585 | 9737 | 9889 | |
| 17 | 6126 | 6338 | 6543 | 6743 | 6936 | 7125 | 7308 | 7488 | 7664 | 7836 | 8006 | 8172 | 8336 | 8498 | 8658 | 8816 | 8972 | 9128 | 9282 | 9435 | 9588 | 9740 | 9891 | |
| 18 | 6129 | 6341 | 6547 | 6746 | 6939 | 7128 | 7311 | 7491 | 7667 | 7839 | 8008 | 8175 | 8339 | 8501 | 8660 | 8818 | 8975 | 9130 | 9284 | 9438 | 9590 | 9742 | 9894 | |
| 19 | 6133 | 6345 | 6550 | 6749 | 6942 | 7131 | 7314 | 7494 | 7670 | 7842 | 8011 | 8178 | 8342 | 8503 | 8663 | 8821 | 8978 | 9133 | 9287 | 9440 | 9593 | 9745 | 9896 | |
| 20 | 6136 | 6348 | 6553 | 6752 | 6946 | 7134 | 7317 | 7497 | 7673 | 7845 | 8014 | 8180 | 8344 | 8506 | 8666 | 8824 | 8980 | 9135 | 9289 | 9443 | 9595 | 9747 | 9899 | 3 |
| 21 | 6140 | 6352 | 6557 | 6756 | 6949 | 7137 | 7320 | 7500 | 7675 | 7848 | 8017 | 8183 | 8347 | 8509 | 8668 | 8826 | 8983 | 9138 | 9292 | 9445 | 9598 | 9750 | 9901 | 1 0.3 |
| 22 | 6144 | 6355 | 6560 | 6759 | 6952 | 7140 | 7324 | 7503 | 7678 | 7850 | 8020 | 8186 | 8350 | 8511 | 8671 | 8829 | 8985 | 9140 | 9295 | 9448 | 9600 | 9752 | 9904 | 2 0.6 |
| 23 | 6147 | 6359 | 6564 | 6762 | 6955 | 7143 | 7327 | 7506 | 7681 | 7853 | 8022 | 8189 | 8352 | 8514 | 8674 | 8831 | 8988 | 9143 | 9297 | 9450 | 9603 | 9755 | 9907 | 3 0.9 |
| 24 | 6151 | 6362 | 6567 | 6765 | 6958 | 7146 | 7330 | 7509 | 7684 | 7856 | 8025 | 8191 | 8355 | 8517 | 8676 | 8834 | 8990 | 9146 | 9300 | 9453 | 9605 | 9757 | 9909 | 4 1.2 |
| 25 | 6154 | 6366 | 6570 | 6769 | 6962 | 7149 | 7333 | 7512 | 7687 | 7859 | 8028 | 8194 | 8358 | 8519 | 8679 | 8837 | 8993 | 9148 | 9302 | 9455 | 9608 | 9760 | 9912 | 5 1.5 |
| 26 | 6158 | 6369 | 6574 | 6772 | 6965 | 7152 | 7336 | 7515 | 7690 | 7862 | 8031 | 8197 | 8361 | 8522 | 8682 | 8839 | 8996 | 9151 | 9305 | 9458 | 9610 | 9762 | 9914 | 6 1.8 |
| 27 | 6162 | 6373 | 6577 | 6775 | 6968 | 7156 | 7339 | 7518 | 7693 | 7865 | 8034 | 8200 | 8363 | 8525 | 8684 | 8842 | 8998 | 9153 | 9307 | 9460 | 9613 | 9765 | 9917 | 7 2.1 |
| 28 | 6165 | 6376 | 6580 | 6778 | 6971 | 7159 | 7342 | 7521 | 7696 | 7868 | 8036 | 8202 | 8366 | 8527 | 8687 | 8845 | 9001 | 9156 | 9310 | 9463 | 9615 | 9767 | 9919 | 8 2.4 |
| 29 | 6169 | 6380 | 6584 | 6782 | 6974 | 7162 | 7345 | 7523 | 7699 | 7870 | 8039 | 8205 | 8369 | 8530 | 8689 | 8847 | 9003 | 9158 | 9312 | 9466 | 9618 | 9770 | 9922 | 9 2.7 |
| | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | |

| ′ | 22° | 23° | 24° | 25° | 26° | 27° | 28° | 29° | 30° | 31° | 32° | 33° | 34° | 35° | 36° | 37° | 38° | 39° | 40° | 41° | 42° | 43° | 44° | P.P. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 30 | 6172 | 6383 | 6587 | 6785 | 6977 | 7165 | 7348 | 7526 | 7701 | 7873 | 8042 | 8208 | 8371 | 8533 | 8692 | 8850 | 9006 | 9161 | 9315 | 9468 | 9621 | 9773 | 9924 | |
| 31 | 6176 | 6386 | 6590 | 6788 | 6981 | 7168 | 7351 | 7529 | 7704 | 7876 | 8045 | 8211 | 8374 | 8535 | 8695 | 8852 | 9009 | 9164 | 9318 | 9471 | 9623 | 9775 | 9927 | |
| 32 | 6179 | 6390 | 6594 | 6791 | 6984 | 7171 | 7354 | 7532 | 7707 | 7879 | 8047 | 8213 | 8377 | 8538 | 8697 | 8855 | 9011 | 9166 | 9320 | 9473 | 9626 | 9778 | 9929 | |
| 33 | 6183 | 6393 | 6597 | 6795 | 6987 | 7174 | 7357 | 7535 | 7710 | 7882 | 8050 | 8216 | 8379 | 8541 | 8700 | 8858 | 9014 | 9169 | 9323 | 9476 | 9628 | 9780 | 9932 | |
| 34 | 6187 | 6397 | 6600 | 6798 | 6990 | 7177 | 7360 | 7538 | 7713 | 7885 | 8053 | 8219 | 8382 | 8543 | 8703 | 8860 | 9016 | 9171 | 9325 | 9478 | 9631 | 9783 | 9934 | |
| 35 | 6190 | 6400 | 6604 | 6801 | 6993 | 7180 | 7363 | 7541 | 7716 | 7887 | 8056 | 8222 | 8385 | 8546 | 8705 | 8863 | 9019 | 9174 | 9328 | 9481 | 9633 | 9785 | 9937 | |
| 36 | 6194 | 6404 | 6607 | 6804 | 6996 | 7183 | 7366 | 7544 | 7719 | 7890 | 8059 | 8224 | 8388 | 8549 | 8708 | 8865 | 9022 | 9176 | 9330 | 9483 | 9636 | 9788 | 9939 | |
| 37 | 6197 | 6407 | 6610 | 6808 | 6999 | 7186 | 7369 | 7547 | 7722 | 7893 | 8061 | 8227 | 8390 | 8551 | 8711 | 8868 | 9024 | 9179 | 9333 | 9486 | 9638 | 9790 | 9942 | |
| 38 | 6201 | 6411 | 6614 | 6811 | 7003 | 7189 | 7372 | 7550 | 7725 | 7896 | 8064 | 8230 | 8393 | 8554 | 8713 | 8871 | 9027 | 9182 | 9335 | 9488 | 9641 | 9793 | 9944 | |
| 39 | 6204 | 6414 | 6617 | 6814 | 7006 | 7192 | 7375 | 7553 | 7727 | 7899 | 8067 | 8233 | 8396 | 8557 | 8716 | 8873 | 9029 | 9184 | 9338 | 9491 | 9643 | 9795 | 9947 | |
| 40 | 6208 | 6417 | 6620 | 6817 | 7009 | 7196 | 7378 | 7556 | 7730 | 7902 | 8070 | 8235 | 8398 | 8559 | 8718 | 8876 | 9032 | 9187 | 9341 | 9494 | 9646 | 9798 | 9949 | 2 |
| 41 | 6211 | 6421 | 6624 | 6821 | 7012 | 7199 | 7381 | 7559 | 7733 | 7904 | 8072 | 8238 | 8401 | 8562 | 8721 | 8879 | 9035 | 9189 | 9343 | 9496 | 9648 | 9800 | 9952 | 1 0.2 |
| 42 | 6215 | 6424 | 6627 | 6824 | 7015 | 7202 | 7384 | 7562 | 7736 | 7907 | 8075 | 8241 | 8404 | 8565 | 8724 | 8881 | 9037 | 9192 | 9346 | 9499 | 9651 | 9803 | 9955 | 2 0.4 |
| 43 | 6219 | 6428 | 6630 | 6827 | 7018 | 7205 | 7387 | 7565 | 7739 | 7910 | 8078 | 8243 | 8406 | 8567 | 8726 | 8884 | 9040 | 9194 | 9348 | 9501 | 9653 | 9805 | 9957 | 3 0.6 |
| 44 | 6222 | 6431 | 6634 | 6830 | 7022 | 7208 | 7390 | 7568 | 7742 | 7913 | 8081 | 8246 | 8409 | 8570 | 8729 | 8886 | 9042 | 9197 | 9351 | 9504 | 9656 | 9808 | 9960 | 4 0.8 |
| 45 | 6226 | 6435 | 6637 | 6834 | 7025 | 7211 | 7393 | 7571 | 7745 | 7916 | 8084 | 8249 | 8412 | 8573 | 8732 | 8889 | 9045 | 9200 | 9353 | 9506 | 9659 | 9810 | 9962 | 5 1.0 |
| 46 | 6229 | 6438 | 6640 | 6837 | 7028 | 7214 | 7396 | 7573 | 7748 | 7918 | 8086 | 8252 | 8415 | 8575 | 8734 | 8892 | 9047 | 9202 | 9356 | 9509 | 9661 | 9813 | 9965 | 6 1.2 |
| 47 | 6233 | 6441 | 6644 | 6840 | 7031 | 7217 | 7399 | 7576 | 7750 | 7921 | 8089 | 8254 | 8417 | 8578 | 8737 | 8894 | 9050 | 9205 | 9358 | 9511 | 9664 | 9816 | 9967 | 7 1.4 |
| 48 | 6236 | 6445 | 6647 | 6843 | 7034 | 7220 | 7402 | 7579 | 7753 | 7924 | 8092 | 8257 | 8420 | 8581 | 8740 | 8897 | 9053 | 9207 | 9361 | 9514 | 9666 | 9818 | 9970 | 8 1.6 |
| 49 | 6240 | 6448 | 6650 | 6846 | 7037 | 7223 | 7405 | 7582 | 7756 | 7927 | 8095 | 8260 | 8423 | 8583 | 8742 | 8899 | 9055 | 9210 | 9364 | 9516 | 9669 | 9821 | 9972 | 9 1.8 |
| 50 | 6243 | 6452 | 6654 | 6850 | 7040 | 7226 | 7408 | 7585 | 7759 | 7930 | 8097 | 8263 | 8425 | 8586 | 8745 | 8902 | 9058 | 9212 | 9366 | 9519 | 9671 | 9823 | 9975 | |
| 51 | 6247 | 6455 | 6657 | 6853 | 7043 | 7229 | 7411 | 7588 | 7762 | 7933 | 8100 | 8265 | 8428 | 8589 | 8747 | 8905 | 9060 | 9215 | 9369 | 9522 | 9674 | 9826 | 9977 | |
| 52 | 6250 | 6459 | 6660 | 6856 | 7047 | 7232 | 7414 | 7591 | 7765 | 7935 | 8103 | 8268 | 8431 | 8591 | 8750 | 8907 | 9063 | 9218 | 9371 | 9524 | 9676 | 9828 | 9980 | |
| 53 | 6254 | 6462 | 6664 | 6859 | 7050 | 7235 | 7417 | 7594 | 7768 | 7938 | 8106 | 8271 | 8433 | 8594 | 8753 | 8910 | 9066 | 9220 | 9374 | 9527 | 9679 | 9831 | 9982 | |
| 54 | 6257 | 6465 | 6667 | 6863 | 7053 | 7238 | 7420 | 7597 | 7771 | 7941 | 8109 | 8274 | 8436 | 8597 | 8755 | 8912 | 9068 | 9223 | 9376 | 9529 | 9681 | 9833 | 9985 | |
| 55 | 6261 | 6469 | 6670 | 6866 | 7056 | 7241 | 7423 | 7600 | 7773 | 7944 | 8111 | 8276 | 8439 | 8599 | 8758 | 8915 | 9071 | 9225 | 9379 | 9532 | 9684 | 9836 | 9987 | |
| 56 | 6264 | 6472 | 6674 | 6869 | 7059 | 7245 | 7426 | 7603 | 7776 | 7947 | 8114 | 8279 | 8442 | 8602 | 8761 | 8918 | 9073 | 9228 | 9381 | 9534 | 9686 | 9838 | 9990 | |
| 57 | 6268 | 6476 | 6677 | 6872 | 7062 | 7248 | 7429 | 7606 | 7779 | 7949 | 8117 | 8282 | 8444 | 8605 | 8763 | 8920 | 9076 | 9230 | 9384 | 9537 | 9689 | 9841 | 9992 | |
| 58 | 6271 | 6479 | 6680 | 6875 | 7065 | 7251 | 7432 | 7609 | 7782 | 7952 | 8120 | 8284 | 8447 | 8607 | 8766 | 8923 | 9079 | 9233 | 9387 | 9539 | 9691 | 9843 | 9995 | |
| 59 | 6275 | 6482 | 6683 | 6879 | 7069 | 7254 | 7435 | 7611 | 7785 | 7955 | 8122 | 8287 | 8450 | 8610 | 8769 | 8925 | 9081 | 9236 | 9389 | 9542 | 9694 | 9846 | 9997 | |
| | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | |

# Log. Tangens 45°—67°.

| ′ | 45° | 46° | 47° | 48° | 49° | 50° | 51° | 52° | 53° | 54° | 55° | 56° | 57° | 58° | 59° | 60° | 61° | 62° | 63° | 64° | 65° | 66° | 67° | P.P. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0000 | 0152 | 0303 | 0456 | 0608 | 0762 | 0916 | 1072 | 1229 | 1387 | 1548 | 1710 | 1875 | 2042 | 2212 | 2386 | 2562 | 2743 | 2928 | 3118 | 3313 | 3514 | 3721 | 2 |
| 1 | 0003 | 0154 | 0306 | 0458 | 0611 | 0764 | 0919 | 1075 | 1231 | 1390 | 1550 | 1713 | 1878 | 2045 | 2215 | 2389 | 2565 | 2746 | 2931 | 3121 | 3317 | 3518 | 3725 | 1 0.2 |
| 2 | 0005 | 0157 | 0309 | 0461 | 0613 | 0767 | 0921 | 1077 | 1234 | 1393 | 1553 | 1716 | 1880 | 2048 | 2218 | 2391 | 2568 | 2749 | 2935 | 3125 | 3320 | 3521 | 3729 | 2 0.4 |
| 3 | 0008 | 0159 | 0311 | 0463 | 0616 | 0770 | 0924 | 1080 | 1237 | 1395 | 1556 | 1718 | 1883 | 2051 | 2221 | 2394 | 2571 | 2752 | 2938 | 3128 | 3323 | 3524 | 3732 | 3 0.6 |
| 4 | 0010 | 0162 | 0314 | 0466 | 0619 | 0772 | 0927 | 1082 | 1239 | 1398 | 1558 | 1721 | 1886 | 2053 | 2224 | 2397 | 2574 | 2755 | 2941 | 3131 | 3326 | 3528 | 3736 | 4 0.8 |
| 5 | 0013 | 0164 | 0316 | 0468 | 0621 | 0775 | 0929 | 1085 | 1242 | 1401 | 1561 | 1724 | 1889 | 2056 | 2227 | 2400 | 2577 | 2759 | 2944 | 3134 | 3330 | 3531 | 3739 | 5 1.0 |
| 6 | 0015 | 0167 | 0319 | 0471 | 0624 | 0777 | 0932 | 1088 | 1245 | 1403 | 1564 | 1726 | 1891 | 2059 | 2229 | 2403 | 2580 | 2762 | 2947 | 3137 | 3333 | 3535 | 3743 | 6 1.2 |
| 7 | 0018 | 0169 | 0321 | 0473 | 0626 | 0780 | 0934 | 1090 | 1247 | 1406 | 1567 | 1729 | 1894 | 2062 | 2232 | 2406 | 2583 | 2765 | 2950 | 3141 | 3336 | 3538 | 3746 | 7 1.4 |
| 8 | 0020 | 0172 | 0324 | 0476 | 0629 | 0782 | 0937 | 1093 | 1250 | 1409 | 1569 | 1732 | 1897 | 2065 | 2235 | 2409 | 2586 | 2768 | 2953 | 3144 | 3340 | 3541 | 3750 | 8 1.6 |
| 9 | 0023 | 0174 | 0326 | 0478 | 0631 | 0785 | 0940 | 1095 | 1253 | 1411 | 1572 | 1735 | 1900 | 2067 | 2238 | 2412 | 2589 | 2771 | 2957 | 3147 | 3343 | 3545 | 3753 | 9 1.8 |
| 10 | 0025 | 0177 | 0329 | 0481 | 0634 | 0788 | 0942 | 1098 | 1255 | 1414 | 1575 | 1737 | 1903 | 2070 | 2241 | 2415 | 2592 | 2774 | 2960 | 3150 | 3346 | 3548 | 3757 | |
| 11 | 0028 | 0179 | 0331 | 0484 | 0636 | 0790 | 0945 | 1101 | 1258 | 1417 | 1577 | 1740 | 1905 | 2073 | 2244 | 2418 | 2595 | 2777 | 2963 | 3154 | 3350 | 3552 | 3760 | |
| 12 | 0030 | 0182 | 0334 | 0486 | 0639 | 0793 | 0947 | 1103 | 1260 | 1419 | 1580 | 1743 | 1908 | 2076 | 2247 | 2421 | 2598 | 2780 | 2966 | 3157 | 3353 | 3555 | 3764 | |
| 13 | 0033 | 0184 | 0336 | 0489 | 0642 | 0795 | 0950 | 1106 | 1263 | 1422 | 1583 | 1746 | 1911 | 2079 | 2250 | 2424 | 2601 | 2783 | 2969 | 3160 | 3356 | 3559 | 3767 | |
| 14 | 0035 | 0187 | 0339 | 0491 | 0644 | 0798 | 0953 | 1108 | 1266 | 1425 | 1585 | 1748 | 1914 | 2082 | 2252 | 2427 | 2604 | 2786 | 2972 | 3163 | 3360 | 3562 | 3771 | |
| 15 | 0038 | 0190 | 0341 | 0494 | 0647 | 0800 | 0955 | 1111 | 1268 | 1427 | 1588 | 1751 | 1916 | 2084 | 2255 | 2429 | 2607 | 2789 | 2975 | 3166 | 3363 | 3565 | 3774 | |
| 16 | 0040 | 0192 | 0344 | 0496 | 0649 | 0803 | 0958 | 1114 | 1271 | 1430 | 1591 | 1754 | 1919 | 2087 | 2258 | 2432 | 2610 | 2792 | 2978 | 3170 | 3366 | 3569 | 3778 | |
| 17 | 0043 | 0195 | 0347 | 0499 | 0652 | 0806 | 0960 | 1116 | 1274 | 1433 | 1594 | 1757 | 1922 | 2090 | 2261 | 2435 | 2613 | 2795 | 2982 | 3173 | 3370 | 3572 | 3781 | |
| 18 | 0045 | 0197 | 0349 | 0501 | 0654 | 0808 | 0963 | 1119 | 1276 | 1435 | 1596 | 1759 | 1925 | 2093 | 2264 | 2438 | 2616 | 2798 | 2985 | 3176 | 3373 | 3576 | 3785 | |
| 19 | 0048 | 0200 | 0352 | 0504 | 0657 | 0811 | 0965 | 1121 | 1279 | 1438 | 1599 | 1762 | 1928 | 2096 | 2267 | 2441 | 2619 | 2801 | 2988 | 3179 | 3376 | 3579 | 3789 | |
| 20 | 0051 | 0202 | 0354 | 0506 | 0659 | 0813 | 0968 | 1124 | 1282 | 1441 | 1602 | 1765 | 1930 | 2098 | 2270 | 2444 | 2622 | 2804 | 2991 | 3183 | 3380 | 3583 | 3792 | 3 |
| 21 | 0053 | 0205 | 0357 | 0509 | 0662 | 0816 | 0971 | 1127 | 1284 | 1443 | 1604 | 1767 | 1933 | 2101 | 2273 | 2447 | 2625 | 2808 | 2994 | 3186 | 3383 | 3586 | 3796 | 1 0.3 |
| 22 | 0056 | 0207 | 0359 | 0512 | 0665 | 0818 | 0973 | 1129 | 1287 | 1446 | 1607 | 1770 | 1936 | 2104 | 2275 | 2450 | 2628 | 2811 | 2997 | 3189 | 3386 | 3589 | 3799 | 2 0.6 |
| 23 | 0058 | 0210 | 0362 | 0514 | 0667 | 0821 | 0976 | 1132 | 1289 | 1449 | 1610 | 1773 | 1939 | 2107 | 2278 | 2453 | 2631 | 2814 | 3001 | 3192 | 3390 | 3593 | 3803 | 3 0.9 |
| 24 | 0061 | 0212 | 0364 | 0517 | 0670 | 0824 | 0978 | 1135 | 1292 | 1451 | 1612 | 1776 | 1941 | 2110 | 2281 | 2456 | 2634 | 2817 | 3004 | 3196 | 3393 | 3596 | 3806 | 4 1.2 |
| 25 | 0063 | 0215 | 0367 | 0519 | 0672 | 0826 | 0981 | 1137 | 1295 | 1454 | 1615 | 1778 | 1944 | 2113 | 2284 | 2459 | 2637 | 2820 | 3007 | 3199 | 3396 | 3600 | 3810 | 5 1.5 |
| 26 | 0066 | 0217 | 0369 | 0522 | 0675 | 0829 | 0984 | 1140 | 1297 | 1457 | 1618 | 1781 | 1947 | 2115 | 2287 | 2462 | 2640 | 2823 | 3010 | 3202 | 3400 | 3603 | 3813 | 6 1.8 |
| 27 | 0068 | 0220 | 0372 | 0524 | 0677 | 0831 | 0986 | 1142 | 1300 | 1459 | 1621 | 1784 | 1950 | 2118 | 2290 | 2465 | 2643 | 2826 | 3013 | 3205 | 3403 | 3607 | 3817 | 7 2.1 |
| 28 | 0071 | 0222 | 0374 | 0527 | 0680 | 0834 | 0989 | 1145 | 1303 | 1462 | 1623 | 1787 | 1953 | 2121 | 2293 | 2468 | 2646 | 2829 | 3016 | 3209 | 3406 | 3610 | 3821 | 8 2.4 |
| 29 | 0073 | 0225 | 0377 | 0529 | 0682 | 0836 | 0991 | 1148 | 1305 | 1465 | 1626 | 1789 | 1955 | 2124 | 2296 | 2471 | 2649 | 2832 | 3019 | 3212 | 3410 | 3614 | 3824 | 9 2.7 |
| | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | |

| ′ | 45° | 46° | 47° | 48° | 49° | 50° | 51° | 52° | 53° | 54° | 55° | 56° | 57° | 58° | 59° | 60° | 61° | 62° | 63° | 64° | 65° | 66° | 67° | P.P. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 30 | 0076 | 0228 | 0379 | 0532 | 0685 | 0839 | 0994 | 1150 | 1308 | 1467 | 1629 | 1792 | 1958 | 2127 | 2299 | 2474 | 2652 | 2835 | 3023 | 3215 | 3413 | 3617 | 3828 | |
| 31 | 0078 | 0230 | 0382 | 0534 | 0688 | 0842 | 0997 | 1153 | 1311 | 1470 | 1631 | 1795 | 1961 | 2130 | 2301 | 2477 | 2655 | 2838 | 3026 | 3218 | 3416 | 3620 | 3831 | |
| 32 | 0081 | 0233 | 0385 | 0537 | 0690 | 0844 | 0999 | 1155 | 1313 | 1473 | 1634 | 1798 | 1964 | 2132 | 2304 | 2479 | 2658 | 2841 | 3029 | 3222 | 3420 | 3624 | 3835 | |
| 33 | 0083 | 0235 | 0387 | 0540 | 0693 | 0847 | 1002 | 1158 | 1316 | 1475 | 1637 | 1800 | 1966 | 2135 | 2307 | 2482 | 2661 | 2844 | 3032 | 3225 | 3423 | 3627 | 3838 | |
| 34 | 0086 | 0238 | 0390 | 0542 | 0695 | 0849 | 1004 | 1161 | 1318 | 1478 | 1639 | 1803 | 1969 | 2138 | 2310 | 2485 | 2664 | 2848 | 3035 | 3228 | 3426 | 3631 | 3842 | |
| 35 | 0088 | 0240 | 0392 | 0545 | 0698 | 0852 | 1007 | 1163 | 1321 | 1481 | 1642 | 1806 | 1972 | 2141 | 2313 | 2488 | 2667 | 2851 | 3038 | 3231 | 3430 | 3634 | 3846 | |
| 36 | 0091 | 0243 | 0395 | 0547 | 0700 | 0854 | 1010 | 1166 | 1324 | 1483 | 1645 | 1809 | 1975 | 2144 | 2316 | 2491 | 2670 | 2854 | 3042 | 3235 | 3433 | 3638 | 3849 | |
| 37 | 0093 | 0245 | 0397 | 0550 | 0703 | 0857 | 1012 | 1169 | 1326 | 1486 | 1648 | 1811 | 1978 | 2147 | 2319 | 2494 | 2673 | 2857 | 3045 | 3238 | 3436 | 3641 | 3853 | |
| 38 | 0096 | 0248 | 0400 | 0552 | 0705 | 0860 | 1015 | 1171 | 1329 | 1489 | 1650 | 1814 | 1980 | 2150 | 2322 | 2497 | 2676 | 2860 | 3048 | 3241 | 3440 | 3645 | 3856 | |
| 39 | 0099 | 0250 | 0402 | 0555 | 0708 | 0862 | 1017 | 1174 | 1332 | 1491 | 1653 | 1817 | 1983 | 2152 | 2325 | 2500 | 2680 | 2863 | 3051 | 3244 | 3443 | 3648 | 3860 | |
| 40 | 0101 | 0253 | 0405 | 0557 | 0711 | 0865 | 1020 | 1176 | 1334 | 1494 | 1656 | 1820 | 1986 | 2155 | 2327 | 2503 | 2683 | 2866 | 3054 | 3248 | 3447 | 3652 | 3864 | 4 |
| 41 | 0104 | 0255 | 0407 | 0560 | 0713 | 0867 | 1022 | 1179 | 1337 | 1497 | 1658 | 1822 | 1989 | 2158 | 2330 | 2506 | 2686 | 2869 | 3058 | 3251 | 3450 | 3655 | 3867 | 1 0.4 |
| 42 | 0106 | 0258 | 0410 | 0562 | 0716 | 0870 | 1025 | 1182 | 1340 | 1499 | 1661 | 1825 | 1992 | 2161 | 2333 | 2509 | 2689 | 2872 | 3061 | 3254 | 3453 | 3659 | 3871 | 2 0.8 |
| 43 | 0109 | 0260 | 0412 | 0565 | 0718 | 0872 | 1028 | 1184 | 1342 | 1502 | 1664 | 1828 | 1994 | 2164 | 2336 | 2512 | 2692 | 2875 | 3064 | 3257 | 3457 | 3662 | 3874 | 3 1.2 |
| 44 | 0111 | 0263 | 0415 | 0568 | 0721 | 0875 | 1030 | 1187 | 1345 | 1505 | 1667 | 1831 | 1997 | 2167 | 2339 | 2515 | 2695 | 2879 | 3067 | 3261 | 3460 | 3666 | 3878 | 4 1.6 |
| 45 | 0114 | 0265 | 0418 | 0570 | 0723 | 0878 | 1033 | 1189 | 1348 | 1507 | 1669 | 1833 | 2000 | 2169 | 2342 | 2518 | 2698 | 2882 | 3070 | 3264 | 3463 | 3669 | 3882 | 5 2.0 |
| 46 | 0116 | 0268 | 0420 | 0573 | 0726 | 0880 | 1035 | 1192 | 1350 | 1510 | 1672 | 1836 | 2003 | 2172 | 2345 | 2521 | 2701 | 2885 | 3073 | 3267 | 3467 | 3672 | 3885 | 6 2.4 |
| 47 | 0119 | 0271 | 0423 | 0575 | 0729 | 0883 | 1038 | 1195 | 1353 | 1513 | 1675 | 1839 | 2006 | 2175 | 2348 | 2524 | 2704 | 2888 | 3077 | 3271 | 3470 | 3676 | 3889 | 7 2.8 |
| 48 | 0121 | 0273 | 0425 | 0578 | 0731 | 0885 | 1041 | 1197 | 1356 | 1516 | 1677 | 1842 | 2008 | 2178 | 2351 | 2527 | 2707 | 2891 | 3080 | 3274 | 3473 | 3679 | 3892 | 8 3.2 |
| 49 | 0124 | 0276 | 0428 | 0580 | 0734 | 0888 | 1043 | 1200 | 1358 | 1518 | 1680 | 1844 | 2011 | 2181 | 2354 | 2530 | 2710 | 2894 | 3083 | 3277 | 3477 | 3683 | 3896 | 9 3.6 |
| 50 | 0126 | 0278 | 0430 | 0583 | 0736 | 0890 | 1046 | 1203 | 1361 | 1521 | 1683 | 1847 | 2014 | 2184 | 2356 | 2533 | 2713 | 2897 | 3086 | 3280 | 3480 | 3686 | 3900 | |
| 51 | 0129 | 0281 | 0433 | 0585 | 0739 | 0893 | 1048 | 1205 | 1364 | 1524 | 1686 | 1850 | 2017 | 2187 | 2359 | 2536 | 2716 | 2900 | 3089 | 3284 | 3484 | 3690 | 3903 | |
| 52 | 0131 | 0283 | 0435 | 0588 | 0741 | 0896 | 1051 | 1208 | 1366 | 1526 | 1688 | 1853 | 2020 | 2189 | 2362 | 2539 | 2719 | 2903 | 3093 | 3287 | 3487 | 3693 | 3907 | |
| 53 | 0134 | 0286 | 0438 | 0591 | 0744 | 0898 | 1054 | 1210 | 1369 | 1529 | 1691 | 1855 | 2022 | 2192 | 2365 | 2542 | 2722 | 2907 | 3096 | 3290 | 3490 | 3697 | 3910 | |
| 54 | 0136 | 0288 | 0440 | 0593 | 0746 | 0901 | 1056 | 1213 | 1371 | 1532 | 1694 | 1858 | 2025 | 2195 | 2368 | 2545 | 2725 | 2910 | 3099 | 3294 | 3494 | 3700 | 3914 | |
| 55 | 0139 | 0291 | 0443 | 0596 | 0749 | 0903 | 1059 | 1216 | 1374 | 1534 | 1697 | 1861 | 2028 | 2198 | 2371 | 2548 | 2728 | 2913 | 3102 | 3297 | 3497 | 3704 | 3918 | |
| 56 | 0142 | 0293 | 0445 | 0598 | 0752 | 0906 | 1061 | 1218 | 1377 | 1537 | 1699 | 1864 | 2031 | 2201 | 2374 | 2551 | 2731 | 2916 | 3105 | 3300 | 3501 | 3707 | 3921 | |
| 57 | 0144 | 0296 | 0448 | 0601 | 0754 | 0909 | 1064 | 1221 | 1379 | 1540 | 1702 | 1867 | 2034 | 2204 | 2377 | 2554 | 2734 | 2919 | 3109 | 3303 | 3504 | 3711 | 3925 | |
| 58 | 0147 | 0298 | 0451 | 0603 | 0757 | 0911 | 1067 | 1224 | 1382 | 1542 | 1705 | 1869 | 2036 | 2207 | 2380 | 2557 | 2737 | 2922 | 3112 | 3307 | 3507 | 3714 | 3929 | |
| 59 | 0149 | 0301 | 0453 | 0606 | 0759 | 0914 | 1069 | 1226 | 1385 | 1545 | 1707 | 1872 | 2039 | 2209 | 2383 | 2560 | 2740 | 2925 | 3115 | 3310 | 3511 | 3718 | 3932 | |
| | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | |

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **0** | 3936 | 4158 | 4389 | 4630 | 4882 | 5147 | 5425 | 5719 | 6032 | 6366 | 6725 | 7113 | 7537 | 8003 | 8522 | 9109 | 9̅784 | 0580 | 1554 | 2806 | 4569 | 7̅581 |
| 1 | 3940 | 4162 | 4393 | 4634 | 4887 | 5151 | 5430 | 5725 | 6038 | 6372 | 6731 | 7120 | 7544 | 8011 | 8531 | 9119 | 9̅796 | 0595 | 1572 | 2830 | 4606 | 7̅654 |
| 2 | 3943 | 4166 | 4397 | 4638 | 4891 | 5156 | 5435 | 5730 | 6043 | 6378 | 6738 | 7127 | 7552 | 8019 | 8540 | 9129 | 9̅808 | 0610 | 1590 | 2855 | 4642 | 7̅728 |
| 3 | 3947 | 4170 | 4401 | 4643 | 4895 | 5160 | 5439 | 5735 | 6048 | 6384 | 6744 | 7134 | 7559 | 8027 | 8550 | 9140 | 9̅820 | 0624 | 1608 | 2879 | 4679 | 7̅804 |
| 4 | 3950 | 4173 | 4405 | 4647 | 4899 | 5165 | 5444 | 5740 | 6054 | 6389 | 6750 | 7141 | 7566 | 8036 | 8559 | 9151 | 9̅833 | 0639 | 1627 | 2904 | 4717 | 7̅880 |
| 5 | 3954 | 4177 | 4409 | 4651 | 4904 | 5169 | 5449 | 5745 | 6059 | 6395 | 6756 | 7147 | 7574 | 8044 | 8568 | 9161 | 9̅845 | 0654 | 1645 | 2929 | 4754 | 7̅959 |
| 6 | 3958 | 4181 | 4413 | 4655 | 4908 | 5174 | 5454 | 5750 | 6065 | 6401 | 6763 | 7154 | 7581 | 8052 | 8577 | 9172 | 9̅857 | 0669 | 1664 | 2954 | 4792 | 8̅038 |
| 7 | 3961 | 4185 | 4417 | 4659 | 4912 | 5178 | 5459 | 5755 | 6070 | 6407 | 6769 | 7161 | 7589 | 8060 | 8587 | 9182 | 9̅870 | 0684 | 1683 | 2979 | 4830 | 8̅120 |
| 8 | 3965 | 4189 | 4421 | 4663 | 4917 | 5183 | 5463 | 5760 | 6076 | 6413 | 6775 | 7168 | 7596 | 8069 | 8596 | 9193 | 9̅882 | 0698 | 1701 | 3004 | 4869 | 8̅202 |
| 9 | 3969 | 4192 | 4425 | 4667 | 4921 | 5187 | 5468 | 5765 | 6081 | 6419 | 6781 | 7175 | 7604 | 8077 | 8605 | 9204 | 9̅895 | 0713 | 1720 | 3029 | 4908 | 8̅287 |
| **10** | 3972 | 4196 | 4429 | 4671 | 4925 | 5192 | 5473 | 5770 | 6086 | 6424 | 6788 | 7181 | 7611 | 8085 | 8615 | 9214 | 9̅907 | 0728 | 1739 | 3055 | 4947 | 8̅373 |
| 11 | 3976 | 4200 | 4433 | 4676 | 4930 | 5197 | 5478 | 5775 | 6092 | 6430 | 6794 | 7188 | 7619 | 8094 | 8624 | 9225 | 9̅920 | 0744 | 1758 | 3080 | 4987 | 8̅460 |
| 12 | 3980 | 4204 | 4437 | 4680 | 4934 | 5201 | 5483 | 5780 | 6097 | 6436 | 6800 | 7195 | 7626 | 8102 | 8633 | 9236 | 9̅932 | 0759 | 1777 | 3106 | 5027 | 8̅550 |
| 13 | 3983 | 4208 | 4441 | 4684 | 4938 | 5206 | 5487 | 5786 | 6103 | 6442 | 6807 | 7202 | 7634 | 8110 | 8643 | 9246 | 9̅945 | 0774 | 1796 | 3132 | 5067 | 8̅641 |
| 14 | 3987 | 4211 | 4445 | 4688 | 4943 | 5210 | 5492 | 5791 | 6108 | 6448 | 6813 | 7209 | 7641 | 8119 | 8652 | 9257 | 9̅957 | 0789 | 1815 | 3158 | 5108 | 8̅735 |
| 15 | 3991 | 4215 | 4449 | 4692 | 4947 | 5215 | 5497 | 5796 | 6114 | 6454 | 6819 | 7216 | 7649 | 8127 | 8662 | 9268 | 9̅970 | 0804 | 1835 | 3185 | 5149 | 8̅830 |
| 16 | 3994 | 4219 | 4453 | 4696 | 4951 | 5219 | 5502 | 5801 | 6119 | 6459 | 6826 | 7223 | 7657 | 8136 | 8671 | 9279 | 9̅983 | 0820 | 1854 | 3211 | 5191 | 8̅928 |
| 17 | 3998 | 4223 | 4457 | 4700 | 4956 | 5224 | 5507 | 5806 | 6125 | 6465 | 6832 | 7230 | 7664 | 8144 | 8681 | 9290 | 9̅995 | 0835 | 1874 | 3238 | 5233 | 9̅028 |
| 18 | 4002 | 4227 | 4461 | 4705 | 4960 | 5229 | 5512 | 5811 | 6130 | 6471 | 6838 | 7236 | 7672 | 8152 | 8690 | 9301 | 0008 | 0850 | 1893 | 3264 | 5275 | 9̅130 |
| 19 | 4005 | 4230 | 4465 | 4709 | 4965 | 5233 | 5516 | 5816 | 6136 | 6477 | 6845 | 7243 | 7679 | 8161 | 8700 | 9312 | 0021 | 0866 | 1913 | 3291 | 5318 | 9̅235 |
| **20** | 4009 | 4234 | 4469 | 4713 | 4969 | 5238 | 5521 | 5822 | 6141 | 6483 | 6851 | 7250 | 7687 | 8169 | 8709 | 9322 | 0034 | 0882 | 1933 | 3318 | 5362 | 9̅342 |
| 21 | 4013 | 4238 | 4473 | 4717 | 4973 | 5242 | 5526 | 5827 | 6147 | 6489 | 6858 | 7257 | 7695 | 8178 | 8719 | 9333 | 0047 | 0897 | 1952 | 3346 | 5405 | 9̅452 |
| 22 | 4016 | 4242 | 4476 | 4721 | 4978 | 5247 | 5531 | 5832 | 6152 | 6495 | 6864 | 7264 | 7702 | 8186 | 8728 | 9344 | 0060 | 0913 | 1972 | 3373 | 5449 | 9̅565 |
| 23 | 4020 | 4246 | 4480 | 4725 | 4982 | 5252 | 5536 | 5837 | 6158 | 6501 | 6870 | 7271 | 7710 | 8195 | 8738 | 9355 | 0072 | 0929 | 1992 | 3401 | 5494 | 9̅681 |
| 24 | 4024 | 4250 | 4484 | 4730 | 4986 | 5256 | 5541 | 5842 | 6163 | 6507 | 6877 | 7278 | 7718 | 8203 | 8748 | 9367 | 0085 | 0944 | 2012 | 3429 | 5539 | 9̅800 |
| 25 | 4028 | 4253 | 4488 | 4734 | 4991 | 5261 | 5546 | 5847 | 6169 | 6513 | 6883 | 7285 | 7725 | 8212 | 8757 | 9378 | 0099 | 0960 | 2033 | 3456 | 5584 | 9̅922 |
| 26 | 4031 | 4257 | 4492 | 4738 | 4995 | 5265 | 5551 | 5853 | 6174 | 6519 | 6890 | 7292 | 7733 | 8221 | 8767 | 9389 | 0112 | 0976 | 2053 | 3485 | 5630 | 0048 |
| 27 | 4035 | 4261 | 4496 | 4742 | 5000 | 5270 | 5555 | 5858 | 6180 | 6525 | 6896 | 7299 | 7741 | 8229 | 8777 | 9400 | 0125 | 0992 | 2073 | 3513 | 5677 | 0177 |
| 28 | 4039 | 4265 | 4500 | 4746 | 5004 | 5275 | 5560 | 5863 | 6185 | 6531 | 6902 | 7306 | 7748 | 8238 | 8786 | 9411 | 0138 | 1008 | 2094 | 3541 | 5724 | 0311 |
| 29 | 4042 | 4269 | 4505 | 4751 | 5008 | 5279 | 5565 | 5868 | 6191 | 6536 | 6909 | 7313 | 7756 | 8246 | 8796 | 9422 | 0151 | 1024 | 2114 | 3570 | 5771 | 0449 |
| | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 11 | 11 | 11 | 11 | 11 | 12 |

| | 3 | 4 |
|---|---|---|
| 1 | 0.3 | 0.4 |
| 2 | 0.6 | 0.8 |
| 3 | 0.9 | 1.2 |
| 4 | 1.2 | 1.6 |
| 5 | 1.5 | 2.0 |
| 6 | 1.8 | 2.4 |
| 7 | 2.1 | 2.8 |
| 8 | 2.4 | 3.2 |
| 9 | 2.7 | 3.6 |

| | 5 | 6 |
|---|---|---|
| 1 | 0.5 | 0.6 |
| 2 | 1.0 | 1.2 |
| 3 | 1.5 | 1.8 |
| 4 | 2.0 | 2.4 |
| 5 | 2.5 | 3.0 |
| 6 | 3.0 | 3.6 |
| 7 | 3.5 | 4.2 |
| 8 | 4.0 | 4.8 |
| 9 | 4.5 | 5.4 |

| | 7 | 8 |
|---|---|---|
| 1 | 0.7 | 0.8 |
| 2 | 1.4 | 1.6 |
| 3 | 2.1 | 2.4 |
| 4 | 2.8 | 3.2 |
| 5 | 3.5 | 4.0 |
| 6 | 4.2 | 4.8 |
| 7 | 4.9 | 5.6 |
| 8 | 5.6 | 6.4 |
| 9 | 6.3 | 7.2 |

| ′ | 68° | 69° | 70° | 71° | 72° | 73° | 74° | 75° | 76° | 77° | 78° | 79° | 80° | 81° | 82° | 83° | 84° | 85° | 86° | 87° | 88° | 89° |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **30** | 4046 | 4273 | 4509 | 4755 | 5013 | 5284 | 5570 | 5873 | 6196 | 6542 | 6915 | 7320 | 7764 | 8255 | 8806 | 9433 | 0164 | 1040 | 2135 | 3599 | 5819 | $\overline{0}$591 |
| 31 | 4050 | 4276 | 4513 | 4759 | 5017 | 5289 | 5575 | 5879 | 6202 | 6548 | 6922 | 7327 | 7772 | 8264 | 8815 | 9445 | 0177 | 1056 | 2156 | 3628 | 5868 | $\overline{0}$739 |
| 32 | 4053 | 4280 | 4517 | 4763 | 5022 | 5293 | 5580 | 5884 | 6208 | 6554 | 6928 | 7334 | 7779 | 8272 | 8825 | 9456 | 0191 | 1073 | 2177 | 3657 | 5917 | $\overline{0}$891 |
| 33 | 4057 | 4284 | 4521 | 4767 | 5026 | 5298 | 5585 | 5889 | 6213 | 6560 | 6935 | 7342 | 7787 | 8281 | 8835 | 9467 | 0204 | 1089 | 2198 | 3687 | 5967 | $\overline{1}$049 |
| 34 | 4061 | 4288 | 4525 | 4772 | 5030 | 5303 | 5590 | 5894 | 6219 | 6566 | 6941 | 7349 | 7795 | 8290 | 8845 | 9479 | 0218 | 1105 | 2219 | 3717 | 6017 | $\overline{1}$213 |
| 35 | 4065 | 4292 | 4529 | 4776 | 5035 | 5307 | 5595 | 5900 | 6224 | 6572 | 6948 | 7356 | 7803 | 8298 | 8855 | 9490 | 0231 | 1122 | 2240 | 3746 | 6068 | $\overline{1}$383 |
| 36 | 4068 | 4296 | 4533 | 4780 | 5039 | 5312 | 5600 | 5905 | 6230 | 6578 | 6954 | 7363 | 7811 | 8307 | 8865 | 9501 | 0244 | 1138 | 2261 | 3777 | 6119 | $\overline{1}$561 |
| 37 | 4072 | 4300 | 4537 | 4784 | 5044 | 5317 | 5605 | 5910 | 6236 | 6584 | 6961 | 7370 | 7819 | 8316 | 8875 | 9513 | 0258 | 1155 | 2283 | 3807 | 6171 | $\overline{1}$745 |
| 38 | 4076 | 4304 | 4541 | 4788 | 5048 | 5321 | 5610 | 5915 | 6241 | 6591 | 6967 | 7377 | 7826 | 8325 | 8884 | 9524 | 0271 | 1171 | 2304 | 3837 | 6224 | $\overline{1}$938 |
| 39 | 4079 | 4307 | 4545 | 4793 | 5053 | 5326 | 5614 | 5921 | 6247 | 6597 | 6974 | 7384 | 7834 | 8333 | 8894 | 9536 | 0285 | 1188 | 2326 | 3868 | 6277 | $\overline{2}$140 |
| **40** | 4083 | 4311 | 4549 | 4797 | 5057 | 5331 | 5619 | 5926 | 6252 | 6603 | 6980 | 7391 | 7842 | 8342 | 8904 | 9547 | 0299 | 1205 | 2348 | 3899 | 6331 | $\overline{2}$352 |
| 41 | 4087 | 4315 | 4553 | 4801 | 5061 | 5335 | 5624 | 5931 | 6258 | 6609 | 6987 | 7399 | 7850 | 8351 | 8914 | 9559 | 0312 | 1222 | 2369 | 3930 | 6386 | $\overline{2}$575 |
| 42 | 4091 | 4319 | 4557 | 4805 | 5066 | 5340 | 5629 | 5936 | 6264 | 6615 | 6994 | 7406 | 7858 | 8360 | 8924 | 9570 | 0326 | 1238 | 2391 | 3962 | 6441 | $\overline{2}$810 |
| 43 | 4094 | 4323 | 4561 | 4810 | 5070 | 5345 | 5634 | 5942 | 6269 | 6621 | 7000 | 7413 | 7866 | 8369 | 8934 | 9582 | 0340 | 1255 | 2413 | 3993 | 6497 | $\overline{3}$058 |
| 44 | 4098 | 4327 | 4565 | 4814 | 5075 | 5349 | 5639 | 5947 | 6275 | 6627 | 7007 | 7420 | 7874 | 8378 | 8945 | 9593 | 0354 | 1272 | 2435 | 4025 | 6554 | $\overline{3}$322 |
| 45 | 4102 | 4331 | 4569 | 4818 | 5079 | 5354 | 5644 | 5952 | 6281 | 6633 | 7013 | 7427 | 7882 | 8387 | 8955 | 9605 | 0367 | 1289 | 2458 | 4057 | 6611 | $\overline{3}$602 |
| 46 | 4106 | 4335 | 4573 | 4822 | 5084 | 5359 | 5649 | 5958 | 6286 | 6639 | 7020 | 7435 | 7890 | 8395 | 8965 | 9617 | 0381 | 1306 | 2480 | 4089 | 6670 | $\overline{3}$901 |
| 47 | 4109 | 4338 | 4577 | 4827 | 5088 | 5363 | 5654 | 5963 | 6292 | 6645 | 7027 | 7442 | 7898 | 8404 | 8975 | 9629 | 0395 | 1324 | 2503 | 4122 | 6729 | $\overline{4}$223 |
| 48 | 4113 | 4342 | 4581 | 4831 | 5093 | 5368 | 5659 | 5968 | 6298 | 6651 | 7033 | 7449 | 7906 | 8413 | 8985 | 9640 | 0409 | 1341 | 2525 | 4155 | 6789 | $\overline{4}$571 |
| 49 | 4117 | 4346 | 4585 | 4835 | 5097 | 5373 | 5664 | 5973 | 6303 | 6657 | 7040 | 7456 | 7914 | 8422 | 8995 | 9652 | 0423 | 1358 | 2548 | 4188 | 6850 | $\overline{4}$949 |
| **50** | 4121 | 4350 | 4589 | 4839 | 5102 | 5378 | 5669 | 5979 | 6309 | 6664 | 7047 | 7464 | 7922 | 8431 | 9005 | 9664 | 0437 | 1376 | 2571 | 4221 | 6911 | $\overline{5}$363 |
| 51 | 4124 | 4354 | 4593 | 4844 | 5106 | 5382 | 5674 | 5984 | 6315 | 6670 | 7053 | 7471 | 7930 | 8440 | 9016 | 9676 | 0451 | 1393 | 2594 | 4255 | 6974 | $\overline{5}$820 |
| 52 | 4128 | 4358 | 4597 | 4848 | 5111 | 5387 | 5679 | 5989 | 6320 | 6676 | 7060 | 7478 | 7938 | 8449 | 9026 | 9688 | 0466 | 1411 | 2617 | 4289 | 7037 | $\overline{6}$332 |
| 53 | 4132 | 4362 | 4602 | 4852 | 5115 | 5392 | 5684 | 5995 | 6326 | 6682 | 7067 | 7485 | 7946 | 8458 | 9036 | 9700 | 0480 | 1428 | 2640 | 4323 | 7101 | $\overline{6}$912 |
| 54 | 4136 | 4366 | 4606 | 4857 | 5120 | 5397 | 5689 | 6000 | 6332 | 6688 | 7073 | 7493 | 7954 | 8467 | 9046 | 9711 | 0494 | 1446 | 2663 | 4357 | 7167 | $\overline{7}$581 |
| 55 | 4139 | 4370 | 4610 | 4861 | 5124 | 5401 | 5694 | 6005 | 6338 | 6694 | 7080 | 7500 | 7962 | 8476 | 9057 | 9723 | 0508 | 1464 | 2687 | 4392 | 7233 | $\overline{8}$373 |
| 56 | 4143 | 4374 | 4614 | 4865 | 5129 | 5406 | 5699 | 6011 | 6343 | 6700 | 7087 | 7507 | 7970 | 8485 | 9067 | 9735 | 0523 | 1482 | 2710 | 4427 | 7300 | $\overline{9}$342 |
| 57 | 4147 | 4378 | 4618 | 4869 | 5133 | 5411 | 5704 | 6016 | 6349 | 6707 | 7093 | 7515 | 7978 | 8495 | 9077 | 9747 | 0537 | 1499 | 2734 | 4462 | 7369 | 0592 |
| 58 | 4151 | 4381 | 4622 | 4874 | 5138 | 5416 | 5709 | 6022 | 6355 | 6713 | 7100 | 7522 | 7987 | 8504 | 9088 | 9760 | 0551 | 1517 | 2758 | 4497 | 7438 | 2352 |
| 59 | 4154 | 4385 | 4626 | 4878 | 5142 | 5420 | 5714 | 6027 | 6361 | 6719 | 7107 | 7529 | 7995 | 8513 | 9098 | 9772 | 0566 | 1535 | 2782 | 4533 | 7509 | 5363 |

P. P.

| | 9 | 11 |
|---|---|---|
| 1 | 0.9 | 1.1 |
| 2 | 1.8 | 2.2 |
| 3 | 2.7 | 3.3 |
| 4 | 3.6 | 4.4 |
| 5 | 4.5 | 5.5 |
| 6 | 5.4 | 6.6 |
| 7 | 6.3 | 7.7 |
| 8 | 7.2 | 8.8 |
| 9 | 8.1 | 9.9 |

| | 12 | 13 |
|---|---|---|
| 1 | 1.2 | 1.3 |
| 2 | 2.4 | 2.6 |
| 3 | 3.6 | 3.9 |
| 4 | 4.8 | 5.2 |
| 5 | 6.0 | 6.5 |
| 6 | 7.2 | 7.8 |
| 7 | 8.4 | 9.1 |
| 8 | 9.6 | 10.4 |
| 9 | 10.8 | 11.7 |

| | 14 | 15 |
|---|---|---|
| 1 | 1.4 | 1.5 |
| 2 | 2.8 | 3.0 |
| 3 | 4.2 | 4.5 |
| 4 | 5.6 | 6.0 |
| 5 | 7.0 | 7.5 |
| 6 | 8.4 | 9.0 |
| 7 | 9.8 | 10.5 |
| 8 | 11.2 | 12.0 |
| 9 | 12.6 | 13.5 |

# Log. Sinus 0°—21°.

| ′ | 0° | 1° | 2° | 3° | 4° | 5° | 6° | 7° | 8° | 9° | 10° | 11° | 12° | 13° | 14° | 15° | 16° | 17° | 18° | 19° | 20° | 21° |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | −∞ | 2419 | 5428 | 7188 | 8436 | 9403 | 0192 | 0859 | 1436 | 1943 | 2397 | 2806 | 3179 | 3521 | 3837 | 4130 | 4403 | 4659 | 4900 | 5126 | 5341 | 5543 |
| 1 | 4637 | 2490 | 5464 | 7212 | 8454 | 9417 | 0204 | 0869 | 1445 | 1951 | 2404 | 2812 | 3185 | 3526 | 3842 | 4135 | 4408 | 4663 | 4904 | 5130 | 5344 | 5547 |
| 2 | 7648 | 2561 | 5500 | 7236 | 8472 | 9432 | 0216 | 0879 | 1453 | 1959 | 2411 | 2819 | 3191 | 3532 | 3847 | 4139 | 4412 | 4668 | 4908 | 5134 | 5347 | 5550 |
| 3 | 9408 | 2630 | 5535 | 7260 | 8490 | 9446 | 0228 | 0890 | 1462 | 1967 | 2418 | 2825 | 3197 | 3537 | 3852 | 4144 | 4417 | 4672 | 4911 | 5137 | 5351 | 5553 |
| 4 | 0658 | 2699 | 5571 | 7283 | 8508 | 9460 | 0240 | 0900 | 1471 | 1975 | 2425 | 2832 | 3202 | 3543 | 3857 | 4149 | 4421 | 4676 | 4915 | 5141 | 5354 | 5557 |
| 5 | 1627 | 2766 | 5605 | 7307 | 8525 | 9475 | 0252 | 0910 | 1480 | 1983 | 2432 | 2838 | 3208 | 3548 | 3862 | 4153 | 4425 | 4680 | 4919 | 5145 | 5358 | 5560 |
| 6 | 2419 | 2832 | 5640 | 7330 | 8543 | 9489 | 0264 | 0920 | 1489 | 1991 | 2439 | 2845 | 3214 | 3554 | 3867 | 4158 | 4430 | 4684 | 4923 | 5148 | 5361 | 5563 |
| 7 | 3088 | 2898 | 5674 | 7354 | 8560 | 9503 | 0276 | 0930 | 1498 | 1999 | 2447 | 2851 | 3220 | 3559 | 3872 | 4163 | 4434 | 4688 | 4927 | 5152 | 5365 | 5566 |
| 8 | 3668 | 2962 | 5708 | 7377 | 8578 | 9517 | 0287 | 0940 | 1507 | 2007 | 2454 | 2858 | 3226 | 3564 | 3877 | 4168 | 4438 | 4692 | 4931 | 5156 | 5368 | 5570 |
| 9 | 4180 | 3025 | 5742 | 7400 | 8595 | 9531 | 0299 | 0951 | 1516 | 2015 | 2461 | 2864 | 3232 | 3570 | 3882 | 4172 | 4443 | 4696 | 4935 | 5159 | 5372 | 5573 |
| 10 | 4637 | 3088 | 5776 | 7423 | 8613 | 9545 | 0311 | 0961 | 1525 | 2022 | 2468 | 2870 | 3238 | 3575 | 3887 | 4177 | 4447 | 4700 | 4939 | 5163 | 5375 | 5576 |
| 11 | 5051 | 3150 | 5809 | 7445 | 8630 | 9559 | 0323 | 0971 | 1533 | 2030 | 2475 | 2877 | 3244 | 3581 | 3892 | 4181 | 4452 | 4705 | 4942 | 5167 | 5379 | 5579 |
| 12 | 5429 | 3210 | 5842 | 7468 | 8647 | 9573 | 0334 | 0981 | 1542 | 2038 | 2482 | 2883 | 3250 | 3586 | 3897 | 4186 | 4456 | 4709 | 4946 | 5170 | 5382 | 5583 |
| 13 | 5777 | 3270 | 5875 | 7491 | 8665 | 9587 | 0346 | 0991 | 1551 | 2046 | 2489 | 2890 | 3255 | 3591 | 3902 | 4191 | 4460 | 4713 | 4950 | 5174 | 5385 | 5586 |
| 14 | 6099 | 3329 | 5907 | 7513 | 8682 | 9601 | 0357 | 1001 | 1560 | 2054 | 2496 | 2896 | 3261 | 3597 | 3907 | 4195 | 4465 | 4717 | 4954 | 5177 | 5389 | 5589 |
| 15 | 6398 | 3388 | 5939 | 7535 | 8699 | 9614 | 0369 | 1011 | 1568 | 2061 | 2503 | 2902 | 3267 | 3602 | 3912 | 4200 | 4469 | 4721 | 4958 | 5181 | 5392 | 5592 |
| 16 | 6678 | 3445 | 5972 | 7557 | 8716 | 9628 | 0380 | 1020 | 1577 | 2069 | 2510 | 2909 | 3273 | 3608 | 3917 | 4205 | 4473 | 4725 | 4962 | 5185 | 5396 | 5596 |
| 17 | 6942 | 3502 | 6003 | 7580 | 8733 | 9642 | 0392 | 1030 | 1586 | 2077 | 2517 | 2915 | 3279 | 3613 | 3922 | 4209 | 4478 | 4729 | 4965 | 5188 | 5399 | 5599 |
| 18 | 7190 | 3558 | 6035 | 7602 | 8749 | 9655 | 0403 | 1040 | 1594 | 2085 | 2524 | 2921 | 3284 | 3618 | 3927 | 4214 | 4482 | 4733 | 4969 | 5192 | 5402 | 5602 |
| 19 | 7425 | 3613 | 6066 | 7623 | 8766 | 9669 | 0415 | 1050 | 1603 | 2092 | 2531 | 2928 | 3290 | 3624 | 3932 | 4219 | 4486 | 4737 | 4973 | 5196 | 5406 | 5605 |
| 20 | 7648 | 3668 | 6097 | 7645 | 8783 | 9682 | 0426 | 1060 | 1612 | 2100 | 2538 | 2934 | 3296 | 3629 | 3937 | 4223 | 4491 | 4741 | 4977 | 5199 | 5409 | 5609 |
| 21 | 7859 | 3722 | 6128 | 7667 | 8799 | 9696 | 0438 | 1070 | 1620 | 2108 | 2545 | 2940 | 3302 | 3634 | 3942 | 4228 | 4495 | 4745 | 4981 | 5203 | 5413 | 5612 |
| 22 | 8061 | 3775 | 6159 | 7688 | 8816 | 9709 | 0449 | 1080 | 1629 | 2115 | 2551 | 2947 | 3308 | 3640 | 3947 | 4232 | 4499 | 4749 | 4984 | 5206 | 5416 | 5615 |
| 23 | 8255 | 3828 | 6189 | 7710 | 8833 | 9723 | 0460 | 1089 | 1637 | 2123 | 2558 | 2953 | 3313 | 3645 | 3952 | 4237 | 4503 | 4753 | 4988 | 5210 | 5420 | 5618 |
| 24 | 8439 | 3880 | 6220 | 7731 | 8849 | 9736 | 0472 | 1099 | 1646 | 2131 | 2565 | 2959 | 3319 | 3650 | 3957 | 4242 | 4508 | 4757 | 4992 | 5213 | 5423 | 5621 |
| 25 | 8617 | 3931 | 6250 | 7752 | 8865 | 9750 | 0483 | 1109 | 1655 | 2138 | 2572 | 2965 | 3325 | 3655 | 3961 | 4246 | 4512 | 4761 | 4996 | 5217 | 5426 | 5625 |
| 26 | 8787 | 3982 | 6279 | 7773 | 8882 | 9763 | 0494 | 1118 | 1663 | 2146 | 2579 | 2972 | 3331 | 3661 | 3966 | 4251 | 4516 | 4765 | 5000 | 5221 | 5430 | 5628 |
| 27 | 8951 | 4032 | 6309 | 7794 | 8898 | 9776 | 0505 | 1128 | 1672 | 2153 | 2586 | 2978 | 3336 | 3666 | 3971 | 4255 | 4521 | 4769 | 5003 | 5224 | 5433 | 5631 |
| 28 | 9109 | 4082 | 6339 | 7815 | 8914 | 9789 | 0516 | 1138 | 1680 | 2161 | 2593 | 2984 | 3342 | 3671 | 3976 | 4260 | 4525 | 4773 | 5007 | 5228 | 5436 | 5634 |
| 29 | 9261 | 4131 | 6368 | 7836 | 8930 | 9803 | 0527 | 1147 | 1689 | 2169 | 2600 | 2990 | 3348 | 3677 | 3981 | 4264 | 4529 | 4777 | 5011 | 5231 | 5440 | 5638 |
| | 7 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 |

P. P.

| | 15 | 14 | 13 | 12 | 11 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1.5 | 1.4 | 1.3 | 1.2 | 1.1 | 0.9 |
| 2 | 3.0 | 2.8 | 2.6 | 2.4 | 2.2 | 1.8 |
| 3 | 4.5 | 4.2 | 3.9 | 3.6 | 3.3 | 2.7 |
| 4 | 6.0 | 5.6 | 5.2 | 4.8 | 4.4 | 3.6 |
| 5 | 7.5 | 7.0 | 6.5 | 6.0 | 5.5 | 4.5 |
| 6 | 9.0 | 8.4 | 7.8 | 7.2 | 6.6 | 5.4 |
| 7 | 10.5 | 9.8 | 9.1 | 8.4 | 7.7 | 6.3 |
| 8 | 12.0 | 11.2 | 10.4 | 9.6 | 8.8 | 7.2 |
| 9 | 13.5 | 12.6 | 11.7 | 10.8 | 9.9 | 8.1 |

| ′ | 0° | 1° | 2° | 3° | 4° | 5° | 6° | 7° | 8° | 9° | 10° | 11° | 12° | 13° | 14° | 15° | 16° | 17° | 18° | 19° | 20° | 21° | P. P. | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 30 | 9408 | 4179 | 6397 | 7857 | 8946 | 9816 | 0539 | 1157 | 1697 | 2176 | 2606 | 2997 | 3353 | 3682 | 3986 | 4269 | 4533 | 4781 | 5015 | 5235 | 5443 | 5641 | | 8 | 7 |
| 31 | 9551 | 4227 | 6426 | 7877 | 8962 | 9829 | 0550 | 1167 | 1705 | 2184 | 2613 | 3003 | 3359 | 3687 | 3991 | 4274 | 4538 | 4785 | 5019 | 5239 | 5447 | 5644 | 1 | 0.8 | 0.7 |
| 32 | 9689 | 4275 | 6454 | 7898 | 8978 | 9842 | 0561 | 1176 | 1714 | 2191 | 2620 | 3009 | 3365 | 3692 | 3996 | 4278 | 4542 | 4789 | 5022 | 5242 | 5450 | 5647 | 2 | 1.6 | 1.4 |
| 33 | 9822 | 4322 | 6483 | 7918 | 8994 | 9855 | 0572 | 1186 | 1722 | 2199 | 2627 | 3015 | 3370 | 3698 | 4001 | 4283 | 4546 | 4793 | 5026 | 5246 | 5453 | 5650 | 3 | 2.4 | 2.1 |
| 34 | 9952 | 4368 | 6511 | 7939 | 9010 | 9868 | 0583 | 1195 | 1731 | 2206 | 2634 | 3021 | 3376 | 3703 | 4005 | 4287 | 4550 | 4797 | 5030 | 5249 | 5457 | 5654 | 4 | 3.2 | 2.8 |
| 35 | 0078 | 4414 | 6539 | 7959 | 9026 | 9881 | 0594 | 1205 | 1739 | 2214 | 2640 | 3027 | 3382 | 3708 | 4010 | 4292 | 4555 | 4801 | 5034 | 5253 | 5460 | 5657 | 5 | 4.0 | 3.5 |
| 36 | 0200 | 4459 | 6567 | 7979 | 9042 | 9894 | 0605 | 1214 | 1747 | 2221 | 2647 | 3034 | 3387 | 3713 | 4015 | 4296 | 4559 | 4805 | 5037 | 5256 | 5463 | 5660 | 6 | 4.8 | 4.2 |
| 37 | 0319 | 4504 | 6595 | 7999 | 9057 | 9907 | 0616 | 1224 | 1756 | 2229 | 2654 | 3040 | 3393 | 3719 | 4020 | 4301 | 4563 | 4809 | 5041 | 5260 | 5467 | 5663 | 7 | 5.6 | 4.9 |
| 38 | 0435 | 4549 | 6622 | 8019 | 9073 | 9919 | 0626 | 1233 | 1764 | 2236 | 2661 | 3046 | 3399 | 3724 | 4025 | 4305 | 4567 | 4813 | 5045 | 5263 | 5470 | 5666 | 8 | 6.4 | 5.6 |
| 39 | 0548 | 4593 | 6650 | 8039 | 9089 | 9932 | 0637 | 1242 | 1772 | 2243 | 2667 | 3052 | 3404 | 3729 | 4030 | 4310 | 4572 | 4817 | 5049 | 5267 | 5474 | 5670 | 9 | 7.2 | 6.3 |
| 40 | 0658 | 4637 | 6677 | 8059 | 9104 | 9945 | 0648 | 1252 | 1781 | 2251 | 2674 | 3058 | 3410 | 3734 | 4035 | 4314 | 4576 | 4821 | 5052 | 5270 | 5477 | 5673 | | 6 | 5 |
| 41 | 0765 | 4680 | 6704 | 8078 | 9119 | 9958 | 0659 | 1261 | 1789 | 2258 | 2681 | 3064 | 3416 | 3739 | 4039 | 4319 | 4580 | 4825 | 5056 | 5274 | 5480 | 5676 | 1 | 0.6 | 0.5 |
| 42 | 0870 | 4723 | 6731 | 8098 | 9135 | 9970 | 0670 | 1271 | 1797 | 2266 | 2687 | 3070 | 3421 | 3745 | 4044 | 4323 | 4584 | 4829 | 5060 | 5278 | 5484 | 5679 | 2 | 1.2 | 1.0 |
| 43 | 0972 | 4765 | 6758 | 8117 | 9150 | 9983 | 0680 | 1280 | 1806 | 2273 | 2694 | 3077 | 3427 | 3750 | 4049 | 4328 | 4588 | 4833 | 5064 | 5281 | 5487 | 5682 | 3 | 1.8 | 1.5 |
| 44 | 1072 | 4807 | 6784 | 8137 | 9166 | 9996 | 0691 | 1289 | 1814 | 2280 | 2701 | 3083 | 3432 | 3755 | 4054 | 4332 | 4593 | 4837 | 5067 | 5285 | 5490 | 5685 | 4 | 2.4 | 2.0 |
| 45 | 1170 | 4848 | 6810 | 8156 | 9181 | 0008 | 0702 | 1299 | 1822 | 2288 | 2707 | 3089 | 3438 | 3760 | 4059 | 4337 | 4597 | 4841 | 5071 | 5288 | 5494 | 5689 | 5 | 3.0 | 2.5 |
| 46 | 1265 | 4890 | 6837 | 8175 | 9196 | 0021 | 0712 | 1308 | 1830 | 2295 | 2714 | 3095 | 3444 | 3765 | 4063 | 4341 | 4601 | 4845 | 5075 | 5292 | 5497 | 5692 | 6 | 3.6 | 3.0 |
| 47 | 1359 | 4930 | 6863 | 8194 | 9211 | 0033 | 0723 | 1317 | 1838 | 2303 | 2721 | 3101 | 3449 | 3770 | 4068 | 4346 | 4605 | 4849 | 5078 | 5295 | 5500 | 5695 | 7 | 4.2 | 3.5 |
| 48 | 1450 | 4971 | 6889 | 8213 | 9226 | 0046 | 0734 | 1326 | 1847 | 2310 | 2727 | 3107 | 3455 | 3775 | 4073 | 4350 | 4609 | 4853 | 5082 | 5299 | 5504 | 5698 | 8 | 4.8 | 4.0 |
| 49 | 1540 | 5011 | 6914 | 8232 | 9241 | 0058 | 0744 | 1336 | 1855 | 2317 | 2734 | 3113 | 3460 | 3781 | 4078 | 4355 | 4614 | 4857 | 5086 | 5302 | 5507 | 5701 | 9 | 5.4 | 4.5 |
| 50 | 1627 | 5050 | 6940 | 8251 | 9256 | 0070 | 0755 | 1345 | 1863 | 2324 | 2740 | 3119 | 3466 | 3786 | 4083 | 4359 | 4618 | 4861 | 5090 | 5306 | 5510 | 5704 | | 4 | 3 |
| 51 | 1713 | 5090 | 6965 | 8270 | 9271 | 0083 | 0765 | 1354 | 1871 | 2332 | 2747 | 3125 | 3471 | 3791 | 4087 | 4364 | 4622 | 4865 | 5093 | 5309 | 5514 | 5708 | 1 | 0.4 | 0.3 |
| 52 | 1798 | 5129 | 6991 | 8289 | 9286 | 0095 | 0776 | 1363 | 1879 | 2339 | 2754 | 3131 | 3477 | 3796 | 4092 | 4368 | 4626 | 4869 | 5097 | 5313 | 5517 | 5711 | 2 | 0.8 | 0.6 |
| 53 | 1880 | 5167 | 7016 | 8307 | 9301 | 0107 | 0786 | 1372 | 1887 | 2346 | 2760 | 3137 | 3482 | 3801 | 4097 | 4372 | 4630 | 4873 | 5101 | 5316 | 5520 | 5714 | 3 | 1.2 | 0.9 |
| 54 | 1962 | 5206 | 7041 | 8326 | 9315 | 0120 | 0797 | 1381 | 1895 | 2353 | 2767 | 3143 | 3488 | 3806 | 4102 | 4377 | 4634 | 4876 | 5104 | 5320 | 5523 | 5717 | 4 | 1.6 | 1.2 |
| 55 | 2041 | 5243 | 7066 | 8345 | 9330 | 0132 | 0807 | 1390 | 1903 | 2361 | 2773 | 3149 | 3493 | 3811 | 4106 | 4381 | 4639 | 4880 | 5108 | 5323 | 5527 | 5720 | 5 | 2.0 | 1.5 |
| 56 | 2120 | 5281 | 7090 | 8363 | 9345 | 0144 | 0818 | 1399 | 1911 | 2368 | 2780 | 3155 | 3499 | 3816 | 4111 | 4386 | 4643 | 4884 | 5112 | 5327 | 5530 | 5723 | 6 | 2.4 | 1.8 |
| 57 | 2196 | 5318 | 7115 | 8381 | 9359 | 0156 | 0828 | 1409 | 1919 | 2375 | 2786 | 3161 | 3504 | 3822 | 4116 | 4390 | 4647 | 4888 | 5115 | 5330 | 5533 | 5726 | 7 | 2.8 | 2.1 |
| 58 | 2272 | 5355 | 7140 | 8400 | 9374 | 0168 | 0838 | 1418 | 1927 | 2382 | 2793 | 3167 | 3510 | 3827 | 4121 | 4395 | 4651 | 4892 | 5119 | 5334 | 5537 | 5729 | 8 | 3.2 | 2.4 |
| 59 | 2346 | 5392 | 7164 | 8418 | 9388 | 0180 | 0849 | 1427 | 1935 | 2390 | 2799 | 3173 | 3515 | 3832 | 4125 | 4399 | 4655 | 4896 | 5123 | 5337 | 5540 | 5733 | 9 | 3.6 | 2.7 |
| | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | | | |

# Log. Tangens 0⁰—21⁰.

| ′ | 0⁰ | 1⁰ | 2⁰ | 3⁰ | 4⁰ | 5⁰ | 6⁰ | 7⁰ | 8⁰ | 9⁰ | 10⁰ | 11⁰ | 12⁰ | 13⁰ | 14⁰ | 15⁰ | 16⁰ | 17⁰ | 18⁰ | 19⁰ | 20⁰ | 21⁰ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | −∞ | 2419 | 5431 | 7194 | 8446 | 9420 | 0216 | 0891 | 1478 | 1997 | 2463 | 2887 | 3275 | 3634 | 3968 | 4281 | 4575 | 4853 | 5118 | 5370 | 5611 | 5842 |
| 1 | 4637 | 2491 | 5467 | 7218 | 8465 | 9434 | 0228 | 0902 | 1487 | 2005 | 2471 | 2893 | 3281 | 3639 | 3973 | 4286 | 4580 | 4858 | 5122 | 5374 | 5615 | 5846 |
| 2 | 7648 | 2562 | 5503 | 7242 | 8483 | 9449 | 0240 | 0912 | 1496 | 2013 | 2478 | 2900 | 3287 | 3645 | 3978 | 4291 | 4584 | 4862 | 5126 | 5378 | 5619 | 5849 |
| 3 | 9408 | 2631 | 5538 | 7266 | 8501 | 9463 | 0253 | 0923 | 1505 | 2022 | 2485 | 2907 | 3293 | 3651 | 3984 | 4296 | 4589 | 4867 | 5131 | 5382 | 5622 | 5853 |
| 4 | 0658 | 2700 | 5573 | 7290 | 8518 | 9477 | 0265 | 0933 | 1515 | 2030 | 2493 | 2913 | 3300 | 3657 | 3989 | 4301 | 4594 | 4871 | 5135 | 5386 | 5626 | 5857 |
| 5 | 1627 | 2767 | 5608 | 7313 | 8536 | 9492 | 0277 | 0943 | 1524 | 2038 | 2500 | 2920 | 3306 | 3662 | 3995 | 4306 | 4599 | 4876 | 5139 | 5390 | 5630 | 5861 |
| 6 | 2419 | 2833 | 5643 | 7337 | 8554 | 9506 | 0289 | 0954 | 1533 | 2046 | 2507 | 2927 | 3312 | 3668 | 4000 | 4311 | 4603 | 4880 | 5143 | 5394 | 5634 | 5864 |
| 7 | 3088 | 2899 | 5677 | 7360 | 8572 | 9520 | 0300 | 0964 | 1542 | 2054 | 2515 | 2934 | 3318 | 3674 | 4005 | 4316 | 4608 | 4885 | 5148 | 5398 | 5638 | 5868 |
| 8 | 3668 | 2963 | 5711 | 7383 | 8589 | 9534 | 0312 | 0974 | 1551 | 2062 | 2522 | 2940 | 3324 | 3680 | 4011 | 4321 | 4613 | 4889 | 5152 | 5402 | 5642 | 5872 |
| 9 | 4180 | 3026 | 5745 | 7406 | 8607 | 9549 | 0324 | 0984 | 1560 | 2070 | 2529 | 2947 | 3330 | 3685 | 4016 | 4326 | 4618 | 4894 | 5156 | 5407 | 5646 | 5876 |
| 10 | 4637 | 3089 | 5779 | 7429 | 8624 | 9563 | 0336 | 0995 | 1569 | 2078 | 2536 | 2953 | 3336 | 3691 | 4021 | 4331 | 4622 | 4898 | 5161 | 5411 | 5650 | 5879 |
| 11 | 5051 | 3150 | 5812 | 7452 | 8642 | 9577 | 0348 | 1005 | 1578 | 2086 | 2544 | 2960 | 3343 | 3697 | 4027 | 4336 | 4627 | 4903 | 5165 | 5415 | 5654 | 5883 |
| 12 | 5429 | 3211 | 5845 | 7475 | 8659 | 9591 | 0360 | 1015 | 1587 | 2094 | 2551 | 2967 | 3349 | 3702 | 4032 | 4341 | 4632 | 4907 | 5169 | 5419 | 5658 | 5887 |
| 13 | 5777 | 3271 | 5878 | 7497 | 8676 | 9605 | 0371 | 1025 | 1596 | 2102 | 2558 | 2973 | 3355 | 3708 | 4037 | 4346 | 4637 | 4912 | 5173 | 5423 | 5662 | 5891 |
| 14 | 6099 | 3330 | 5911 | 7520 | 8694 | 9619 | 0383 | 1035 | 1605 | 2110 | 2565 | 2980 | 3361 | 3714 | 4042 | 4351 | 4641 | 4916 | 5178 | 5427 | 5665 | 5894 |
| 15 | 6398 | 3389 | 5943 | 7542 | 8711 | 9633 | 0395 | 1045 | 1613 | 2118 | 2573 | 2987 | 3367 | 3719 | 4048 | 4356 | 4646 | 4921 | 5182 | 5431 | 5669 | 5898 |
| 16 | 6678 | 3446 | 5975 | 7565 | 8728 | 9646 | 0407 | 1056 | 1622 | 2126 | 2580 | 2993 | 3373 | 3725 | 4053 | 4361 | 4651 | 4925 | 5186 | 5435 | 5673 | 5902 |
| 17 | 6942 | 3503 | 6007 | 7587 | 8745 | 9660 | 0418 | 1066 | 1631 | 2134 | 2587 | 3000 | 3379 | 3731 | 4058 | 4366 | 4655 | 4930 | 5190 | 5439 | 5677 | 5906 |
| 18 | 7190 | 3559 | 6038 | 7609 | 8762 | 9674 | 0430 | 1076 | 1640 | 2142 | 2594 | 3006 | 3385 | 3736 | 4064 | 4371 | 4660 | 4934 | 5195 | 5443 | 5681 | 5909 |
| 19 | 7425 | 3614 | 6070 | 7631 | 8778 | 9688 | 0441 | 1086 | 1649 | 2150 | 2601 | 3013 | 3391 | 3742 | 4069 | 4376 | 4665 | 4939 | 5199 | 5447 | 5685 | 5913 |
| 20 | 7648 | 3669 | 6101 | 7652 | 8795 | 9701 | 0453 | 1096 | 1658 | 2158 | 2609 | 3020 | 3397 | 3748 | 4074 | 4381 | 4669 | 4943 | 5203 | 5451 | 5689 | 5917 |
| 21 | 7860 | 3723 | 6132 | 7674 | 8812 | 9715 | 0464 | 1106 | 1667 | 2166 | 2616 | 3026 | 3403 | 3753 | 4079 | 4386 | 4674 | 4947 | 5207 | 5455 | 5693 | 5921 |
| 22 | 8062 | 3776 | 6163 | 7696 | 8829 | 9729 | 0476 | 1116 | 1675 | 2174 | 2623 | 3033 | 3409 | 3759 | 4085 | 4390 | 4679 | 4952 | 5212 | 5459 | 5696 | 5924 |
| 23 | 8255 | 3829 | 6193 | 7717 | 8845 | 9742 | 0487 | 1125 | 1684 | 2181 | 2630 | 3039 | 3416 | 3764 | 4090 | 4395 | 4683 | 4956 | 5216 | 5463 | 5700 | 5928 |
| 24 | 8439 | 3881 | 6223 | 7739 | 8862 | 9756 | 0499 | 1135 | 1693 | 2189 | 2637 | 3046 | 3422 | 3770 | 4095 | 4400 | 4688 | 4961 | 5220 | 5467 | 5704 | 5932 |
| 25 | 8617 | 3932 | 6254 | 7760 | 8878 | 9769 | 0510 | 1145 | 1702 | 2197 | 2644 | 3052 | 3428 | 3776 | 4100 | 4405 | 4693 | 4965 | 5224 | 5471 | 5708 | 5935 |
| 26 | 8787 | 3983 | 6283 | 7781 | 8895 | 9782 | 0521 | 1155 | 1710 | 2205 | 2651 | 3059 | 3434 | 3781 | 4106 | 4410 | 4697 | 4970 | 5228 | 5475 | 5712 | 5939 |
| 27 | 8951 | 4033 | 6313 | 7802 | 8911 | 9796 | 0533 | 1165 | 1719 | 2213 | 2658 | 3065 | 3440 | 3787 | 4111 | 4415 | 4702 | 4974 | 5233 | 5479 | 5716 | 5943 |
| 28 | 9109 | 4083 | 6343 | 7823 | 8927 | 9809 | 0544 | 1175 | 1728 | 2221 | 2666 | 3072 | 3446 | 3792 | 4116 | 4420 | 4707 | 4978 | 5237 | 5483 | 5720 | 5947 |
| 29 | 9261 | 4132 | 6372 | 7844 | 8944 | 9823 | 0555 | 1185 | 1736 | 2228 | 2673 | 3078 | 3452 | 3798 | 4121 | 4425 | 4711 | 4983 | 5241 | 5487 | 5724 | 5950 |
| | 7 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 |

P. P.

| | 15 | 14 |
|---|---|---|
| 1 | 1.5 | 1.4 |
| 2 | 3.0 | 2.8 |
| 3 | 4.5 | 4.2 |
| 4 | 6.0 | 5.6 |
| 5 | 7.5 | 7.0 |
| 6 | 9.0 | 8.4 |
| 7 | 10.5 | 9.8 |
| 8 | 12.0 | 11.2 |
| 9 | 13.5 | 12.6 |

| | 13 | 12 |
|---|---|---|
| 1 | 1.3 | 1.2 |
| 2 | 2.6 | 2.4 |
| 3 | 3.9 | 3.6 |
| 4 | 5.2 | 4.8 |
| 5 | 6.5 | 6.0 |
| 6 | 7.8 | 7.2 |
| 7 | 9.1 | 8.4 |
| 8 | 10.4 | 9.6 |
| 9 | 11.7 | 10.8 |

| | 11 | 9 |
|---|---|---|
| 1 | 1.1 | 0.9 |
| 2 | 2.2 | 1.8 |
| 3 | 3.3 | 2.7 |
| 4 | 4.4 | 3.6 |
| 5 | 5.5 | 4.5 |
| 6 | 6.6 | 5.4 |
| 7 | 7.7 | 6.3 |
| 8 | 8.8 | 7.2 |
| 9 | 9.9 | 8.1 |

| 00 | 10 | 20 | 30 | 40 | 50 | 60 | 70 | 80 | 90 | 100 | 110 | 120 | 130 | 140 | 150 | 160 | 170 | 180 | 190 | 200 | 210 | P. P. | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 9409 | 4181 | 6401 | 7865 | 8960 | 9836 | 0567 | 1194 | 1745 | 2236 | 2680 | 3085 | 3458 | 3804 | 4127 | 4430 | 4716 | 4987 | 5245 | 5491 | 5727 | 5954 | | 8 | 7 |
| 9551 | 4229 | 6430 | 7886 | 8976 | 9849 | 0578 | 1204 | 1754 | 2244 | 2687 | 3091 | 3464 | 3809 | 4132 | 4435 | 4721 | 4992 | 5249 | 5496 | 5731 | 5958 | 1 | 0.8 | 0.7 |
| 9689 | 4276 | 6459 | 7906 | 8992 | 9862 | 0589 | 1214 | 1762 | 2252 | 2694 | 3098 | 3469 | 3815 | 4137 | 4440 | 4725 | 4996 | 5254 | 5500 | 5735 | 5961 | 2 | 1.6 | 1.4 |
| 9823 | 4323 | 6487 | 7927 | 9008 | 9875 | 0600 | 1223 | 1771 | 2259 | 2701 | 3104 | 3475 | 3820 | 4142 | 4445 | 4730 | 5000 | 5258 | 5504 | 5739 | 5965 | 3 | 2.4 | 2.1 |
| 9952 | 4370 | 6515 | 7947 | 9024 | 9888 | 0611 | 1233 | 1779 | 2267 | 2708 | 3110 | 3481 | 3826 | 4147 | 4449 | 4735 | 5005 | 5262 | 5508 | 5743 | 5969 | 4 | 3.2 | 2.8 |
| 0078 | 4416 | 6544 | 7967 | 9040 | 9901 | 0622 | 1243 | 1788 | 2275 | 2715 | 3117 | 3487 | 3831 | 4153 | 4454 | 4739 | 5009 | 5266 | 5512 | 5747 | 5972 | 5 | 4.0 | 3.5 |
| 0200 | 4461 | 6571 | 7988 | 9056 | 9915 | 0633 | 1252 | 1797 | 2282 | 2722 | 3123 | 3493 | 3837 | 4158 | 4459 | 4744 | 5014 | 5270 | 5516 | 5750 | 5976 | 6 | 4.8 | 4.2 |
| 0319 | 4506 | 6599 | 8008 | 9071 | 9928 | 0645 | 1262 | 1805 | 2290 | 2729 | 3130 | 3499 | 3842 | 4163 | 4464 | 4748 | 5018 | 5275 | 5520 | 5754 | 5980 | 7 | 5.6 | 4.9 |
| 0435 | 4551 | 6627 | 8028 | 9087 | 9940 | 0656 | 1272 | 1814 | 2298 | 2736 | 3136 | 3505 | 3848 | 4168 | 4469 | 4753 | 5022 | 5279 | 5524 | 5758 | 5984 | 8 | 6.4 | 5.6 |
| 0548 | 4595 | 6654 | 8048 | 9103 | 9953 | 0667 | 1281 | 1822 | 2305 | 2743 | 3142 | 3511 | 3853 | 4173 | 4474 | 4758 | 5027 | 5283 | 5528 | 5762 | 5987 | 9 | 7.2 | 6.3 |
| 0658 | 4638 | 6682 | 8067 | 9118 | 9966 | 0678 | 1291 | 1831 | 2313 | 2750 | 3149 | 3517 | 3859 | 4178 | 4479 | 4762 | 5031 | 5287 | 5531 | 5766 | 5991 | | 6 | 5 |
| 0765 | 4682 | 6709 | 8087 | 9134 | 9979 | 0688 | 1300 | 1839 | 2321 | 2757 | 3155 | 3523 | 3864 | 4184 | 4484 | 4767 | 5035 | 5291 | 5535 | 5770 | 5995 | 1 | 0.6 | 0.5 |
| 0870 | 4725 | 6736 | 8107 | 9150 | 9992 | 0699 | 1310 | 1848 | 2328 | 2764 | 3162 | 3529 | 3870 | 4189 | 4488 | 4771 | 5040 | 5295 | 5539 | 5773 | 5998 | 2 | 1.2 | 1.0 |
| 0972 | 4767 | 6762 | 8126 | 9165 | 0005 | 0710 | 1319 | 1856 | 2336 | 2770 | 3168 | 3535 | 3875 | 4194 | 4493 | 4776 | 5044 | 5300 | 5543 | 5777 | 6002 | 3 | 1.8 | 1.5 |
| 1072 | 4809 | 6789 | 8146 | 9180 | 0017 | 0721 | 1329 | 1864 | 2343 | 2777 | 3174 | 3541 | 3881 | 4199 | 4498 | 4781 | 5049 | 5304 | 5547 | 5781 | 6006 | 4 | 2.4 | 2.0 |
| 1170 | 4851 | 6815 | 8165 | 9196 | 0030 | 0732 | 1338 | 1873 | 2351 | 2784 | 3181 | 3546 | 3886 | 4204 | 4503 | 4785 | 5053 | 5308 | 5551 | 5785 | 6009 | 5 | 3.0 | 2.5 |
| 1265 | 4892 | 6842 | 8185 | 9211 | 0043 | 0743 | 1348 | 1881 | 2359 | 2791 | 3187 | 3552 | 3892 | 4209 | 4508 | 4790 | 5057 | 5312 | 5555 | 5789 | 6013 | 6 | 3.6 | 3.0 |
| 1359 | 4933 | 6868 | 8204 | 9226 | 0055 | 0754 | 1357 | 1890 | 2366 | 2798 | 3193 | 3558 | 3897 | 4214 | 4513 | 4794 | 5062 | 5316 | 5559 | 5792 | 6017 | 7 | 4.2 | 3.5 |
| 1450 | 4973 | 6894 | 8223 | 9241 | 0068 | 0764 | 1367 | 1898 | 2374 | 2805 | 3200 | 3564 | 3903 | 4220 | 4517 | 4799 | 5066 | 5320 | 5563 | 5796 | 6020 | 8 | 4.8 | 4.0 |
| 1540 | 5013 | 6920 | 8242 | 9256 | 0080 | 0775 | 1376 | 1906 | 2381 | 2812 | 3206 | 3570 | 3908 | 4225 | 4522 | 4803 | 5070 | 5324 | 5567 | 5800 | 6024 | 9 | 5.4 | 4.5 |
| 1627 | 5053 | 6945 | 8261 | 9272 | 0093 | 0786 | 1385 | 1915 | 2389 | 2819 | 3212 | 3576 | 3914 | 4230 | 4527 | 4808 | 5075 | 5329 | 5571 | 5804 | 6028 | | 4 | 3 |
| 1713 | 5092 | 6971 | 8280 | 9287 | 0105 | 0796 | 1395 | 1923 | 2396 | 2825 | 3219 | 3581 | 3919 | 4235 | 4532 | 4813 | 5079 | 5333 | 5575 | 5808 | 6031 | 1 | 0.4 | 0.3 |
| 1798 | 5131 | 6996 | 8299 | 9302 | 0118 | 0807 | 1404 | 1931 | 2404 | 2832 | 3225 | 3587 | 3924 | 4240 | 4537 | 4817 | 5083 | 5337 | 5579 | 5811 | 6035 | 2 | 0.8 | 0.6 |
| 1880 | 5170 | 7021 | 8317 | 9316 | 0130 | 0818 | 1413 | 1940 | 2411 | 2839 | 3231 | 3593 | 3930 | 4245 | 4541 | 4822 | 5088 | 5341 | 5583 | 5815 | 6039 | 3 | 1.2 | 0.9 |
| 1962 | 5208 | 7046 | 8336 | 9331 | 0143 | 0828 | 1423 | 1948 | 2419 | 2846 | 3237 | 3599 | 3935 | 4250 | 4546 | 4826 | 5092 | 5345 | 5587 | 5819 | 6042 | 4 | 1.6 | 1.2 |
| 2041 | 5246 | 7071 | 8355 | 9346 | 0155 | 0839 | 1432 | 1956 | 2426 | 2853 | 3244 | 3605 | 3941 | 4255 | 4551 | 4831 | 5096 | 5349 | 5591 | 5823 | 6046 | 5 | 2.0 | 1.5 |
| 2120 | 5283 | 7096 | 8373 | 9361 | 0167 | 0849 | 1441 | 1964 | 2434 | 2859 | 3250 | 3611 | 3946 | 4260 | 4556 | 4835 | 5101 | 5353 | 5595 | 5827 | 6050 | 6 | 2.4 | 1.8 |
| 2196 | 5321 | 7121 | 8392 | 9376 | 0180 | 0860 | 1450 | 1973 | 2441 | 2866 | 3256 | 3616 | 3952 | 4265 | 4561 | 4840 | 5105 | 5357 | 5599 | 5830 | 6053 | 7 | 2.8 | 2.1 |
| 2272 | 5358 | 7145 | 8410 | 9390 | 0192 | 0871 | 1460 | 1981 | 2448 | 2873 | 3262 | 3622 | 3957 | 4270 | 4565 | 4844 | 5109 | 5362 | 5603 | 5834 | 6057 | 8 | 3.2 | 2.4 |
| 2346 | 5394 | 7170 | 8428 | 9405 | 0204 | 0881 | 1469 | 1989 | 2456 | 2880 | 3269 | 3628 | 3962 | 4275 | 4570 | 4849 | 5113 | 5366 | 5607 | 5838 | 6060 | 9 | 3.6 | 2.7 |
| 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | | | |

| ′ | 22° | 23° | 24° | 25° | 26° | 27° | 28° | 29° | 30° | 31° | 32° | 33° | 34° | 35° | 36° | 37° | 38° | 39° | 40° | 41° | 42° | 43° | 44° | P.P. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 6064 | 6279 | 6486 | 6687 | 6882 | 7072 | 7257 | 7438 | 7614 | 7788 | 7958 | 8125 | 8290 | 8452 | 8613 | 8771 | 8928 | 9084 | 9238 | 9392 | 9544 | 9697 | 9848 | 4 |
| 1 | 6068 | 6282 | 6489 | 6690 | 6885 | 7075 | 7260 | 7441 | 7617 | 7791 | 7961 | 8128 | 8293 | 8455 | 8615 | 8774 | 8931 | 9086 | 9241 | 9394 | 9547 | 9699 | 9851 | 1 0.4 |
| 2 | 6071 | 6286 | 6493 | 6693 | 6888 | 7078 | 7263 | 7443 | 7620 | 7793 | 7964 | 8131 | 8295 | 8458 | 8618 | 8776 | 8933 | 9089 | 9243 | 9397 | 9549 | 9702 | 9853 | 2 0.8 |
| 3 | 6075 | 6289 | 6496 | 6697 | 6891 | 7081 | 7266 | 7446 | 7623 | 7796 | 7966 | 8133 | 8298 | 8460 | 8621 | 8779 | 8936 | 9091 | 9246 | 9399 | 9552 | 9704 | 9856 | 3 1.2 |
| 4 | 6079 | 6293 | 6499 | 6700 | 6895 | 7084 | 7269 | 7449 | 7626 | 7799 | 7969 | 8136 | 8301 | 8463 | 8623 | 8782 | 8939 | 9094 | 9248 | 9402 | 9555 | 9707 | 9858 | 4 1.6 |
| 5 | 6082 | 6296 | 6503 | 6703 | 6898 | 7087 | 7272 | 7452 | 7629 | 7802 | 7972 | 8139 | 8303 | 8466 | 8626 | 8784 | 8941 | 9097 | 9251 | 9404 | 9557 | 9709 | 9861 | 5 2.0 |
| 6 | 6086 | 6300 | 6506 | 6706 | 6901 | 7090 | 7275 | 7455 | 7632 | 7805 | 7975 | 8142 | 8306 | 8468 | 8629 | 8787 | 8944 | 9099 | 9254 | 9407 | 9560 | 9712 | 9864 | 6 2.4 |
| 7 | 6090 | 6303 | 6510 | 6710 | 6904 | 7093 | 7278 | 7458 | 7635 | 7808 | 7978 | 8145 | 8309 | 8471 | 8631 | 8790 | 8946 | 9102 | 9256 | 9409 | 9562 | 9714 | 9866 | 7 2.8 |
| 8 | 6093 | 6307 | 6513 | 6713 | 6907 | 7097 | 7281 | 7461 | 7638 | 7811 | 7980 | 8147 | 8312 | 8474 | 8634 | 8792 | 8949 | 9104 | 9259 | 9412 | 9565 | 9717 | 9869 | 8 3.2 |
| 9 | 6097 | 6310 | 6516 | 6716 | 6911 | 7100 | 7284 | 7464 | 7641 | 7813 | 7983 | 8150 | 8314 | 8476 | 8637 | 8795 | 8952 | 9107 | 9261 | 9415 | 9567 | 9719 | 9871 | 9 3.6 |
| 10 | 6100 | 6314 | 6520 | 6720 | 6914 | 7103 | 7287 | 7467 | 7644 | 7816 | 7986 | 8153 | 8317 | 8479 | 8639 | 8797 | 8954 | 9110 | 9264 | 9417 | 9570 | 9722 | 9874 | |
| 11 | 6104 | 6317 | 6523 | 6723 | 6917 | 7106 | 7290 | 7470 | 7646 | 7819 | 7989 | 8156 | 8320 | 8482 | 8642 | 8800 | 8957 | 9112 | 9266 | 9420 | 9572 | 9724 | 9876 | |
| 12 | 6108 | 6321 | 6527 | 6726 | 6920 | 7109 | 7293 | 7473 | 7649 | 7822 | 7992 | 8158 | 8323 | 8484 | 8644 | 8803 | 8959 | 9115 | 9269 | 9422 | 9575 | 9727 | 9879 | |
| 13 | 6111 | 6324 | 6530 | 6729 | 6923 | 7112 | 7296 | 7476 | 7652 | 7825 | 7994 | 8161 | 8325 | 8487 | 8647 | 8805 | 8962 | 9117 | 9271 | 9425 | 9577 | 9729 | 9881 | |
| 14 | 6115 | 6328 | 6533 | 6733 | 6927 | 7115 | 7299 | 7479 | 7655 | 7828 | 7997 | 8164 | 8328 | 8490 | 8650 | 8808 | 8965 | 9120 | 9274 | 9427 | 9580 | 9732 | 9884 | |
| 15 | 6118 | 6331 | 6537 | 6736 | 6930 | 7118 | 7302 | 7482 | 7658 | 7831 | 8000 | 8167 | 8331 | 8493 | 8652 | 8811 | 8967 | 9122 | 9277 | 9430 | 9582 | 9735 | 9886 | |
| 16 | 6122 | 6334 | 6540 | 6739 | 6933 | 7121 | 7305 | 7485 | 7661 | 7833 | 8003 | 8169 | 8333 | 8495 | 8655 | 8813 | 8970 | 9125 | 9279 | 9432 | 9585 | 9737 | 9889 | |
| 17 | 6126 | 6338 | 6543 | 6743 | 6936 | 7125 | 7308 | 7488 | 7664 | 7836 | 8006 | 8172 | 8336 | 8498 | 8658 | 8816 | 8972 | 9128 | 9282 | 9435 | 9588 | 9740 | 9891 | |
| 18 | 6129 | 6341 | 6547 | 6746 | 6939 | 7128 | 7311 | 7491 | 7667 | 7839 | 8008 | 8175 | 8339 | 8501 | 8660 | 8818 | 8975 | 9130 | 9284 | 9438 | 9590 | 9742 | 9894 | |
| 19 | 6133 | 6345 | 6550 | 6749 | 6942 | 7131 | 7314 | 7494 | 7670 | 7842 | 8011 | 8178 | 8342 | 8503 | 8663 | 8821 | 8978 | 9133 | 9287 | 9440 | 9593 | 9745 | 9896 | |
| 20 | 6136 | 6348 | 6553 | 6752 | 6946 | 7134 | 7317 | 7497 | 7673 | 7845 | 8014 | 8180 | 8344 | 8506 | 8666 | 8824 | 8980 | 9135 | 9289 | 9443 | 9595 | 9747 | 9899 | 3 |
| 21 | 6140 | 6352 | 6557 | 6756 | 6949 | 7137 | 7320 | 7500 | 7675 | 7848 | 8017 | 8183 | 8347 | 8509 | 8668 | 8826 | 8983 | 9138 | 9292 | 9445 | 9598 | 9750 | 9901 | 1 0.3 |
| 22 | 6144 | 6355 | 6560 | 6759 | 6952 | 7140 | 7324 | 7503 | 7678 | 7850 | 8020 | 8186 | 8350 | 8511 | 8671 | 8829 | 8985 | 9140 | 9295 | 9448 | 9600 | 9752 | 9904 | 2 0.6 |
| 23 | 6147 | 6359 | 6564 | 6762 | 6955 | 7143 | 7327 | 7506 | 7681 | 7853 | 8022 | 8189 | 8352 | 8514 | 8674 | 8831 | 8988 | 9143 | 9297 | 9450 | 9603 | 9755 | 9907 | 3 0.9 |
| 24 | 6151 | 6362 | 6567 | 6765 | 6958 | 7146 | 7330 | 7509 | 7684 | 7856 | 8025 | 8191 | 8355 | 8517 | 8676 | 8834 | 8990 | 9146 | 9300 | 9453 | 9605 | 9757 | 9909 | 4 1.2 |
| 25 | 6154 | 6366 | 6570 | 6769 | 6962 | 7149 | 7333 | 7512 | 7687 | 7859 | 8028 | 8194 | 8358 | 8519 | 8679 | 8837 | 8993 | 9148 | 9302 | 9455 | 9608 | 9760 | 9912 | 5 1.5 |
| 26 | 6158 | 6369 | 6574 | 6772 | 6965 | 7152 | 7336 | 7515 | 7690 | 7862 | 8031 | 8197 | 8361 | 8522 | 8682 | 8839 | 8996 | 9151 | 9305 | 9458 | 9610 | 9762 | 9914 | 6 1.8 |
| 27 | 6162 | 6373 | 6577 | 6775 | 6968 | 7156 | 7339 | 7518 | 7693 | 7865 | 8034 | 8200 | 8363 | 8525 | 8684 | 8842 | 8998 | 9153 | 9307 | 9460 | 9613 | 9765 | 9917 | 7 2.1 |
| 28 | 6165 | 6376 | 6580 | 6778 | 6971 | 7159 | 7342 | 7521 | 7696 | 7868 | 8036 | 8202 | 8366 | 8527 | 8687 | 8845 | 9001 | 9156 | 9310 | 9463 | 9615 | 9767 | 9919 | 8 2.4 |
| 29 | 6169 | 6380 | 6584 | 6782 | 6974 | 7162 | 7345 | 7523 | 7699 | 7870 | 8039 | 8205 | 8369 | 8530 | 8689 | 8847 | 9003 | 9158 | 9312 | 9466 | 9618 | 9770 | 9922 | 9 2.7 |
| | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | |

| ′ | 22° | 23° | 24° | 25° | 26° | 27° | 28° | 29° | 30° | 31° | 32° | 33° | 34° | 35° | 36° | 37° | 38° | 39° | 40° | 41° | 42° | 43° | 44° | P.P. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 30 | 6172 | 6383 | 6587 | 6785 | 6977 | 7165 | 7348 | 7526 | 7701 | 7873 | 8042 | 8208 | 8371 | 8533 | 8692 | 8850 | 9006 | 9161 | 9315 | 9468 | 9621 | 9773 | 9924 | |
| 31 | 6176 | 6386 | 6590 | 6788 | 6981 | 7168 | 7351 | 7529 | 7704 | 7876 | 8045 | 8211 | 8374 | 8535 | 8695 | 8852 | 9009 | 9164 | 9318 | 9471 | 9623 | 9775 | 9927 | |
| 32 | 6179 | 6390 | 6594 | 6791 | 6984 | 7171 | 7354 | 7532 | 7707 | 7879 | 8047 | 8213 | 8377 | 8538 | 8697 | 8855 | 9011 | 9166 | 9320 | 9473 | 9626 | 9778 | 9929 | |
| 33 | 6183 | 6393 | 6597 | 6795 | 6987 | 7174 | 7357 | 7535 | 7710 | 7882 | 8050 | 8216 | 8379 | 8541 | 8700 | 8858 | 9014 | 9169 | 9323 | 9476 | 9628 | 9780 | 9932 | |
| 34 | 6187 | 6397 | 6600 | 6798 | 6990 | 7177 | 7360 | 7538 | 7713 | 7885 | 8053 | 8219 | 8382 | 8543 | 8703 | 8860 | 9016 | 9171 | 9325 | 9478 | 9631 | 9783 | 9934 | |
| 35 | 6190 | 6400 | 6604 | 6801 | 6993 | 7180 | 7363 | 7541 | 7716 | 7887 | 8056 | 8222 | 8385 | 8546 | 8705 | 8863 | 9019 | 9174 | 9328 | 9481 | 9633 | 9785 | 9937 | |
| 36 | 6194 | 6404 | 6607 | 6804 | 6996 | 7183 | 7366 | 7544 | 7719 | 7890 | 8059 | 8224 | 8388 | 8549 | 8708 | 8865 | 9022 | 9176 | 9330 | 9483 | 9636 | 9788 | 9939 | |
| 37 | 6197 | 6407 | 6610 | 6808 | 6999 | 7186 | 7369 | 7547 | 7722 | 7893 | 8061 | 8227 | 8390 | 8551 | 8711 | 8868 | 9024 | 9179 | 9333 | 9486 | 9638 | 9790 | 9942 | |
| 38 | 6201 | 6411 | 6614 | 6811 | 7003 | 7189 | 7372 | 7550 | 7725 | 7896 | 8064 | 8230 | 8393 | 8554 | 8713 | 8871 | 9027 | 9182 | 9335 | 9488 | 9641 | 9793 | 9944 | |
| 39 | 6204 | 6414 | 6617 | 6814 | 7006 | 7192 | 7375 | 7553 | 7727 | 7899 | 8067 | 8233 | 8396 | 8557 | 8716 | 8873 | 9029 | 9184 | 9338 | 9491 | 9643 | 9795 | 9947 | |
| 40 | 6208 | 6417 | 6620 | 6817 | 7009 | 7196 | 7378 | 7556 | 7730 | 7902 | 8070 | 8235 | 8398 | 8559 | 8718 | 8876 | 9032 | 9187 | 9341 | 9494 | 9646 | 9798 | 9949 | 2 |
| 41 | 6211 | 6421 | 6624 | 6821 | 7012 | 7199 | 7381 | 7559 | 7733 | 7904 | 8072 | 8238 | 8401 | 8562 | 8721 | 8879 | 9035 | 9189 | 9343 | 9496 | 9648 | 9800 | 9952 | 1 0.2 |
| 42 | 6215 | 6424 | 6627 | 6824 | 7015 | 7202 | 7384 | 7562 | 7736 | 7907 | 8075 | 8241 | 8404 | 8565 | 8724 | 8881 | 9037 | 9192 | 9346 | 9499 | 9651 | 9803 | 9955 | 2 0.4 |
| 43 | 6219 | 6428 | 6630 | 6827 | 7018 | 7205 | 7387 | 7565 | 7739 | 7910 | 8078 | 8243 | 8406 | 8567 | 8726 | 8884 | 9040 | 9194 | 9348 | 9501 | 9653 | 9805 | 9957 | 3 0.6 |
| 44 | 6222 | 6431 | 6634 | 6830 | 7022 | 7208 | 7390 | 7568 | 7742 | 7913 | 8081 | 8246 | 8409 | 8570 | 8729 | 8886 | 9042 | 9197 | 9351 | 9504 | 9656 | 9808 | 9960 | 4 0.8 |
| 45 | 6226 | 6435 | 6637 | 6834 | 7025 | 7211 | 7393 | 7571 | 7745 | 7916 | 8084 | 8249 | 8412 | 8573 | 8732 | 8889 | 9045 | 9200 | 9353 | 9506 | 9659 | 9810 | 9962 | 5 1.0 |
| 46 | 6229 | 6438 | 6640 | 6837 | 7028 | 7214 | 7396 | 7573 | 7748 | 7918 | 8086 | 8252 | 8415 | 8575 | 8734 | 8892 | 9047 | 9202 | 9356 | 9509 | 9661 | 9813 | 9965 | 6 1.2 |
| 47 | 6233 | 6441 | 6644 | 6840 | 7031 | 7217 | 7399 | 7576 | 7750 | 7921 | 8089 | 8254 | 8417 | 8578 | 8737 | 8894 | 9050 | 9205 | 9358 | 9511 | 9664 | 9816 | 9967 | 7 1.4 |
| 48 | 6236 | 6445 | 6647 | 6843 | 7034 | 7220 | 7402 | 7579 | 7753 | 7924 | 8092 | 8257 | 8420 | 8581 | 8740 | 8897 | 9053 | 9207 | 9361 | 9514 | 9666 | 9818 | 9970 | 8 1.6 |
| 49 | 6240 | 6448 | 6650 | 6846 | 7037 | 7223 | 7405 | 7582 | 7756 | 7927 | 8095 | 8260 | 8423 | 8583 | 8742 | 8899 | 9055 | 9210 | 9364 | 9516 | 9669 | 9821 | 9972 | 9 1.8 |
| 50 | 6243 | 6452 | 6654 | 6850 | 7040 | 7226 | 7408 | 7585 | 7759 | 7930 | 8097 | 8263 | 8425 | 8586 | 8745 | 8902 | 9058 | 9212 | 9366 | 9519 | 9671 | 9823 | 9975 | |
| 51 | 6247 | 6455 | 6657 | 6853 | 7043 | 7229 | 7411 | 7588 | 7762 | 7933 | 8100 | 8265 | 8428 | 8589 | 8747 | 8905 | 9060 | 9215 | 9369 | 9522 | 9674 | 9826 | 9977 | |
| 52 | 6250 | 6459 | 6660 | 6856 | 7047 | 7232 | 7414 | 7591 | 7765 | 7935 | 8103 | 8268 | 8431 | 8591 | 8750 | 8907 | 9063 | 9218 | 9371 | 9524 | 9676 | 9828 | 9980 | |
| 53 | 6254 | 6462 | 6664 | 6859 | 7050 | 7235 | 7417 | 7594 | 7768 | 7938 | 8106 | 8271 | 8433 | 8594 | 8753 | 8910 | 9066 | 9220 | 9374 | 9527 | 9679 | 9831 | 9982 | |
| 54 | 6257 | 6465 | 6667 | 6863 | 7053 | 7238 | 7420 | 7597 | 7771 | 7941 | 8109 | 8274 | 8436 | 8597 | 8755 | 8912 | 9068 | 9223 | 9376 | 9529 | 9681 | 9833 | 9985 | |
| 55 | 6261 | 6469 | 6670 | 6866 | 7056 | 7241 | 7423 | 7600 | 7773 | 7944 | 8111 | 8276 | 8439 | 8599 | 8758 | 8915 | 9071 | 9225 | 9379 | 9532 | 9684 | 9836 | 9987 | |
| 56 | 6264 | 6472 | 6674 | 6869 | 7059 | 7245 | 7426 | 7603 | 7776 | 7947 | 8114 | 8279 | 8442 | 8602 | 8761 | 8918 | 9073 | 9228 | 9381 | 9534 | 9686 | 9838 | 9990 | |
| 57 | 6268 | 6476 | 6677 | 6872 | 7062 | 7248 | 7429 | 7606 | 7779 | 7949 | 8117 | 8282 | 8444 | 8605 | 8763 | 8920 | 9076 | 9230 | 9384 | 9537 | 9689 | 9841 | 9992 | |
| 58 | 6271 | 6479 | 6680 | 6875 | 7065 | 7251 | 7432 | 7609 | 7782 | 7952 | 8120 | 8284 | 8447 | 8607 | 8766 | 8923 | 9079 | 9233 | 9387 | 9539 | 9691 | 9843 | 9995 | |
| 59 | 6275 | 6482 | 6683 | 6879 | 7069 | 7254 | 7435 | 7611 | 7785 | 7955 | 8122 | 8287 | 8450 | 8610 | 8769 | 8925 | 9081 | 9236 | 9389 | 9542 | 9694 | 9846 | 9997 | |

| ′ | 45° | 46° | 47° | 48° | 49° | 50° | 51° | 52° | 53° | 54° | 55° | 56° | 57° | 58° | 59° | 60° | 61° | 62° | 63° | 64° | 65° | 66° | 67° | P.P. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0000 | 0152 | 0303 | 0456 | 0608 | 0762 | 0916 | 1072 | 1229 | 1387 | 1548 | 1710 | 1875 | 2042 | 2212 | 2386 | 2562 | 2743 | 2928 | 3118 | 3313 | 3514 | 3721 | 2 |
| 1 | 0003 | 0154 | 0306 | 0458 | 0611 | 0764 | 0919 | 1075 | 1231 | 1390 | 1550 | 1713 | 1878 | 2045 | 2215 | 2389 | 2565 | 2746 | 2931 | 3121 | 3317 | 3518 | 3725 | 1 0.2 |
| 2 | 0005 | 0157 | 0309 | 0461 | 0613 | 0767 | 0921 | 1077 | 1234 | 1393 | 1553 | 1716 | 1880 | 2048 | 2218 | 2391 | 2568 | 2749 | 2935 | 3125 | 3320 | 3521 | 3729 | 2 0.4 |
| 3 | 0008 | 0159 | 0311 | 0463 | 0616 | 0770 | 0924 | 1080 | 1237 | 1395 | 1556 | 1718 | 1883 | 2051 | 2221 | 2394 | 2571 | 2752 | 2938 | 3128 | 3323 | 3524 | 3732 | 3 0.6 |
| 4 | 0010 | 0162 | 0314 | 0466 | 0619 | 0772 | 0927 | 1082 | 1239 | 1398 | 1558 | 1721 | 1886 | 2053 | 2224 | 2397 | 2574 | 2755 | 2941 | 3131 | 3326 | 3528 | 3736 | 4 0.8 |
| 5 | 0013 | 0164 | 0316 | 0468 | 0621 | 0775 | 0929 | 1085 | 1242 | 1401 | 1561 | 1724 | 1889 | 2056 | 2227 | 2400 | 2577 | 2759 | 2944 | 3134 | 3330 | 3531 | 3739 | 5 1.0 |
| 6 | 0015 | 0167 | 0319 | 0471 | 0624 | 0777 | 0932 | 1088 | 1245 | 1403 | 1564 | 1726 | 1891 | 2059 | 2229 | 2403 | 2580 | 2762 | 2947 | 3137 | 3333 | 3535 | 3743 | 6 1.2 |
| 7 | 0018 | 0169 | 0321 | 0473 | 0626 | 0780 | 0934 | 1090 | 1247 | 1406 | 1567 | 1729 | 1894 | 2062 | 2232 | 2406 | 2583 | 2765 | 2950 | 3141 | 3336 | 3538 | 3746 | 7 1.4 |
| 8 | 0020 | 0172 | 0324 | 0476 | 0629 | 0782 | 0937 | 1093 | 1250 | 1409 | 1569 | 1732 | 1897 | 2065 | 2235 | 2409 | 2586 | 2768 | 2953 | 3144 | 3340 | 3541 | 3750 | 8 1.6 |
| 9 | 0023 | 0174 | 0326 | 0478 | 0631 | 0785 | 0940 | 1095 | 1253 | 1411 | 1572 | 1735 | 1900 | 2067 | 2238 | 2412 | 2589 | 2771 | 2957 | 3147 | 3343 | 3545 | 3753 | 9 1.8 |
| 10 | 0025 | 0177 | 0329 | 0481 | 0634 | 0788 | 0942 | 1098 | 1255 | 1414 | 1575 | 1737 | 1903 | 2070 | 2241 | 2415 | 2592 | 2774 | 2960 | 3150 | 3346 | 3548 | 3757 | |
| 11 | 0028 | 0179 | 0331 | 0484 | 0636 | 0790 | 0945 | 1101 | 1258 | 1417 | 1577 | 1740 | 1905 | 2073 | 2244 | 2418 | 2595 | 2777 | 2963 | 3154 | 3350 | 3552 | 3760 | |
| 12 | 0030 | 0182 | 0334 | 0486 | 0639 | 0793 | 0947 | 1103 | 1260 | 1419 | 1580 | 1743 | 1908 | 2076 | 2247 | 2421 | 2598 | 2780 | 2966 | 3157 | 3353 | 3555 | 3764 | |
| 13 | 0033 | 0184 | 0336 | 0489 | 0642 | 0795 | 0950 | 1106 | 1263 | 1422 | 1583 | 1746 | 1911 | 2079 | 2250 | 2424 | 2601 | 2783 | 2969 | 3160 | 3356 | 3559 | 3767 | |
| 14 | 0035 | 0187 | 0339 | 0491 | 0644 | 0798 | 0953 | 1108 | 1266 | 1425 | 1585 | 1748 | 1914 | 2082 | 2252 | 2427 | 2604 | 2786 | 2972 | 3163 | 3360 | 3562 | 3771 | |
| 15 | 0038 | 0190 | 0341 | 0494 | 0647 | 0800 | 0955 | 1111 | 1268 | 1427 | 1588 | 1751 | 1916 | 2084 | 2255 | 2429 | 2607 | 2789 | 2975 | 3166 | 3363 | 3565 | 3774 | |
| 16 | 0040 | 0192 | 0344 | 0496 | 0649 | 0803 | 0958 | 1114 | 1271 | 1430 | 1591 | 1754 | 1919 | 2087 | 2258 | 2432 | 2610 | 2792 | 2978 | 3170 | 3366 | 3569 | 3778 | |
| 17 | 0043 | 0195 | 0347 | 0499 | 0652 | 0806 | 0960 | 1116 | 1274 | 1433 | 1594 | 1757 | 1922 | 2090 | 2261 | 2435 | 2613 | 2795 | 2982 | 3173 | 3370 | 3572 | 3781 | |
| 18 | 0045 | 0197 | 0349 | 0501 | 0654 | 0808 | 0963 | 1119 | 1276 | 1435 | 1596 | 1759 | 1925 | 2093 | 2264 | 2438 | 2616 | 2798 | 2985 | 3176 | 3373 | 3576 | 3785 | |
| 19 | 0048 | 0200 | 0352 | 0504 | 0657 | 0811 | 0965 | 1121 | 1279 | 1438 | 1599 | 1762 | 1928 | 2096 | 2267 | 2441 | 2619 | 2801 | 2988 | 3179 | 3376 | 3579 | 3789 | |
| 20 | 0051 | 0202 | 0354 | 0506 | 0659 | 0813 | 0968 | 1124 | 1282 | 1441 | 1602 | 1765 | 1930 | 2098 | 2270 | 2444 | 2622 | 2804 | 2991 | 3183 | 3380 | 3583 | 3792 | 3 |
| 21 | 0053 | 0205 | 0357 | 0509 | 0662 | 0816 | 0971 | 1127 | 1284 | 1443 | 1604 | 1767 | 1933 | 2101 | 2273 | 2447 | 2625 | 2808 | 2994 | 3186 | 3383 | 3586 | 3796 | 1 0.3 |
| 22 | 0056 | 0207 | 0359 | 0512 | 0665 | 0818 | 0973 | 1129 | 1287 | 1446 | 1607 | 1770 | 1936 | 2104 | 2275 | 2450 | 2628 | 2811 | 2997 | 3189 | 3386 | 3589 | 3799 | 2 0.6 |
| 23 | 0058 | 0210 | 0362 | 0514 | 0667 | 0821 | 0976 | 1132 | 1289 | 1449 | 1610 | 1773 | 1939 | 2107 | 2278 | 2453 | 2631 | 2814 | 3001 | 3192 | 3390 | 3593 | 3803 | 3 0.9 |
| 24 | 0061 | 0212 | 0364 | 0517 | 0670 | 0824 | 0978 | 1135 | 1292 | 1451 | 1612 | 1776 | 1941 | 2110 | 2281 | 2456 | 2634 | 2817 | 3004 | 3196 | 3393 | 3596 | 3806 | 4 1.2 |
| 25 | 0063 | 0215 | 0367 | 0519 | 0672 | 0826 | 0981 | 1137 | 1295 | 1454 | 1615 | 1778 | 1944 | 2113 | 2284 | 2459 | 2637 | 2820 | 3007 | 3199 | 3396 | 3600 | 3810 | 5 1.5 |
| 26 | 0066 | 0217 | 0369 | 0522 | 0675 | 0829 | 0984 | 1140 | 1297 | 1457 | 1618 | 1781 | 1947 | 2115 | 2287 | 2462 | 2640 | 2823 | 3010 | 3202 | 3400 | 3603 | 3813 | 6 1.8 |
| 27 | 0068 | 0220 | 0372 | 0524 | 0677 | 0831 | 0986 | 1142 | 1300 | 1459 | 1621 | 1784 | 1950 | 2118 | 2290 | 2465 | 2643 | 2826 | 3013 | 3205 | 3403 | 3607 | 3817 | 7 2.1 |
| 28 | 0071 | 0222 | 0374 | 0527 | 0680 | 0834 | 0989 | 1145 | 1303 | 1462 | 1623 | 1787 | 1953 | 2121 | 2293 | 2468 | 2646 | 2829 | 3016 | 3209 | 3406 | 3610 | 3821 | 8 2.4 |
| 29 | 0073 | 0225 | 0377 | 0529 | 0682 | 0836 | 0991 | 1148 | 1305 | 1465 | 1626 | 1789 | 1955 | 2124 | 2296 | 2471 | 2649 | 2832 | 3019 | 3212 | 3410 | 3614 | 3824 | 9 2.7 |
| | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | |

| ′ | 45° | 46° | 47° | 48° | 49° | 50° | 51° | 52° | 53° | 54° | 55° | 56° | 57° | 58° | 59° | 60° | 61° | 62° | 63° | 64° | 65° | 66° | 67° | P. P. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **30** | 0076 | 0228 | 0379 | 0532 | 0685 | 0839 | 0994 | 1150 | 1308 | 1467 | 1629 | 1792 | 1958 | 2127 | 2299 | 2474 | 2652 | 2835 | 3023 | 3215 | 3413 | 3617 | 3828 | |
| 31 | 0078 | 0230 | 0382 | 0534 | 0688 | 0842 | 0997 | 1153 | 1311 | 1470 | 1631 | 1795 | 1961 | 2130 | 2301 | 2477 | 2655 | 2838 | 3026 | 3218 | 3416 | 3620 | 3831 | |
| 32 | 0081 | 0233 | 0385 | 0537 | 0690 | 0844 | 0999 | 1155 | 1313 | 1473 | 1634 | 1798 | 1964 | 2132 | 2304 | 2479 | 2658 | 2841 | 3029 | 3222 | 3420 | 3624 | 3835 | |
| 33 | 0083 | 0235 | 0387 | 0540 | 0693 | 0847 | 1002 | 1158 | 1316 | 1475 | 1637 | 1800 | 1966 | 2135 | 2307 | 2482 | 2661 | 2844 | 3032 | 3225 | 3423 | 3627 | 3838 | |
| 34 | 0086 | 0238 | 0390 | 0542 | 0695 | 0849 | 1004 | 1161 | 1318 | 1478 | 1639 | 1803 | 1969 | 2138 | 2310 | 2485 | 2664 | 2848 | 3035 | 3228 | 3426 | 3631 | 3842 | |
| 35 | 0088 | 0240 | 0392 | 0545 | 0698 | 0852 | 1007 | 1163 | 1321 | 1481 | 1642 | 1806 | 1972 | 2141 | 2313 | 2488 | 2667 | 2851 | 3038 | 3231 | 3430 | 3634 | 3846 | |
| 36 | 0091 | 0243 | 0395 | 0547 | 0700 | 0854 | 1010 | 1166 | 1324 | 1483 | 1645 | 1809 | 1975 | 2144 | 2316 | 2491 | 2670 | 2854 | 3042 | 3235 | 3433 | 3638 | 3849 | |
| 37 | 0093 | 0245 | 0397 | 0550 | 0703 | 0857 | 1012 | 1169 | 1326 | 1486 | 1648 | 1811 | 1978 | 2147 | 2319 | 2494 | 2673 | 2857 | 3045 | 3238 | 3436 | 3641 | 3853 | |
| 38 | 0096 | 0248 | 0400 | 0552 | 0705 | 0860 | 1015 | 1171 | 1329 | 1489 | 1650 | 1814 | 1980 | 2150 | 2322 | 2497 | 2676 | 2860 | 3048 | 3241 | 3440 | 3645 | 3856 | |
| 39 | 0099 | 0250 | 0402 | 0555 | 0708 | 0862 | 1017 | 1174 | 1332 | 1491 | 1653 | 1817 | 1983 | 2152 | 2325 | 2500 | 2680 | 2863 | 3051 | 3244 | 3443 | 3648 | 3860 | |
| **40** | 0101 | 0253 | 0405 | 0557 | 0711 | 0865 | 1020 | 1176 | 1334 | 1494 | 1656 | 1820 | 1986 | 2155 | 2327 | 2503 | 2683 | 2866 | 3054 | 3248 | 3447 | 3652 | 3864 | 4 |
| 41 | 0104 | 0255 | 0407 | 0560 | 0713 | 0867 | 1022 | 1179 | 1337 | 1497 | 1658 | 1822 | 1989 | 2158 | 2330 | 2506 | 2686 | 2869 | 3058 | 3251 | 3450 | 3655 | 3867 | 1 0.4 |
| 42 | 0106 | 0258 | 0410 | 0562 | 0716 | 0870 | 1025 | 1182 | 1340 | 1499 | 1661 | 1825 | 1992 | 2161 | 2333 | 2509 | 2689 | 2872 | 3061 | 3254 | 3453 | 3659 | 3871 | 2 0.8 |
| 43 | 0109 | 0260 | 0412 | 0565 | 0718 | 0872 | 1028 | 1184 | 1342 | 1502 | 1664 | 1828 | 1994 | 2164 | 2336 | 2512 | 2692 | 2875 | 3064 | 3257 | 3457 | 3662 | 3874 | 3 1.2 |
| 44 | 0111 | 0263 | 0415 | 0568 | 0721 | 0875 | 1030 | 1187 | 1345 | 1505 | 1667 | 1831 | 1997 | 2167 | 2339 | 2515 | 2695 | 2879 | 3067 | 3261 | 3460 | 3666 | 3878 | 4 1.6 |
| 45 | 0114 | 0265 | 0418 | 0570 | 0723 | 0878 | 1033 | 1189 | 1348 | 1507 | 1669 | 1833 | 2000 | 2169 | 2342 | 2518 | 2698 | 2882 | 3070 | 3264 | 3463 | 3669 | 3882 | 5 2.0 |
| 46 | 0116 | 0268 | 0420 | 0573 | 0726 | 0880 | 1035 | 1192 | 1350 | 1510 | 1672 | 1836 | 2003 | 2172 | 2345 | 2521 | 2701 | 2885 | 3073 | 3267 | 3467 | 3672 | 3885 | 6 2.4 |
| 47 | 0119 | 0271 | 0423 | 0575 | 0729 | 0883 | 1038 | 1195 | 1353 | 1513 | 1675 | 1839 | 2006 | 2175 | 2348 | 2524 | 2704 | 2888 | 3077 | 3271 | 3470 | 3676 | 3889 | 7 2.8 |
| 48 | 0121 | 0273 | 0425 | 0578 | 0731 | 0885 | 1041 | 1197 | 1356 | 1516 | 1677 | 1842 | 2008 | 2178 | 2351 | 2527 | 2707 | 2891 | 3080 | 3274 | 3473 | 3679 | 3892 | 8 3.2 |
| 49 | 0124 | 0276 | 0428 | 0580 | 0734 | 0888 | 1043 | 1200 | 1358 | 1518 | 1680 | 1844 | 2011 | 2181 | 2354 | 2530 | 2710 | 2894 | 3083 | 3277 | 3477 | 3683 | 3896 | 9 3.6 |
| **50** | 0126 | 0278 | 0430 | 0583 | 0736 | 0890 | 1046 | 1203 | 1361 | 1521 | 1683 | 1847 | 2014 | 2184 | 2356 | 2533 | 2713 | 2897 | 3086 | 3280 | 3480 | 3686 | 3900 | |
| 51 | 0129 | 0281 | 0433 | 0585 | 0739 | 0893 | 1048 | 1205 | 1364 | 1524 | 1686 | 1850 | 2017 | 2187 | 2359 | 2536 | 2716 | 2900 | 3089 | 3284 | 3484 | 3690 | 3903 | |
| 52 | 0131 | 0283 | 0435 | 0588 | 0741 | 0896 | 1051 | 1208 | 1366 | 1526 | 1688 | 1853 | 2020 | 2189 | 2362 | 2539 | 2719 | 2903 | 3093 | 3287 | 3487 | 3693 | 3907 | |
| 53 | 0134 | 0286 | 0438 | 0591 | 0744 | 0898 | 1054 | 1210 | 1369 | 1529 | 1691 | 1855 | 2022 | 2192 | 2365 | 2542 | 2722 | 2907 | 3096 | 3290 | 3490 | 3697 | 3910 | |
| 54 | 0136 | 0288 | 0440 | 0593 | 0746 | 0901 | 1056 | 1213 | 1371 | 1532 | 1694 | 1858 | 2025 | 2195 | 2368 | 2545 | 2725 | 2910 | 3099 | 3294 | 3494 | 3700 | 3914 | |
| 55 | 0139 | 0291 | 0443 | 0596 | 0749 | 0903 | 1059 | 1216 | 1374 | 1534 | 1697 | 1861 | 2028 | 2198 | 2371 | 2548 | 2728 | 2913 | 3102 | 3297 | 3497 | 3704 | 3918 | |
| 56 | 0142 | 0293 | 0445 | 0598 | 0752 | 0906 | 1061 | 1218 | 1377 | 1537 | 1699 | 1864 | 2031 | 2201 | 2374 | 2551 | 2731 | 2916 | 3105 | 3300 | 3501 | 3707 | 3921 | |
| 57 | 0144 | 0296 | 0448 | 0601 | 0754 | 0909 | 1064 | 1221 | 1379 | 1540 | 1702 | 1867 | 2034 | 2204 | 2377 | 2554 | 2734 | 2919 | 3109 | 3303 | 3504 | 3711 | 3925 | |
| 58 | 0147 | 0298 | 0451 | 0603 | 0757 | 0911 | 1067 | 1224 | 1382 | 1542 | 1705 | 1869 | 2036 | 2207 | 2380 | 2557 | 2737 | 2922 | 3112 | 3307 | 3507 | 3714 | 3929 | |
| 59 | 0149 | 0301 | 0453 | 0606 | 0759 | 0914 | 1069 | 1226 | 1385 | 1545 | 1707 | 1872 | 2039 | 2209 | 2383 | 2560 | 2740 | 2925 | 3115 | 3310 | 3511 | 3718 | 3932 | |

# Log. Tangens 68°—89°.

| ′ | 68° | 69° | 70° | 71° | 72° | 73° | 74° | 75° | 76° | 77° | 78° | 79° | 80° | 81° | 82° | 83° | 84° | 85° | 86° | 87° | 88° | 89° |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **0** | 3936 | 4158 | 4389 | 4630 | 4882 | 5147 | 5425 | 5719 | 6032 | 6366 | 6725 | 7113 | 7537 | 8003 | 8522 | 9109 | 9̅784 | 0580 | 1554 | 2806 | 4569 | 7̅581 |
| 1 | 3940 | 4162 | 4393 | 4634 | 4887 | 5151 | 5430 | 5725 | 6038 | 6372 | 6731 | 7120 | 7544 | 8011 | 8531 | 9119 | 9̅796 | 0595 | 1572 | 2830 | 4606 | 7̅654 |
| 2 | 3943 | 4166 | 4397 | 4638 | 4891 | 5156 | 5435 | 5730 | 6043 | 6378 | 6738 | 7127 | 7552 | 8019 | 8540 | 9129 | 9̅808 | 0610 | 1590 | 2855 | 4642 | 7̅728 |
| 3 | 3947 | 4170 | 4401 | 4643 | 4895 | 5160 | 5439 | 5735 | 6048 | 6384 | 6744 | 7134 | 7559 | 8027 | 8550 | 9140 | 9̅820 | 0624 | 1608 | 2879 | 4679 | 7̅804 |
| 4 | 3950 | 4173 | 4405 | 4647 | 4899 | 5165 | 5444 | 5740 | 6054 | 6389 | 6750 | 7141 | 7566 | 8036 | 8559 | 9151 | 9̅833 | 0639 | 1627 | 2904 | 4717 | 7̅880 |
| 5 | 3954 | 4177 | 4409 | 4651 | 4904 | 5169 | 5449 | 5745 | 6059 | 6395 | 6756 | 7147 | 7574 | 8044 | 8568 | 9161 | 9̅845 | 0654 | 1645 | 2929 | 4754 | 7̅959 |
| 6 | 3958 | 4181 | 4413 | 4655 | 4908 | 5174 | 5454 | 5750 | 6065 | 6401 | 6763 | 7154 | 7581 | 8052 | 8577 | 9172 | 9̅857 | 0669 | 1664 | 2954 | 4792 | 8̅038 |
| 7 | 3961 | 4185 | 4417 | 4659 | 4912 | 5178 | 5459 | 5755 | 6070 | 6407 | 6769 | 7161 | 7589 | 8060 | 8587 | 9182 | 9̅870 | 0684 | 1683 | 2979 | 4830 | 8̅120 |
| 8 | 3965 | 4189 | 4421 | 4663 | 4917 | 5183 | 5463 | 5760 | 6076 | 6413 | 6775 | 7168 | 7596 | 8069 | 8596 | 9193 | 9̅882 | 0698 | 1701 | 3004 | 4869 | 8̅202 |
| 9 | 3969 | 4192 | 4425 | 4667 | 4921 | 5187 | 5468 | 5765 | 6081 | 6419 | 6781 | 7175 | 7604 | 8077 | 8605 | 9204 | 9̅895 | 0713 | 1720 | 3029 | 4908 | 8̅287 |
| **10** | 3972 | 4196 | 4429 | 4671 | 4925 | 5192 | 5473 | 5770 | 6086 | 6424 | 6788 | 7181 | 7611 | 8085 | 8615 | 9214 | 9̅907 | 0728 | 1739 | 3055 | 4947 | 8̅373 |
| 11 | 3976 | 4200 | 4433 | 4676 | 4930 | 5197 | 5478 | 5775 | 6092 | 6430 | 6794 | 7188 | 7619 | 8094 | 8624 | 9225 | 9̅920 | 0744 | 1758 | 3080 | 4987 | 8̅460 |
| 12 | 3980 | 4204 | 4437 | 4680 | 4934 | 5201 | 5483 | 5780 | 6097 | 6436 | 6800 | 7195 | 7626 | 8102 | 8633 | 9236 | 9̅932 | 0759 | 1777 | 3106 | 5027 | 8̅550 |
| 13 | 3983 | 4208 | 4441 | 4684 | 4938 | 5206 | 5487 | 5786 | 6103 | 6442 | 6807 | 7202 | 7634 | 8110 | 8643 | 9246 | 9̅945 | 0774 | 1796 | 3132 | 5067 | 8̅641 |
| 14 | 3987 | 4211 | 4445 | 4688 | 4943 | 5210 | 5492 | 5791 | 6108 | 6448 | 6813 | 7209 | 7641 | 8119 | 8652 | 9257 | 9̅957 | 0789 | 1815 | 3158 | 5108 | 8̅735 |
| 15 | 3991 | 4215 | 4449 | 4692 | 4947 | 5215 | 5497 | 5796 | 6114 | 6454 | 6819 | 7216 | 7649 | 8127 | 8662 | 9268 | 9̅970 | 0804 | 1835 | 3185 | 5149 | 8̅830 |
| 16 | 3994 | 4219 | 4453 | 4696 | 4951 | 5219 | 5502 | 5801 | 6119 | 6459 | 6826 | 7223 | 7657 | 8136 | 8671 | 9279 | 9̅983 | 0820 | 1854 | 3211 | 5191 | 8̅928 |
| 17 | 3998 | 4223 | 4457 | 4700 | 4956 | 5224 | 5507 | 5806 | 6125 | 6465 | 6832 | 7230 | 7664 | 8144 | 8681 | 9290 | 9̅995 | 0835 | 1874 | 3238 | 5233 | 9̅028 |
| 18 | 4002 | 4227 | 4461 | 4705 | 4960 | 5229 | 5512 | 5811 | 6130 | 6471 | 6838 | 7236 | 7672 | 8152 | 8690 | 9301 | 0008 | 0850 | 1893 | 3264 | 5275 | 9̅130 |
| 19 | 4005 | 4230 | 4465 | 4709 | 4965 | 5233 | 5516 | 5816 | 6136 | 6477 | 6845 | 7243 | 7679 | 8161 | 8700 | 9312 | 0021 | 0866 | 1913 | 3291 | 5318 | 9̅235 |
| **20** | 4009 | 4234 | 4469 | 4713 | 4969 | 5238 | 5521 | 5822 | 6141 | 6483 | 6851 | 7250 | 7687 | 8169 | 8709 | 9322 | 0034 | 0882 | 1933 | 3318 | 5362 | 9̅342 |
| 21 | 4013 | 4238 | 4473 | 4717 | 4973 | 5242 | 5526 | 5827 | 6147 | 6489 | 6858 | 7257 | 7695 | 8178 | 8719 | 9333 | 0047 | 0897 | 1952 | 3346 | 5405 | 9̅452 |
| 22 | 4016 | 4242 | 4476 | 4721 | 4978 | 5247 | 5531 | 5832 | 6152 | 6495 | 6864 | 7264 | 7702 | 8186 | 8728 | 9344 | 0060 | 0913 | 1972 | 3373 | 5449 | 9̅565 |
| 23 | 4020 | 4246 | 4480 | 4725 | 4982 | 5252 | 5536 | 5837 | 6158 | 6501 | 6870 | 7271 | 7710 | 8195 | 8738 | 9355 | 0072 | 0929 | 1992 | 3401 | 5494 | 9̅681 |
| 24 | 4024 | 4250 | 4484 | 4730 | 4986 | 5256 | 5541 | 5842 | 6163 | 6507 | 6877 | 7278 | 7718 | 8203 | 8748 | 9367 | 0085 | 0944 | 2012 | 3429 | 5539 | 9̅800 |
| 25 | 4028 | 4253 | 4488 | 4734 | 4991 | 5261 | 5546 | 5847 | 6169 | 6513 | 6883 | 7285 | 7725 | 8212 | 8757 | 9378 | 0099 | 0960 | 2033 | 3456 | 5584 | 9̅922 |
| 26 | 4031 | 4257 | 4492 | 4738 | 4995 | 5265 | 5551 | 5853 | 6174 | 6519 | 6890 | 7292 | 7733 | 8221 | 8767 | 9389 | 0112 | 0976 | 2053 | 3485 | 5630 | 0048 |
| 27 | 4035 | 4261 | 4496 | 4742 | 5000 | 5270 | 5555 | 5858 | 6180 | 6525 | 6896 | 7299 | 7741 | 8229 | 8777 | 9400 | 0125 | 0992 | 2073 | 3513 | 5677 | 0177 |
| 28 | 4039 | 4265 | 4500 | 4746 | 5004 | 5275 | 5560 | 5863 | 6185 | 6531 | 6902 | 7306 | 7748 | 8238 | 8786 | 9411 | 0138 | 1008 | 2094 | 3541 | 5724 | 0311 |
| 29 | 4042 | 4269 | 4505 | 4751 | 5008 | 5279 | 5565 | 5868 | 6191 | 6536 | 6909 | 7313 | 7756 | 8246 | 8796 | 9422 | 0151 | 1024 | 2114 | 3570 | 5771 | 0449 |
| | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 11 | 11 | 11 | 11 | 11 | 12 |

P. P.

| | 3 | 4 |
|---|---|---|
| 1 | 0.3 | 0.4 |
| 2 | 0.6 | 0.8 |
| 3 | 0.9 | 1.2 |
| 4 | 1.2 | 1.6 |
| 5 | 1.5 | 2.0 |
| 6 | 1.8 | 2.4 |
| 7 | 2.1 | 2.8 |
| 8 | 2.4 | 3.2 |
| 9 | 2.7 | 3.6 |

| | 5 | 6 |
|---|---|---|
| 1 | 0.5 | 0.6 |
| 2 | 1.0 | 1.2 |
| 3 | 1.5 | 1.8 |
| 4 | 2.0 | 2.4 |
| 5 | 2.5 | 3.0 |
| 6 | 3.0 | 3.6 |
| 7 | 3.5 | 4.2 |
| 8 | 4.0 | 4.8 |
| 9 | 4.5 | 5.4 |

| | 7 | 8 |
|---|---|---|
| 1 | 0.7 | 0.8 |
| 2 | 1.4 | 1.6 |
| 3 | 2.1 | 2.4 |
| 4 | 2.8 | 3.2 |
| 5 | 3.5 | 4.0 |
| 6 | 4.2 | 4.8 |
| 7 | 4.9 | 5.6 |
| 8 | 5.6 | 6.4 |
| 9 | 6.3 | 7.2 |

| 68° | 69° | 70° | 71° | 72° | 73° | 74° | 75° | 76° | 77° | 78° | 79° | 80° | 81° | 82° | 83° | 84° | 85° | 86° | 87° | 88° | 89° |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 4046 | 4273 | 4509 | 4755 | 5013 | 5284 | 5570 | 5873 | 6196 | 6542 | 6915 | 7320 | 7764 | 8255 | 8806 | 9433 | 0164 | 1040 | 2135 | 3599 | 5819 | 0591 |
| 4050 | 4276 | 4513 | 4759 | 5017 | 5289 | 5575 | 5879 | 6202 | 6548 | 6922 | 7327 | 7772 | 8264 | 8815 | 9445 | 0177 | 1056 | 2156 | 3628 | 5868 | 0739 |
| 4053 | 4280 | 4517 | 4763 | 5022 | 5293 | 5580 | 5884 | 6208 | 6554 | 6928 | 7334 | 7779 | 8272 | 8825 | 9456 | 0191 | 1073 | 2177 | 3657 | 5917 | 0891 |
| 4057 | 4284 | 4521 | 4767 | 5026 | 5298 | 5585 | 5889 | 6213 | 6560 | 6935 | 7342 | 7787 | 8281 | 8835 | 9467 | 0204 | 1089 | 2198 | 3687 | 5967 | 1049 |
| 4061 | 4288 | 4525 | 4772 | 5030 | 5303 | 5590 | 5894 | 6219 | 6566 | 6941 | 7349 | 7795 | 8290 | 8845 | 9479 | 0218 | 1105 | 2219 | 3717 | 6017 | 1213 |
| 4065 | 4292 | 4529 | 4776 | 5035 | 5307 | 5595 | 5900 | 6224 | 6572 | 6948 | 7356 | 7803 | 8298 | 8855 | 9490 | 0231 | 1122 | 2240 | 3746 | 6068 | 1383 |
| 4068 | 4296 | 4533 | 4780 | 5039 | 5312 | 5600 | 5905 | 6230 | 6578 | 6954 | 7363 | 7811 | 8307 | 8865 | 9501 | 0244 | 1138 | 2261 | 3777 | 6119 | 1561 |
| 4072 | 4300 | 4537 | 4784 | 5044 | 5317 | 5605 | 5910 | 6236 | 6584 | 6961 | 7370 | 7819 | 8316 | 8875 | 9513 | 0258 | 1155 | 2283 | 3807 | 6171 | 1745 |
| 4076 | 4304 | 4541 | 4788 | 5048 | 5321 | 5610 | 5915 | 6241 | 6591 | 6967 | 7377 | 7826 | 8325 | 8884 | 9524 | 0271 | 1171 | 2304 | 3837 | 6224 | 1938 |
| 4079 | 4307 | 4545 | 4793 | 5053 | 5326 | 5614 | 5921 | 6247 | 6597 | 6974 | 7384 | 7834 | 8333 | 8894 | 9536 | 0285 | 1188 | 2326 | 3868 | 6277 | 2140 |
| 4083 | 4311 | 4549 | 4797 | 5057 | 5331 | 5619 | 5926 | 6252 | 6603 | 6980 | 7391 | 7842 | 8342 | 8904 | 9547 | 0299 | 1205 | 2348 | 3899 | 6331 | 2352 |
| 4087 | 4315 | 4553 | 4801 | 5061 | 5335 | 5624 | 5931 | 6258 | 6609 | 6987 | 7399 | 7850 | 8351 | 8914 | 9559 | 0312 | 1222 | 2369 | 3930 | 6386 | 2575 |
| 4091 | 4319 | 4557 | 4805 | 5066 | 5340 | 5629 | 5936 | 6264 | 6615 | 6994 | 7406 | 7858 | 8360 | 8924 | 9570 | 0326 | 1238 | 2391 | 3962 | 6441 | 2810 |
| 4094 | 4323 | 4561 | 4810 | 5070 | 5345 | 5634 | 5942 | 6269 | 6621 | 7000 | 7413 | 7866 | 8369 | 8934 | 9582 | 0340 | 1255 | 2413 | 3993 | 6497 | 3058 |
| 4098 | 4327 | 4565 | 4814 | 5075 | 5349 | 5639 | 5947 | 6275 | 6627 | 7007 | 7420 | 7874 | 8378 | 8945 | 9593 | 0354 | 1272 | 2435 | 4025 | 6554 | 3322 |
| 4102 | 4331 | 4569 | 4818 | 5079 | 5354 | 5644 | 5952 | 6281 | 6633 | 7013 | 7427 | 7882 | 8387 | 8955 | 9605 | 0367 | 1289 | 2458 | 4057 | 6611 | 3602 |
| 4106 | 4335 | 4573 | 4822 | 5084 | 5359 | 5649 | 5958 | 6286 | 6639 | 7020 | 7435 | 7890 | 8395 | 8965 | 9617 | 0381 | 1306 | 2480 | 4089 | 6670 | 3901 |
| 4109 | 4338 | 4577 | 4827 | 5088 | 5363 | 5654 | 5963 | 6292 | 6645 | 7027 | 7442 | 7898 | 8404 | 8975 | 9629 | 0395 | 1324 | 2503 | 4122 | 6729 | 4223 |
| 4113 | 4342 | 4581 | 4831 | 5093 | 5368 | 5659 | 5968 | 6298 | 6651 | 7033 | 7449 | 7906 | 8413 | 8985 | 9640 | 0409 | 1341 | 2525 | 4155 | 6789 | 4571 |
| 4117 | 4346 | 4585 | 4835 | 5097 | 5373 | 5664 | 5973 | 6303 | 6657 | 7040 | 7456 | 7914 | 8422 | 8995 | 9652 | 0423 | 1358 | 2548 | 4188 | 6850 | 4949 |
| 4121 | 4350 | 4589 | 4839 | 5102 | 5378 | 5669 | 5979 | 6309 | 6664 | 7047 | 7464 | 7922 | 8431 | 9005 | 9664 | 0437 | 1376 | 2571 | 4221 | 6911 | 5363 |
| 4124 | 4354 | 4593 | 4844 | 5106 | 5382 | 5674 | 5984 | 6315 | 6670 | 7053 | 7471 | 7930 | 8440 | 9016 | 9676 | 0451 | 1393 | 2594 | 4255 | 6974 | 5820 |
| 4128 | 4358 | 4597 | 4848 | 5111 | 5387 | 5679 | 5989 | 6320 | 6676 | 7060 | 7478 | 7938 | 8449 | 9026 | 9688 | 0466 | 1411 | 2617 | 4289 | 7037 | 6332 |
| 4132 | 4362 | 4602 | 4852 | 5115 | 5392 | 5684 | 5995 | 6326 | 6682 | 7067 | 7485 | 7946 | 8458 | 9036 | 9700 | 0480 | 1428 | 2640 | 4323 | 7101 | 6912 |
| 4136 | 4366 | 4606 | 4857 | 5120 | 5397 | 5689 | 6000 | 6332 | 6688 | 7073 | 7493 | 7954 | 8467 | 9046 | 9711 | 0494 | 1446 | 2663 | 4357 | 7167 | 7581 |
| 4139 | 4370 | 4610 | 4861 | 5124 | 5401 | 5694 | 6005 | 6338 | 6694 | 7080 | 7500 | 7962 | 8476 | 9057 | 9723 | 0508 | 1464 | 2687 | 4392 | 7233 | 8373 |
| 4143 | 4374 | 4614 | 4865 | 5129 | 5406 | 5699 | 6011 | 6343 | 6700 | 7087 | 7507 | 7970 | 8485 | 9067 | 9735 | 0523 | 1482 | 2710 | 4427 | 7300 | 9342 |
| 4147 | 4378 | 4618 | 4869 | 5133 | 5411 | 5704 | 6016 | 6349 | 6707 | 7093 | 7515 | 7978 | 8495 | 9077 | 9747 | 0537 | 1499 | 2734 | 4462 | 7369 | 0592 |
| 4151 | 4381 | 4622 | 4874 | 5138 | 5416 | 5709 | 6022 | 6355 | 6713 | 7100 | 7522 | 7987 | 8504 | 9088 | 9760 | 0551 | 1517 | 2758 | 4497 | 7438 | 2352 |
| 4154 | 4385 | 4626 | 4878 | 5142 | 5420 | 5714 | 6027 | 6361 | 6719 | 7107 | 7529 | 7995 | 8513 | 9098 | 9772 | 0566 | 1535 | 2782 | 4533 | 7509 | 5363 |
| 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 11 | 11 | 11 | 11 | 11 | 13 |

P. P.

| | 9 | 11 |
|---|---|---|
| 1 | 0.9 | 1.1 |
| 2 | 1.8 | 2.2 |
| 3 | 2.7 | 3.3 |
| 4 | 3.6 | 4.4 |
| 5 | 4.5 | 5.5 |
| 6 | 5.4 | 6.6 |
| 7 | 6.3 | 7.7 |
| 8 | 7.2 | 8.8 |
| 9 | 8.1 | 9.9 |

| | 12 | 13 |
|---|---|---|
| 1 | 1.2 | 1.3 |
| 2 | 2.4 | 2.6 |
| 3 | 3.6 | 3.9 |
| 4 | 4.8 | 5.2 |
| 5 | 6.0 | 6.5 |
| 6 | 7.2 | 7.8 |
| 7 | 8.4 | 9.1 |
| 8 | 9.6 | 10.4 |
| 9 | 10.8 | 11.7 |

| | 14 | 15 |
|---|---|---|
| 1 | 1.4 | 1.5 |
| 2 | 2.8 | 3.0 |
| 3 | 4.2 | 4.5 |
| 4 | 5.6 | 6.0 |
| 5 | 7.0 | 7.5 |
| 6 | 8.4 | 9.0 |
| 7 | 9.8 | 10.5 |
| 8 | 11.2 | 12.0 |
| 9 | 12.6 | 13.5 |

## Log. Sinus 0°—21°.

| ' | 0° | 1° | 2° | 3° | 4° | 5° | 6° | 7° | 8° | 9° | 10° | 11° | 12° | 13° | 14° | 15° | 16° | 17° | 18° | 19° | 20° | 21° |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | −∞ | 2419 | 5428 | 7188 | 8436 | 9403 | 0192 | 0859 | 1436 | 1943 | 2397 | 2806 | 3179 | 3521 | 3837 | 4130 | 4403 | 4659 | 4900 | 5126 | 5341 | 5543 |
| 1 | 4637 | 2490 | 5464 | 7212 | 8454 | 9417 | 0204 | 0869 | 1445 | 1951 | 2404 | 2812 | 3185 | 3526 | 3842 | 4135 | 4408 | 4663 | 4904 | 5130 | 5344 | 5547 |
| 2 | 7648 | 2561 | 5500 | 7236 | 8472 | 9432 | 0216 | 0879 | 1453 | 1959 | 2411 | 2819 | 3191 | 3532 | 3847 | 4139 | 4412 | 4668 | 4908 | 5134 | 5347 | 5550 |
| 3 | 9408 | 2630 | 5535 | 7260 | 8490 | 9446 | 0228 | 0890 | 1462 | 1967 | 2418 | 2825 | 3197 | 3537 | 3852 | 4144 | 4417 | 4672 | 4911 | 5137 | 5351 | 5553 |
| 4 | 0658 | 2699 | 5571 | 7283 | 8508 | 9460 | 0240 | 0900 | 1471 | 1975 | 2425 | 2832 | 3202 | 3543 | 3857 | 4149 | 4421 | 4676 | 4915 | 5141 | 5354 | 5557 |
| 5 | 1627 | 2766 | 5605 | 7307 | 8525 | 9475 | 0252 | 0910 | 1480 | 1983 | 2432 | 2838 | 3208 | 3548 | 3862 | 4153 | 4425 | 4680 | 4919 | 5145 | 5358 | 5560 |
| 6 | 2419 | 2832 | 5640 | 7330 | 8543 | 9489 | 0264 | 0920 | 1489 | 1991 | 2439 | 2845 | 3214 | 3554 | 3867 | 4158 | 4430 | 4684 | 4923 | 5148 | 5361 | 5563 |
| 7 | 3088 | 2898 | 5674 | 7354 | 8560 | 9503 | 0276 | 0930 | 1498 | 1999 | 2447 | 2851 | 3220 | 3559 | 3872 | 4163 | 4434 | 4688 | 4927 | 5152 | 5365 | 5566 |
| 8 | 3668 | 2962 | 5708 | 7377 | 8578 | 9517 | 0287 | 0940 | 1507 | 2007 | 2454 | 2858 | 3226 | 3564 | 3877 | 4168 | 4438 | 4692 | 4931 | 5156 | 5368 | 5570 |
| 9 | 4180 | 3025 | 5742 | 7400 | 8595 | 9531 | 0299 | 0951 | 1516 | 2015 | 2461 | 2864 | 3232 | 3570 | 3882 | 4172 | 4443 | 4696 | 4935 | 5159 | 5372 | 5573 |
| 10 | 4637 | 3088 | 5776 | 7423 | 8613 | 9545 | 0311 | 0961 | 1525 | 2022 | 2468 | 2870 | 3238 | 3575 | 3887 | 4177 | 4447 | 4700 | 4939 | 5163 | 5375 | 5576 |
| 11 | 5051 | 3150 | 5809 | 7445 | 8630 | 9559 | 0323 | 0971 | 1533 | 2030 | 2475 | 2877 | 3244 | 3581 | 3892 | 4181 | 4452 | 4705 | 4942 | 5167 | 5379 | 5579 |
| 12 | 5429 | 3210 | 5842 | 7468 | 8647 | 9573 | 0334 | 0981 | 1542 | 2038 | 2482 | 2883 | 3250 | 3586 | 3897 | 4186 | 4456 | 4709 | 4946 | 5170 | 5382 | 5583 |
| 13 | 5777 | 3270 | 5875 | 7491 | 8665 | 9587 | 0346 | 0991 | 1551 | 2046 | 2489 | 2890 | 3255 | 3591 | 3902 | 4191 | 4460 | 4713 | 4950 | 5174 | 5385 | 5586 |
| 14 | 6099 | 3329 | 5907 | 7513 | 8682 | 9601 | 0357 | 1001 | 1560 | 2054 | 2496 | 2896 | 3261 | 3597 | 3907 | 4195 | 4465 | 4717 | 4954 | 5177 | 5389 | 5589 |
| 15 | 6398 | 3388 | 5939 | 7535 | 8699 | 9614 | 0369 | 1011 | 1568 | 2061 | 2503 | 2902 | 3267 | 3602 | 3912 | 4200 | 4469 | 4721 | 4958 | 5181 | 5392 | 5592 |
| 16 | 6678 | 3445 | 5972 | 7557 | 8716 | 9628 | 0380 | 1020 | 1577 | 2069 | 2510 | 2909 | 3273 | 3608 | 3917 | 4205 | 4473 | 4725 | 4962 | 5185 | 5396 | 5596 |
| 17 | 6942 | 3502 | 6003 | 7580 | 8733 | 9642 | 0392 | 1030 | 1586 | 2077 | 2517 | 2915 | 3279 | 3613 | 3922 | 4209 | 4478 | 4729 | 4965 | 5188 | 5399 | 5599 |
| 18 | 7190 | 3558 | 6035 | 7602 | 8749 | 9655 | 0403 | 1040 | 1594 | 2085 | 2524 | 2921 | 3284 | 3618 | 3927 | 4214 | 4482 | 4733 | 4969 | 5192 | 5402 | 5602 |
| 19 | 7425 | 3613 | 6066 | 7623 | 8766 | 9669 | 0415 | 1050 | 1603 | 2092 | 2531 | 2928 | 3290 | 3624 | 3932 | 4219 | 4486 | 4737 | 4973 | 5196 | 5406 | 5605 |
| 20 | 7648 | 3668 | 6097 | 7645 | 8783 | 9682 | 0426 | 1060 | 1612 | 2100 | 2538 | 2934 | 3296 | 3629 | 3937 | 4223 | 4491 | 4741 | 4977 | 5199 | 5409 | 5609 |
| 21 | 7859 | 3722 | 6128 | 7667 | 8799 | 9696 | 0438 | 1070 | 1620 | 2108 | 2545 | 2940 | 3302 | 3634 | 3942 | 4228 | 4495 | 4745 | 4981 | 5203 | 5413 | 5612 |
| 22 | 8061 | 3775 | 6159 | 7688 | 8816 | 9709 | 0449 | 1080 | 1629 | 2115 | 2551 | 2947 | 3308 | 3640 | 3947 | 4232 | 4499 | 4749 | 4984 | 5206 | 5416 | 5615 |
| 23 | 8255 | 3828 | 6189 | 7710 | 8833 | 9723 | 0460 | 1089 | 1637 | 2123 | 2558 | 2953 | 3313 | 3645 | 3952 | 4237 | 4503 | 4753 | 4988 | 5210 | 5420 | 5618 |
| 24 | 8439 | 3880 | 6220 | 7731 | 8849 | 9736 | 0472 | 1099 | 1646 | 2131 | 2565 | 2959 | 3319 | 3650 | 3957 | 4242 | 4508 | 4757 | 4992 | 5213 | 5423 | 5621 |
| 25 | 8617 | 3931 | 6250 | 7752 | 8865 | 9750 | 0483 | 1109 | 1655 | 2138 | 2572 | 2965 | 3325 | 3655 | 3961 | 4246 | 4512 | 4761 | 4996 | 5217 | 5426 | 5625 |
| 26 | 8787 | 3982 | 6279 | 7773 | 8882 | 9763 | 0494 | 1118 | 1663 | 2146 | 2579 | 2972 | 3331 | 3661 | 3966 | 4251 | 4516 | 4765 | 5000 | 5221 | 5430 | 5628 |
| 27 | 8951 | 4032 | 6309 | 7794 | 8898 | 9776 | 0505 | 1128 | 1672 | 2153 | 2586 | 2978 | 3336 | 3666 | 3971 | 4255 | 4521 | 4769 | 5003 | 5224 | 5433 | 5631 |
| 28 | 9109 | 4082 | 6339 | 7815 | 8914 | 9789 | 0516 | 1138 | 1680 | 2161 | 2593 | 2984 | 3342 | 3671 | 3976 | 4260 | 4525 | 4773 | 5007 | 5228 | 5436 | 5634 |
| 29 | 9261 | 4131 | 6368 | 7836 | 8930 | 9803 | 0527 | 1147 | 1689 | 2169 | 2600 | 2990 | 3348 | 3677 | 3981 | 4264 | 4529 | 4777 | 5011 | 5231 | 5440 | 5638 |
| | 7 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 |

P. P.

| | 15 | 14 |
|---|---|---|
| 1 | 1.5 | 1.4 |
| 2 | 3.0 | 2.8 |
| 3 | 4.5 | 4.2 |
| 4 | 6.0 | 5.6 |
| 5 | 7.5 | 7.0 |
| 6 | 9.0 | 8.4 |
| 7 | 10.5 | 9.8 |
| 8 | 12.0 | 11.2 |
| 9 | 13.5 | 12.6 |

| | 13 | 12 |
|---|---|---|
| 1 | 1.3 | 1.2 |
| 2 | 2.6 | 2.4 |
| 3 | 3.9 | 3.6 |
| 4 | 5.2 | 4.8 |
| 5 | 6.5 | 6.0 |
| 6 | 7.8 | 7.2 |
| 7 | 9.1 | 8.4 |
| 8 | 10.4 | 9.6 |
| 9 | 11.7 | 10.8 |

| | 11 | 9 |
|---|---|---|
| 1 | 1.1 | 0.9 |
| 2 | 2.2 | 1.8 |
| 3 | 3.3 | 2.7 |
| 4 | 4.4 | 3.6 |
| 5 | 5.5 | 4.5 |
| 6 | 6.6 | 5.4 |
| 7 | 7.7 | 6.3 |
| 8 | 8.8 | 7.2 |
| 9 | 9.9 | 8.1 |

| 0° | 1° | 2° | 3° | 4° | 5° | 6° | 7° | 8° | 9° | 10° | 11° | 12° | 13° | 14° | 15° | 16° | 17° | 18° | 19° | 20° | 21° |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\bar{9}$408 | 4179 | 6397 | 7857 | 8946 | $\bar{9}$816 | 0539 | 1157 | 1697 | 2176 | 2606 | 2997 | 3353 | 3682 | 3986 | 4269 | 4533 | 4781 | 5015 | 5235 | 5443 | 5641 |
| $\bar{9}$551 | 4227 | 6426 | 7877 | 8962 | $\bar{9}$829 | 0550 | 1167 | 1705 | 2184 | 2613 | 3003 | 3359 | 3687 | 3991 | 4274 | 4538 | 4785 | 5019 | 5239 | 5447 | 5644 |
| $\bar{9}$689 | 4275 | 6454 | 7898 | 8978 | $\bar{9}$842 | 0561 | 1176 | 1714 | 2191 | 2620 | 3009 | 3365 | 3692 | 3996 | 4278 | 4542 | 4789 | 5022 | 5242 | 5450 | 5647 |
| $\bar{9}$822 | 4322 | 6483 | 7918 | 8994 | $\bar{9}$855 | 0572 | 1186 | 1722 | 2199 | 2627 | 3015 | 3370 | 3698 | 4001 | 4283 | 4546 | 4793 | 5026 | 5246 | 5453 | 5650 |
| $\bar{9}$952 | 4368 | 6511 | 7939 | 9010 | $\bar{9}$868 | 0583 | 1195 | 1731 | 2206 | 2634 | 3021 | 3376 | 3703 | 4005 | 4287 | 4550 | 4797 | 5030 | 5249 | 5457 | 5654 |
| 0078 | 4414 | 6539 | 7959 | 9026 | $\bar{9}$881 | 0594 | 1205 | 1739 | 2214 | 2640 | 3027 | 3382 | 3708 | 4010 | 4292 | 4555 | 4801 | 5034 | 5253 | 5460 | 5657 |
| 0200 | 4459 | 6567 | 7979 | 9042 | $\bar{9}$894 | 0605 | 1214 | 1747 | 2221 | 2647 | 3034 | 3387 | 3713 | 4015 | 4296 | 4559 | 4805 | 5037 | 5256 | 5463 | 5660 |
| 0319 | 4504 | 6595 | 7999 | 9057 | $\bar{9}$907 | 0616 | 1224 | 1756 | 2229 | 2654 | 3040 | 3393 | 3719 | 4020 | 4301 | 4563 | 4809 | 5041 | 5260 | 5467 | 5663 |
| 0435 | 4549 | 6622 | 8019 | 9073 | $\bar{9}$919 | 0626 | 1233 | 1764 | 2236 | 2661 | 3046 | 3399 | 3724 | 4025 | 4305 | 4567 | 4813 | 5045 | 5263 | 5470 | 5666 |
| 0548 | 4593 | 6650 | 8039 | 9089 | $\bar{9}$932 | 0637 | 1242 | 1772 | 2243 | 2667 | 3052 | 3404 | 3729 | 4030 | 4310 | 4572 | 4817 | 5049 | 5267 | 5474 | 5670 |
| 0658 | 4637 | 6677 | 8059 | 9104 | $\bar{9}$945 | 0648 | 1252 | 1781 | 2251 | 2674 | 3058 | 3410 | 3734 | 4035 | 4314 | 4576 | 4821 | 5052 | 5270 | 5477 | 5673 |
| 0765 | 4680 | 6704 | 8078 | 9119 | $\bar{9}$958 | 0659 | 1261 | 1789 | 2258 | 2681 | 3064 | 3416 | 3739 | 4039 | 4319 | 4580 | 4825 | 5056 | 5274 | 5480 | 5676 |
| 0870 | 4723 | 6731 | 8098 | 9135 | $\bar{9}$970 | 0670 | 1271 | 1797 | 2266 | 2687 | 3070 | 3421 | 3745 | 4044 | 4323 | 4584 | 4829 | 5060 | 5278 | 5484 | 5679 |
| 0972 | 4765 | 6758 | 8117 | 9150 | $\bar{9}$983 | 0680 | 1280 | 1806 | 2273 | 2694 | 3077 | 3427 | 3750 | 4049 | 4328 | 4588 | 4833 | 5064 | 5281 | 5487 | 5682 |
| 1072 | 4807 | 6784 | 8137 | 9166 | $\bar{9}$996 | 0691 | 1289 | 1814 | 2280 | 2701 | 3083 | 3432 | 3755 | 4054 | 4332 | 4593 | 4837 | 5067 | 5285 | 5490 | 5685 |
| 1170 | 4848 | 6810 | 8156 | 9181 | 0008 | 0702 | 1299 | 1822 | 2288 | 2707 | 3089 | 3438 | 3760 | 4059 | 4337 | 4597 | 4841 | 5071 | 5288 | 5494 | 5689 |
| 1265 | 4890 | 6837 | 8175 | 9196 | 0021 | 0712 | 1308 | 1830 | 2295 | 2714 | 3095 | 3444 | 3765 | 4063 | 4341 | 4601 | 4845 | 5075 | 5292 | 5497 | 5692 |
| 1359 | 4930 | 6863 | 8194 | 9211 | 0033 | 0723 | 1317 | 1838 | 2303 | 2721 | 3101 | 3449 | 3770 | 4068 | 4346 | 4605 | 4849 | 5078 | 5295 | 5500 | 5695 |
| 1450 | 4971 | 6889 | 8213 | 9226 | 0046 | 0734 | 1326 | 1847 | 2310 | 2727 | 3107 | 3455 | 3775 | 4073 | 4350 | 4609 | 4853 | 5082 | 5299 | 5504 | 5698 |
| 1540 | 5011 | 6914 | 8232 | 9241 | 0058 | 0744 | 1336 | 1855 | 2317 | 2734 | 3113 | 3460 | 3781 | 4078 | 4355 | 4614 | 4857 | 5086 | 5302 | 5507 | 5701 |
| 1627 | 5050 | 6940 | 8251 | 9256 | 0070 | 0755 | 1345 | 1863 | 2324 | 2740 | 3119 | 3466 | 3786 | 4083 | 4359 | 4618 | 4861 | 5090 | 5306 | 5510 | 5704 |
| 1713 | 5090 | 6965 | 8270 | 9271 | 0083 | 0765 | 1354 | 1871 | 2332 | 2747 | 3125 | 3471 | 3791 | 4087 | 4364 | 4622 | 4865 | 5093 | 5309 | 5514 | 5708 |
| 1798 | 5129 | 6991 | 8289 | 9286 | 0095 | 0776 | 1363 | 1879 | 2339 | 2754 | 3131 | 3477 | 3796 | 4092 | 4368 | 4626 | 4869 | 5097 | 5313 | 5517 | 5711 |
| 1880 | 5167 | 7016 | 8307 | 9301 | 0107 | 0786 | 1372 | 1887 | 2346 | 2760 | 3137 | 3482 | 3801 | 4097 | 4372 | 4630 | 4873 | 5101 | 5316 | 5520 | 5714 |
| 1962 | 5206 | 7041 | 8326 | 9315 | 0120 | 0797 | 1381 | 1895 | 2353 | 2767 | 3143 | 3488 | 3806 | 4102 | 4377 | 4634 | 4876 | 5104 | 5320 | 5523 | 5717 |
| 2041 | 5243 | 7066 | 8345 | 9330 | 0132 | 0807 | 1390 | 1903 | 2361 | 2773 | 3149 | 3493 | 3811 | 4106 | 4381 | 4639 | 4880 | 5108 | 5323 | 5527 | 5720 |
| 2120 | 5281 | 7090 | 8363 | 9345 | 0144 | 0818 | 1399 | 1911 | 2368 | 2780 | 3155 | 3499 | 3816 | 4111 | 4386 | 4643 | 4884 | 5112 | 5327 | 5530 | 5723 |
| 2196 | 5318 | 7115 | 8381 | 9359 | 0156 | 0828 | 1409 | 1919 | 2375 | 2786 | 3161 | 3504 | 3822 | 4116 | 4390 | 4647 | 4888 | 5115 | 5330 | 5533 | 5726 |
| 2272 | 5355 | 7140 | 8400 | 9374 | 0168 | 0838 | 1418 | 1927 | 2382 | 2793 | 3167 | 3510 | 3827 | 4121 | 4395 | 4651 | 4892 | 5119 | 5334 | 5537 | 5729 |
| 2346 | 5392 | 7164 | 8418 | 9388 | 0180 | 0849 | 1427 | 1935 | 2390 | 2799 | 3173 | 3515 | 3832 | 4125 | 4399 | 4655 | 4896 | 5123 | 5337 | 5540 | 5733 |
| 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 |

P. P.

| | 8 | 7 |
|---|---|---|
| 1 | 0.8 | 0.7 |
| 2 | 1.6 | 1.4 |
| 3 | 2.4 | 2.1 |
| 4 | 3.2 | 2.8 |
| 5 | 4.0 | 3.5 |
| 6 | 4.8 | 4.2 |
| 7 | 5.6 | 4.9 |
| 8 | 6.4 | 5.6 |
| 9 | 7.2 | 6.3 |

| | 6 | 5 |
|---|---|---|
| 1 | 0.6 | 0.5 |
| 2 | 1.2 | 1.0 |
| 3 | 1.8 | 1.5 |
| 4 | 2.4 | 2.0 |
| 5 | 3.0 | 2.5 |
| 6 | 3.6 | 3.0 |
| 7 | 4.2 | 3.5 |
| 8 | 4.8 | 4.0 |
| 9 | 5.4 | 4.5 |

| | 4 | 3 |
|---|---|---|
| 1 | 0.4 | 0.3 |
| 2 | 0.8 | 0.6 |
| 3 | 1.2 | 0.9 |
| 4 | 1.6 | 1.2 |
| 5 | 2.0 | 1.5 |
| 6 | 2.4 | 1.8 |
| 7 | 2.8 | 2.1 |
| 8 | 3.2 | 2.4 |
| 9 | 3.6 | 2.7 |

| ′ | 22° | 23° | 24° | 25° | 26° | 27° | 28° | 29° | 30° | 31° | 32° | 33° | 34° | 35° | 36° | 37° | 38° | 39° | 40° | 41° | 42° | 43° | 44° | P.P. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 5736 | 5919 | 6093 | 6259 | 6418 | 6570 | 6716 | 6856 | 6990 | 7118 | 7242 | 7361 | 7476 | 7586 | 7692 | 7795 | 7893 | 7989 | 8081 | 8169 | 8255 | 8338 | 8418 | 4 |
| 1 | 5739 | 5922 | 6096 | 6262 | 6421 | 6573 | 6718 | 6858 | 6992 | 7120 | 7244 | 7363 | 7477 | 7588 | 7694 | 7796 | 7895 | 7990 | 8082 | 8171 | 8257 | 8339 | 8419 | 1 0.4 |
| 2 | 5742 | 5925 | 6099 | 6265 | 6424 | 6575 | 6721 | 6860 | 6994 | 7123 | 7246 | 7365 | 7479 | 7590 | 7696 | 7798 | 7897 | 7992 | 8084 | 8172 | 8258 | 8341 | 8420 | 2 0.8 |
| 3 | 5745 | 5928 | 6102 | 6268 | 6426 | 6578 | 6723 | 6863 | 6996 | 7125 | 7248 | 7367 | 7481 | 7591 | 7697 | 7800 | 7898 | 7993 | 8085 | 8174 | 8259 | 8342 | 8422 | 3 1.2 |
| 4 | 5748 | 5931 | 6104 | 6270 | 6429 | 6580 | 6726 | 6865 | 6998 | 7127 | 7250 | 7369 | 7483 | 7593 | 7699 | 7801 | 7900 | 7995 | 8087 | 8175 | 8261 | 8343 | 8423 | 4 1.6 |
| 5 | 5751 | 5934 | 6107 | 6273 | 6431 | 6583 | 6728 | 6867 | 7001 | 7129 | 7252 | 7371 | 7485 | 7595 | 7701 | 7803 | 7901 | 7997 | 8088 | 8177 | 8262 | 8345 | 8424 | 5 2.0 |
| 6 | 5754 | 5937 | 6110 | 6276 | 6434 | 6585 | 6730 | 6869 | 7003 | 7131 | 7254 | 7373 | 7487 | 7597 | 7703 | 7805 | 7903 | 7998 | 8090 | 8178 | 8264 | 8346 | 8426 | 6 2.4 |
| 7 | 5758 | 5940 | 6113 | 6278 | 6437 | 6588 | 6733 | 6872 | 7005 | 7133 | 7256 | 7375 | 7489 | 7599 | 7704 | 7806 | 7905 | 8000 | 8091 | 8180 | 8265 | 8347 | 8427 | 7 2.8 |
| 8 | 5761 | 5943 | 6116 | 6281 | 6439 | 6590 | 6735 | 6874 | 7007 | 7135 | 7258 | 7377 | 7491 | 7600 | 7706 | 7808 | 7906 | 8001 | 8093 | 8181 | 8266 | 8349 | 8428 | 8 3.2 |
| 9 | 5764 | 5945 | 6119 | 6284 | 6442 | 6592 | 6737 | 6876 | 7009 | 7137 | 7260 | 7379 | 7492 | 7602 | 7708 | 7810 | 7908 | 8003 | 8094 | 8182 | 8268 | 8350 | 8429 | 9 3.6 |
| 10 | 5767 | 5948 | 6121 | 6286 | 6444 | 6595 | 6740 | 6878 | 7012 | 7139 | 7262 | 7380 | 7494 | 7604 | 7710 | 7811 | 7910 | 8004 | 8096 | 8184 | 8269 | 8351 | 8431 | |
| 11 | 5770 | 5951 | 6124 | 6289 | 6447 | 6598 | 6742 | 6881 | 7014 | 7141 | 7264 | 7382 | 7496 | 7606 | 7711 | 7813 | 7911 | 8006 | 8097 | 8185 | 8270 | 8353 | 8432 | |
| 12 | 5773 | 5954 | 6127 | 6292 | 6449 | 6600 | 6744 | 6883 | 7016 | 7144 | 7266 | 7384 | 7498 | 7607 | 7713 | 7815 | 7913 | 8007 | 8099 | 8187 | 8272 | 8354 | 8433 | |
| 13 | 5776 | 5957 | 6130 | 6295 | 6452 | 6603 | 6747 | 6885 | 7018 | 7146 | 7268 | 7386 | 7500 | 7609 | 7715 | 7816 | 7914 | 8009 | 8100 | 8188 | 8273 | 8355 | 8435 | |
| 14 | 5779 | 5960 | 6133 | 6297 | 6454 | 6605 | 6749 | 6887 | 7020 | 7148 | 7270 | 7388 | 7502 | 7611 | 7716 | 7818 | 7916 | 8010 | 8102 | 8190 | 8275 | 8357 | 8436 | |
| 15 | 5782 | 5963 | 6135 | 6300 | 6457 | 6607 | 6752 | 6890 | 7022 | 7150 | 7272 | 7390 | 7504 | 7613 | 7718 | 7820 | 7918 | 8012 | 8103 | 8191 | 8276 | 8358 | 8437 | |
| 16 | 5785 | 5966 | 6138 | 6303 | 6460 | 6610 | 6754 | 6892 | 7025 | 7152 | 7274 | 7392 | 7505 | 7615 | 7720 | 7821 | 7919 | 8014 | 8105 | 8193 | 8277 | 8359 | 8439 | |
| 17 | 5789 | 5969 | 6141 | 6305 | 6462 | 6612 | 6756 | 6894 | 7027 | 7154 | 7276 | 7394 | 7507 | 7616 | 7722 | 7823 | 7921 | 8015 | 8106 | 8194 | 8279 | 8361 | 8440 | |
| 18 | 5792 | 5972 | 6144 | 6308 | 6465 | 6615 | 6759 | 6896 | 7029 | 7156 | 7278 | 7396 | 7509 | 7618 | 7723 | 7825 | 7922 | 8017 | 8108 | 8195 | 8280 | 8362 | 8441 | |
| 19 | 5795 | 5975 | 6147 | 6311 | 6467 | 6617 | 6761 | 6899 | 7031 | 7158 | 7280 | 7398 | 7511 | 7620 | 7725 | 7826 | 7924 | 8018 | 8109 | 8197 | 8282 | 8363 | 8442 | |
| 20 | 5798 | 5978 | 6149 | 6313 | 6470 | 6620 | 6763 | 6901 | 7033 | 7160 | 7282 | 7400 | 7513 | 7622 | 7727 | 7828 | 7926 | 8020 | 8111 | 8198 | 8283 | 8365 | 8444 | 3 |
| 21 | 5801 | 5981 | 6152 | 6316 | 6472 | 6622 | 6766 | 6903 | 7035 | 7162 | 7284 | 7402 | 7515 | 7624 | 7728 | 7830 | 7927 | 8021 | 8112 | 8200 | 8284 | 8366 | 8445 | 1 0.3 |
| 22 | 5804 | 5984 | 6155 | 6319 | 6475 | 6625 | 6768 | 6905 | 7037 | 7164 | 7286 | 7404 | 7517 | 7625 | 7730 | 7831 | 7929 | 8023 | 8114 | 8201 | 8286 | 8367 | 8446 | 2 0.6 |
| 23 | 5807 | 5987 | 6158 | 6321 | 6477 | 6627 | 6770 | 6908 | 7040 | 7166 | 7288 | 7406 | 7518 | 7627 | 7732 | 7833 | 7930 | 8024 | 8115 | 8203 | 8287 | 8369 | 8448 | 3 0.9 |
| 24 | 5810 | 5990 | 6161 | 6324 | 6480 | 6629 | 6773 | 6910 | 7042 | 7168 | 7290 | 7407 | 7520 | 7629 | 7734 | 7835 | 7932 | 8026 | 8117 | 8204 | 8289 | 8370 | 8449 | 4 1.2 |
| 25 | 5813 | 5992 | 6163 | 6327 | 6483 | 6632 | 6775 | 6912 | 7044 | 7171 | 7292 | 7409 | 7522 | 7631 | 7735 | 7836 | 7934 | 8027 | 8118 | 8205 | 8290 | 8371 | 8450 | 5 1.5 |
| 26 | 5816 | 5995 | 6166 | 6329 | 6485 | 6634 | 6777 | 6914 | 7046 | 7173 | 7294 | 7411 | 7524 | 7632 | 7737 | 7838 | 7935 | 8029 | 8120 | 8207 | 8291 | 8373 | 8451 | 6 1.8 |
| 27 | 5819 | 5998 | 6169 | 6332 | 6488 | 6637 | 6780 | 6917 | 7048 | 7175 | 7296 | 7413 | 7526 | 7634 | 7739 | 7840 | 7937 | 8031 | 8121 | 8208 | 8293 | 8374 | 8453 | 7 2.1 |
| 28 | 5822 | 6001 | 6172 | 6335 | 6490 | 6639 | 6782 | 6919 | 7050 | 7177 | 7298 | 7415 | 7528 | 7636 | 7740 | 7841 | 7938 | 8032 | 8122 | 8210 | 8294 | 8375 | 8454 | 8 2.4 |
| 29 | 5825 | 6004 | 6174 | 6337 | 6493 | 6642 | 6784 | 6921 | 7053 | 7179 | 7300 | 7417 | 7529 | 7638 | 7742 | 7843 | 7940 | 8034 | 8124 | 8211 | 8295 | 8377 | 8455 | 9 2.7 |
| | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | |

| ′ | 22° | 23° | 24° | 25° | 26° | 27° | 28° | 29° | 30° | 31° | 32° | 33° | 34° | 35° | 36° | 37° | 38° | 39° | 40° | 41° | 42° | 43° | 44° | P.P | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **30** | 5828 | 6007 | 6177 | 6340 | 6495 | 6644 | 6787 | 6923 | 7055 | 7181 | 7302 | 7419 | 7531 | 7640 | 7744 | 7844 | 7941 | 8035 | 8125 | 8213 | 8297 | 8378 | 8457 | | 2 |
| 31 | 5831 | 6010 | 6180 | 6342 | 6498 | 6646 | 6789 | 6926 | 7057 | 7183 | 7304 | 7421 | 7533 | 7641 | 7746 | 7846 | 7943 | 8037 | 8127 | 8214 | 8298 | 8379 | 8458 | 1 | 0.2 |
| 32 | 5834 | 6013 | 6183 | 6345 | 6500 | 6649 | 6791 | 6928 | 7059 | 7185 | 7306 | 7423 | 7535 | 7643 | 7747 | 7848 | 7945 | 8038 | 8128 | 8216 | 8300 | 8381 | 8459 | 2 | 0.4 |
| 33 | 5838 | 6016 | 6186 | 6348 | 6503 | 6651 | 6794 | 6930 | 7061 | 7187 | 7308 | 7425 | 7537 | 7645 | 7749 | 7849 | 7946 | 8040 | 8130 | 8217 | 8301 | 8382 | 8460 | 3 | 0.6 |
| 34 | 5841 | 6019 | 6188 | 6350 | 6505 | 6654 | 6796 | 6932 | 7063 | 7189 | 7310 | 7427 | 7539 | 7647 | 7751 | 7851 | 7948 | 8041 | 8131 | 8218 | 8302 | 8383 | 8462 | 4 | 0.8 |
| 35 | 5844 | 6021 | 6191 | 6353 | 6508 | 6656 | 6798 | 6935 | 7065 | 7191 | 7312 | 7428 | 7540 | 7648 | 7752 | 7853 | 7949 | 8043 | 8133 | 8220 | 8304 | 8385 | 8463 | 5 | 1.0 |
| 36 | 5847 | 6024 | 6194 | 6356 | 6510 | 6659 | 6801 | 6937 | 7068 | 7193 | 7314 | 7430 | 7542 | 7650 | 7754 | 7854 | 7951 | 8044 | 8134 | 8221 | 8305 | 8386 | 8464 | 6 | 1.2 |
| 37 | 5850 | 6027 | 6197 | 6358 | 6513 | 6661 | 6803 | 6939 | 7070 | 7195 | 7316 | 7432 | 7544 | 7652 | 7756 | 7856 | 7953 | 8046 | 8136 | 8223 | 8306 | 8387 | 8466 | 7 | 1.4 |
| 38 | 5853 | 6030 | 6199 | 6361 | 6515 | 6663 | 6805 | 6941 | 7072 | 7197 | 7318 | 7434 | 7546 | 7654 | 7757 | 7858 | 7954 | 8047 | 8137 | 8224 | 8308 | 8389 | 8467 | 8 | 1.6 |
| 39 | 5856 | 6033 | 6202 | 6364 | 6518 | 6666 | 6808 | 6943 | 7074 | 7199 | 7320 | 7436 | 7548 | 7655 | 7759 | 7859 | 7956 | 8049 | 8139 | 8225 | 8309 | 8390 | 8468 | 9 | 1.8 |
| **40** | 5859 | 6036 | 6205 | 6366 | 6521 | 6668 | 6810 | 6946 | 7076 | 7201 | 7322 | 7438 | 7550 | 7657 | 7761 | 7861 | 7957 | 8050 | 8140 | 8227 | 8311 | 8391 | 8469 | | |
| 41 | 5862 | 6039 | 6208 | 6369 | 6523 | 6671 | 6812 | 6948 | 7078 | 7203 | 7324 | 7440 | 7551 | 7659 | 7763 | 7863 | 7959 | 8052 | 8142 | 8228 | 8312 | 8393 | 8471 | | |
| 42 | 5865 | 6042 | 6210 | 6371 | 6526 | 6673 | 6814 | 6950 | 7080 | 7205 | 7326 | 7442 | 7553 | 7661 | 7764 | 7864 | 7960 | 8053 | 8143 | 8230 | 8313 | 8394 | 8472 | | |
| 43 | 5868 | 6045 | 6213 | 6374 | 6528 | 6675 | 6817 | 6952 | 7082 | 7208 | 7328 | 7444 | 7555 | 7662 | 7766 | 7866 | 7962 | 8055 | 8145 | 8231 | 8315 | 8395 | 8473 | | |
| 44 | 5871 | 6047 | 6216 | 6377 | 6531 | 6678 | 6819 | 6955 | 7085 | 7210 | 7330 | 7445 | 7557 | 7664 | 7768 | 7867 | 7964 | 8056 | 8146 | 8233 | 8316 | 8397 | 8475 | | |
| 45 | 5874 | 6050 | 6219 | 6379 | 6533 | 6680 | 6821 | 6957 | 7087 | 7212 | 7332 | 7447 | 7559 | 7666 | 7769 | 7869 | 7965 | 8058 | 8148 | 8234 | 8317 | 8398 | 8476 | | |
| 46 | 5877 | 6053 | 6221 | 6382 | 6536 | 6683 | 6824 | 6959 | 7089 | 7214 | 7334 | 7449 | 7561 | 7668 | 7771 | 7871 | 7967 | 8060 | 8149 | 8235 | 8319 | 8399 | 8477 | | |
| 47 | 5880 | 6056 | 6224 | 6385 | 6538 | 6685 | 6826 | 6961 | 7091 | 7216 | 7336 | 7451 | 7562 | 7669 | 7773 | 7872 | 7968 | 8061 | 8150 | 8237 | 8320 | 8401 | 8478 | | |
| 48 | 5883 | 6059 | 6227 | 6387 | 6541 | 6687 | 6828 | 6963 | 7093 | 7218 | 7338 | 7453 | 7564 | 7671 | 7774 | 7874 | 7970 | 8063 | 8152 | 8238 | 8322 | 8402 | 8480 | | |
| 49 | 5886 | 6062 | 6230 | 6390 | 6543 | 6690 | 6831 | 6966 | 7095 | 7220 | 7340 | 7455 | 7566 | 7673 | 7776 | 7876 | 7971 | 8064 | 8153 | 8240 | 8323 | 8403 | 8481 | | |
| **50** | 5889 | 6065 | 6232 | 6392 | 6546 | 6692 | 6833 | 6968 | 7097 | 7222 | 7342 | 7457 | 7568 | 7675 | 7778 | 7877 | 7973 | 8066 | 8155 | 8241 | 8324 | 8405 | 8482 | | |
| 51 | 5892 | 6068 | 6235 | 6395 | 6548 | 6695 | 6835 | 6970 | 7099 | 7224 | 7344 | 7459 | 7570 | 7676 | 7780 | 7879 | 7975 | 8067 | 8156 | 8242 | 8326 | 8406 | 8483 | | |
| 52 | 5895 | 6070 | 6238 | 6398 | 6551 | 6697 | 6837 | 6972 | 7102 | 7226 | 7345 | 7461 | 7571 | 7678 | 7781 | 7880 | 7976 | 8069 | 8158 | 8244 | 8327 | 8407 | 8485 | | |
| 53 | 5898 | 6073 | 6240 | 6400 | 6553 | 6699 | 6840 | 6974 | 7104 | 7228 | 7347 | 7462 | 7573 | 7680 | 7783 | 7882 | 7978 | 8070 | 8159 | 8245 | 8328 | 8409 | 8486 | | |
| 54 | 5901 | 6076 | 6243 | 6403 | 6556 | 6702 | 6842 | 6977 | 7106 | 7230 | 7349 | 7464 | 7575 | 7682 | 7785 | 7884 | 7979 | 8072 | 8161 | 8247 | 8330 | 8410 | 8487 | | |
| 55 | 5904 | 6079 | 6246 | 6405 | 6558 | 6704 | 6844 | 6979 | 7108 | 7232 | 7351 | 7466 | 7577 | 7683 | 7786 | 7885 | 7981 | 8073 | 8162 | 8248 | 8331 | 8411 | 8489 | | |
| 56 | 5907 | 6082 | 6249 | 6408 | 6561 | 6707 | 6847 | 6981 | 7110 | 7234 | 7353 | 7468 | 7579 | 7685 | 7788 | 7887 | 7982 | 8075 | 8164 | 8249 | 8332 | 8412 | 8490 | | |
| 57 | 5910 | 6085 | 6251 | 6411 | 6563 | 6709 | 6849 | 6983 | 7112 | 7236 | 7355 | 7470 | 7580 | 7687 | 7790 | 7889 | 7984 | 8076 | 8165 | 8251 | 8334 | 8414 | 8491 | | |
| 58 | 5913 | 6087 | 6254 | 6413 | 6566 | 6711 | 6851 | 6985 | 7114 | 7238 | 7357 | 7472 | 7582 | 7689 | 7791 | 7890 | 7986 | 8078 | 8167 | 8252 | 8335 | 8415 | 8492 | | |
| 59 | 5916 | 6090 | 6257 | 6416 | 6568 | 6714 | 6853 | 6988 | 7116 | 7240 | 7359 | 7474 | 7584 | 7690 | 7793 | 7892 | 7987 | 8079 | 8168 | 8254 | 8336 | 8416 | 8494 | | |
| | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | | |

| 45° | 46° | 47° | 48° | 49° | 50° | 51° | 52° | 53° | 54° | 55° | 56° | 57° | 58° | 59° | 60° | 61° | 62° | 63° | 64° | 65° | 66° | 67° | P. P. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 8495 | 8569 | 8641 | 8711 | 8778 | 8843 | 8905 | 8965 | 9023 | 9080 | 9134 | 9186 | 9236 | 9284 | 9331 | 9375 | 9418 | 9459 | 9499 | 9537 | 9573 | 9607 | 9640 | |
| 8497 | 8572 | 8644 | 8713 | 8780 | 8845 | 8907 | 8967 | 9025 | 9081 | 9135 | 9187 | 9238 | 9286 | 9332 | 9377 | 9420 | 9461 | 9500 | 9538 | 9574 | 9608 | 9641 | |
| 8500 | 8574 | 8646 | 8715 | 8782 | 8847 | 8909 | 8969 | 9027 | 9083 | 9137 | 9189 | 9239 | 9287 | 9334 | 9378 | 9421 | 9462 | 9501 | 9539 | 9575 | 9610 | 9642 | |
| 8502 | 8577 | 8648 | 8718 | 8784 | 8849 | 8911 | 8971 | 9029 | 9085 | 9139 | 9191 | 9241 | 9289 | 9335 | 9380 | 9422 | 9463 | 9503 | 9540 | 9576 | 9611 | 9643 | |
| 8505 | 8579 | 8651 | 8720 | 8787 | 8851 | 8913 | 8973 | 9031 | 9087 | 9141 | 9193 | 9242 | 9291 | 9337 | 9381 | 9424 | 9465 | 9504 | 9542 | 9577 | 9612 | 9645 | |
| 8507 | 8582 | 8653 | 8722 | 8789 | 8853 | 8915 | 8975 | 9033 | 9089 | 9142 | 9194 | 9244 | 9292 | 9338 | 9383 | 9425 | 9466 | 9505 | 9543 | 9579 | 9613 | 9646 | |
| 8510 | 8584 | 8655 | 8724 | 8791 | 8855 | 8917 | 8977 | 9035 | 9091 | 9144 | 9196 | 9246 | 9294 | 9340 | 9384 | 9427 | 9467 | 9507 | 9544 | 9580 | 9614 | 9647 | |
| 8512 | 8586 | 8658 | 8727 | 8793 | 8857 | 8919 | 8979 | 9037 | 9092 | 9146 | 9198 | 9247 | 9295 | 9341 | 9385 | 9428 | 9469 | 9508 | 9545 | 9581 | 9615 | 9648 | |
| 8515 | 8589 | 8660 | 8729 | 8795 | 8859 | 8921 | 8981 | 9039 | 9094 | 9148 | 9199 | 9249 | 9297 | 9343 | 9387 | 9429 | 9470 | 9509 | 9546 | 9582 | 9616 | 9649 | |
| 8517 | 8591 | 8662 | 8731 | 8797 | 8862 | 8923 | 8983 | 9041 | 9096 | 9149 | 9201 | 9251 | 9298 | 9344 | 9388 | 9431 | 9471 | 9510 | 9548 | 9583 | 9617 | 9650 | |
| 8520 | 8594 | 8665 | 8733 | 8800 | 8864 | 8925 | 8985 | 9042 | 9098 | 9151 | 9203 | 9252 | 9300 | 9346 | 9390 | 9432 | 9473 | 9512 | 9549 | 9584 | 9618 | 9651 | |
| 8522 | 8596 | 8667 | 8736 | 8802 | 8866 | 8927 | 8987 | 9044 | 9100 | 9153 | 9204 | 9254 | 9301 | 9347 | 9391 | 9433 | 9474 | 9513 | 9550 | 9586 | 9620 | 9652 | |
| 8525 | 8598 | 8669 | 8738 | 8804 | 8868 | 8929 | 8989 | 9046 | 9101 | 9155 | 9206 | 9255 | 9303 | 9349 | 9393 | 9435 | 9475 | 9514 | 9551 | 9587 | 9621 | 9653 | |
| 8527 | 8601 | 8672 | 8740 | 8806 | 8870 | 8931 | 8991 | 9048 | 9103 | 9156 | 9208 | 9257 | 9305 | 9350 | 9394 | 9436 | 9477 | 9515 | 9552 | 9588 | 9622 | 9654 | |
| 8530 | 8603 | 8674 | 8742 | 8808 | 8872 | 8933 | 8993 | 9050 | 9105 | 9158 | 9209 | 9259 | 9306 | 9352 | 9396 | 9438 | 9478 | 9517 | 9554 | 9589 | 9623 | 9655 | |
| 8532 | 8606 | 8676 | 8745 | 8810 | 8874 | 8935 | 8995 | 9052 | 9107 | 9160 | 9211 | 9260 | 9308 | 9353 | 9397 | 9439 | 9479 | 9518 | 9555 | 9590 | 9624 | 9656 | |
| 8535 | 8608 | 8679 | 8747 | 8813 | 8876 | 8937 | 8997 | 9054 | 9109 | 9162 | 9213 | 9262 | 9309 | 9355 | 9398 | 9440 | 9481 | 9519 | 9556 | 9591 | 9625 | 9657 | |
| 8537 | 8610 | 8681 | 8749 | 8815 | 8878 | 8939 | 8999 | 9056 | 9110 | 9163 | 9214 | 9264 | 9311 | 9356 | 9400 | 9442 | 9482 | 9520 | 9557 | 9593 | 9626 | 9658 | |
| 8540 | 8613 | 8683 | 8751 | 8817 | 8880 | 8941 | 9000 | 9057 | 9112 | 9165 | 9216 | 9265 | 9312 | 9358 | 9401 | 9443 | 9483 | 9522 | 9558 | 9594 | 9627 | 9659 | |
| 8542 | 8615 | 8686 | 8753 | 8819 | 8882 | 8943 | 9002 | 9059 | 9114 | 9167 | 9218 | 9267 | 9314 | 9359 | 9403 | 9444 | 9485 | 9523 | 9560 | 9595 | 9628 | 9660 | |
| 8545 | 8618 | 8688 | 8756 | 8821 | 8884 | 8945 | 9004 | 9061 | 9116 | 9169 | 9219 | 9268 | 9315 | 9361 | 9404 | 9446 | 9486 | 9524 | 9561 | 9596 | 9629 | 9661 | |
| 8547 | 8620 | 8690 | 8758 | 8823 | 8887 | 8947 | 9006 | 9063 | 9118 | 9170 | 9221 | 9270 | 9317 | 9362 | 9406 | 9447 | 9487 | 9525 | 9562 | 9597 | 9631 | 9662 | |
| 8550 | 8622 | 8692 | 8760 | 8825 | 8889 | 8949 | 9008 | 9065 | 9119 | 9172 | 9223 | 9272 | 9318 | 9364 | 9407 | 9449 | 9488 | 9527 | 9563 | 9598 | 9632 | 9663 | |
| 8552 | 8625 | 8695 | 8762 | 8828 | 8891 | 8951 | 9010 | 9067 | 9121 | 9174 | 9224 | 9273 | 9320 | 9365 | 9408 | 9450 | 9490 | 9528 | 9564 | 9599 | 9633 | 9664 | |
| 8555 | 8627 | 8697 | 8765 | 8830 | 8893 | 8953 | 9012 | 9069 | 9123 | 9175 | 9226 | 9275 | 9322 | 9367 | 9410 | 9451 | 9491 | 9529 | 9566 | 9601 | 9634 | 9666 | |
| 8557 | 8629 | 8699 | 8767 | 8832 | 8895 | 8955 | 9014 | 9070 | 9125 | 9177 | 9228 | 9276 | 9323 | 9368 | 9411 | 9453 | 9492 | 9530 | 9567 | 9602 | 9635 | 9667 | |
| 8560 | 8632 | 8702 | 8769 | 8834 | 8897 | 8957 | 9016 | 9072 | 9127 | 9179 | 9229 | 9278 | 9325 | 9369 | 9413 | 9454 | 9494 | 9532 | 9568 | 9603 | 9636 | 9668 | |
| 8562 | 8635 | 8704 | 8771 | 8836 | 8899 | 8959 | 9018 | 9074 | 9128 | 9181 | 9231 | 9279 | 9326 | 9371 | 9414 | 9455 | 9495 | 9533 | 9569 | 9604 | 9637 | 9669 | |
| 8564 | 8637 | 8706 | 8773 | 8838 | 8901 | 8961 | 9020 | 9076 | 9130 | 9182 | 9233 | 9281 | 9328 | 9372 | 9415 | 9457 | 9496 | 9534 | 9570 | 9605 | 9638 | 9670 | |
| 8567 | 8639 | 8708 | 8776 | 8840 | 8903 | 8963 | 9022 | 9078 | 9132 | 9184 | 9234 | 9283 | 9329 | 9374 | 9417 | 9458 | 9498 | 9535 | 9572 | 9606 | 9639 | 9671 | |
| 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | |

# Log. Sinus 68°—89°.

| ′ | 68° | 69° | 70° | 71° | 72° | 73° | 74° | 75° | 76° | 77° | 78° | 79° | 80° | 81° | 82° | 83° | 84° | 85° | 86° | 87° | 88° | 89° | P. P. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 9672 | 9702 | 9730 | 9757 | 9782 | 9806 | 9828 | 9849 | 9869 | 9887 | 9904 | 9919 | 9934 | 9946 | 9958 | 9968 | 9976 | 9983 | 9989 | 9994 | 9997 | 9̄999 | |
| 2 | 9673 | 9702 | 9731 | 9758 | 9783 | 9807 | 9829 | 9850 | 9870 | 9888 | 9905 | 9920 | 9934 | 9947 | 9958 | 9968 | 9976 | 9984 | 9990 | 9994 | 9997 | 9̄999 | |
| 4 | 9674 | 9703 | 9732 | 9758 | 9784 | 9808 | 9830 | 9851 | 9870 | 9888 | 9905 | 9920 | 9934 | 9947 | 9958 | 9968 | 9977 | 9984 | 9990 | 9994 | 9998 | 9̄999 | |
| 6 | 9675 | 9704 | 9733 | 9759 | 9785 | 9808 | 9831 | 9851 | 9871 | 9889 | 9906 | 9921 | 9935 | 9947 | 9959 | 9968 | 9977 | 9984 | 9990 | 9994 | 9998 | 9̄999 | |
| 8 | 9676 | 9705 | 9734 | 9760 | 9785 | 9809 | 9831 | 9852 | 9872 | 9890 | 9906 | 9921 | 9935 | 9948 | 9959 | 9969 | 9977 | 9984 | 9990 | 9995 | 9998 | 0000 | |
| 10 | 9677 | 9706 | 9734 | 9761 | 9786 | 9810 | 9832 | 9853 | 9872 | 9890 | 9907 | 9922 | 9936 | 9948 | 9959 | 9969 | 9977 | 9985 | 9990 | 9995 | 9998 | 0000 | |
| 12 | 9678 | 9707 | 9735 | 9762 | 9787 | 9811 | 9833 | 9853 | 9873 | 9891 | 9907 | 9922 | 9936 | 9949 | 9960 | 9969 | 9978 | 9985 | 9990 | 9995 | 9998 | 0000 | |
| 14 | 9679 | 9708 | 9736 | 9763 | 9788 | 9811 | 9833 | 9854 | 9873 | 9891 | 9908 | 9923 | 9937 | 9949 | 9960 | 9970 | 9978 | 9985 | 9991 | 9995 | 9998 | 0000 | |
| 16 | 9680 | 9709 | 9737 | 9764 | 9789 | 9812 | 9834 | 9855 | 9874 | 9892 | 9908 | 9923 | 9937 | 9949 | 9960 | 9970 | 9978 | 9985 | 9991 | 9995 | 9998 | 0000 | |
| 18 | 9681 | 9710 | 9738 | 9764 | 9789 | 9813 | 9835 | 9855 | 9875 | 9892 | 9909 | 9924 | 9937 | 9950 | 9961 | 9970 | 9978 | 9985 | 9991 | 9995 | 9998 | 0000 | |
| 20 | 9682 | 9711 | 9739 | 9765 | 9790 | 9814 | 9836 | 9856 | 9875 | 9893 | 9909 | 9924 | 9938 | 9950 | 9961 | 9971 | 9979 | 9986 | 9991 | 9995 | 9998 | 0000 | |
| 22 | 9683 | 9712 | 9740 | 9766 | 9791 | 9814 | 9836 | 9857 | 9876 | 9894 | 9910 | 9925 | 9938 | 9951 | 9961 | 9971 | 9979 | 9986 | 9991 | 9995 | 9998 | 0000 | |
| 24 | 9684 | 9713 | 9741 | 9767 | 9792 | 9815 | 9837 | 9857 | 9876 | 9894 | 9910 | 9925 | 9939 | 9951 | 9962 | 9971 | 9979 | 9986 | 9991 | 9996 | 9998 | 0000 | |
| 26 | 9685 | 9714 | 9742 | 9768 | 9793 | 9816 | 9838 | 9858 | 9877 | 9895 | 9911 | 9926 | 9939 | 9951 | 9962 | 9971 | 9979 | 9986 | 9992 | 9996 | 9998 | 0000 | |
| 28 | 9686 | 9715 | 9743 | 9769 | 9793 | 9817 | 9838 | 9859 | 9878 | 9895 | 9911 | 9926 | 9940 | 9952 | 9962 | 9972 | 9980 | 9986 | 9992 | 9996 | 9998 | 0000 | |
| 30 | 9687 | 9716 | 9743 | 9770 | 9794 | 9817 | 9839 | 9859 | 9878 | 9896 | 9912 | 9927 | 9940 | 9952 | 9963 | 9972 | 9980 | 9987 | 9992 | 9996 | 9999 | 0000 | |
| 32 | 9688 | 9717 | 9744 | 9770 | 9795 | 9818 | 9840 | 9860 | 9879 | 9896 | 9912 | 9927 | 9940 | 9952 | 9963 | 9972 | 9980 | 9987 | 9992 | 9996 | 9999 | 0000 | |
| 34 | 9689 | 9718 | 9745 | 9771 | 9796 | 9819 | 9841 | 9861 | 9880 | 9897 | 9913 | 9928 | 9941 | 9953 | 9963 | 9973 | 9980 | 9987 | 9992 | 9996 | 9999 | 0000 | |
| 36 | 9690 | 9719 | 9746 | 9772 | 9797 | 9820 | 9841 | 9861 | 9880 | 9897 | 9913 | 9928 | 9941 | 9953 | 9964 | 9973 | 9981 | 9987 | 9992 | 9996 | 9999 | 0000 | |
| 38 | 9691 | 9720 | 9747 | 9773 | 9797 | 9820 | 9842 | 9862 | 9881 | 9898 | 9914 | 9929 | 9942 | 9954 | 9964 | 9973 | 9981 | 9987 | 9992 | 9996 | 9999 | 0000 | |
| 40 | 9692 | 9721 | 9748 | 9774 | 9798 | 9821 | 9843 | 9863 | 9881 | 9899 | 9914 | 9929 | 9942 | 9954 | 9964 | 9973 | 9981 | 9988 | 9993 | 9996 | 9999 | 0000 | |
| 42 | 9693 | 9722 | 9749 | 9775 | 9799 | 9822 | 9843 | 9863 | 9882 | 9899 | 9915 | 9929 | 9943 | 9954 | 9965 | 9974 | 9981 | 9988 | 9993 | 9997 | 9999 | 0000 | |
| 44 | 9694 | 9722 | 9750 | 9775 | 9800 | 9823 | 9844 | 9864 | 9883 | 9900 | 9915 | 9930 | 9943 | 9955 | 9965 | 9974 | 9982 | 9988 | 9993 | 9997 | 9999 | 0000 | |
| 46 | 9695 | 9723 | 9751 | 9776 | 9801 | 9823 | 9845 | 9865 | 9883 | 9900 | 9916 | 9930 | 9943 | 9955 | 9965 | 9974 | 9982 | 9988 | 9993 | 9997 | 9999 | 0000 | |
| 48 | 9696 | 9724 | 9751 | 9777 | 9801 | 9824 | 9845 | 9865 | 9884 | 9901 | 9916 | 9931 | 9944 | 9955 | 9966 | 9975 | 9982 | 9988 | 9993 | 9997 | 9999 | 0000 | |
| 50 | 9697 | 9725 | 9752 | 9778 | 9802 | 9825 | 9846 | 9866 | 9884 | 9901 | 9917 | 9931 | 9944 | 9956 | 9966 | 9975 | 9982 | 9989 | 9993 | 9997 | 9999 | 0000 | |
| 52 | 9698 | 9726 | 9753 | 9779 | 9803 | 9826 | 9847 | 9867 | 9885 | 9902 | 9917 | 9932 | 9945 | 9956 | 9966 | 9975 | 9983 | 9989 | 9994 | 9997 | 9999 | 0000 | |
| 54 | 9699 | 9727 | 9754 | 9780 | 9804 | 9826 | 9847 | 9867 | 9885 | 9902 | 9918 | 9932 | 9945 | 9956 | 9967 | 9975 | 9983 | 9989 | 9994 | 9997 | 9999 | 0000 | |
| 56 | 9700 | 9728 | 9755 | 9780 | 9804 | 9827 | 9848 | 9868 | 9886 | 9903 | 9918 | 9933 | 9945 | 9957 | 9967 | 9976 | 9983 | 9989 | 9994 | 9997 | 9999 | 0000 | |
| 58 | 9701 | 9729 | 9756 | 9781 | 9805 | 9828 | 9849 | 9868 | 9887 | 9904 | 9919 | 9933 | 9946 | 9957 | 9967 | 9976 | 9983 | 9989 | 9994 | 9997 | 9999 | 0000 | |
| | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 10 | |

| 0°—29° | | 30°—59° | | | 60°—89° | | | 0'—2' | | 3'—5' | | 6'—8' | | 9'—11' | | 12'—14' | | 15'—17' | | 18'—20' | | 21'—23' | | 24'—26' | | 27'—29' | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **0°** | 179 | 59 | **30°** | 149 | 29 | **60°** | 119 | **0,0'** | **60,'0** | **3,'0** | **57,'0** | **6,'0** | **54,'0** | **9,'0** | **51,'0** | **12,'0** | **48,'0** | **15,'0** | **45,'0** | **18,'0** | **42,'0** | **21,'0** | **39,'0** | **24,'0** | **36,'0** | **27,'0** | **33,'0** |
| 1 | 178 | 58 | 31 | 148 | 28 | 61 | 118 | 0,1 | 59,9 | 3,1 | 56,9 | 6,1 | 53,9 | 9,1 | 50,9 | 12,1 | 47,9 | 15,1 | 44,9 | 18,1 | 41,9 | 21,1 | 38,9 | 24,1 | 35,9 | 27,1 | 32,9 |
| 2 | 177 | 57 | 32 | 147 | 27 | 62 | 117 | 0,2 | 59,8 | 3,2 | 56,8 | 6,2 | 53,8 | 9,2 | 50,8 | 12,2 | 47,8 | 15,2 | 44,8 | 18,2 | 41,8 | 21,2 | 38,8 | 24,2 | 35,8 | 27,2 | 32,8 |
| 3 | 176 | 56 | 33 | 146 | 26 | 63 | 116 | 0,3 | 59,7 | 3,3 | 56,7 | 6,3 | 53,7 | 9,3 | 50,7 | 12,3 | 47,7 | 15,3 | 44,7 | 18,3 | 41,7 | 21,3 | 38,7 | 24,3 | 35,7 | 27,3 | 32,7 |
| 4 | 175 | 55 | 34 | 145 | 25 | 64 | 115 | 0,4 | 59,6 | 3,4 | 56,6 | 6,4 | 53,6 | 9,4 | 50,6 | 12,4 | 47,6 | 15,4 | 44,6 | 18,4 | 41,6 | 21,4 | 38,6 | 24,4 | 35,6 | 27,4 | 32,6 |
| 5 | 174 | 54 | 35 | 144 | 24 | 65 | 114 | 0,5 | 59,5 | 3,5 | 56,5 | 6,5 | 53,5 | 9,5 | 50,5 | 12,5 | 47,5 | 15,5 | 44,5 | 18,5 | 41,5 | 21,5 | 38,5 | 24,5 | 35,5 | 27,5 | 32,5 |
| 6 | 173 | 53 | 36 | 143 | 23 | 66 | 113 | 0,6 | 59,4 | 3,6 | 56,4 | 6,6 | 53,4 | 9,6 | 50,4 | 12,6 | 47,4 | 15,6 | 44,4 | 18,6 | 41,4 | 21,6 | 38,4 | 24,6 | 35,4 | 27,6 | 32,4 |
| 7 | 172 | 52 | 37 | 142 | 22 | 67 | 112 | 0,7 | 59,3 | 3,7 | 56,3 | 6,7 | 53,3 | 9,7 | 50,3 | 12,7 | 47,3 | 15,7 | 44,3 | 18,7 | 41,3 | 21,7 | 38,3 | 24,7 | 35,3 | 27,7 | 32,3 |
| 8 | 171 | 51 | 38 | 141 | 21 | 68 | 111 | 0,8 | 59,2 | 3,8 | 56,2 | 6,8 | 53,2 | 9,8 | 50,2 | 12,8 | 47,2 | 15,8 | 44,2 | 18,8 | 41,2 | 21,8 | 38,2 | 24,8 | 35,2 | 27,8 | 32,2 |
| 9 | 170 | 50 | 39 | 140 | 20 | 69 | 110 | 0,9 | 59,1 | 3,9 | 56,1 | 6,9 | 53,1 | 9,9 | 50,1 | 12,9 | 47,1 | 15,9 | 44,1 | 18,9 | 41,1 | 21,9 | 38,1 | 24,9 | 35,1 | 27,9 | 32,1 |
| **10°** | 169 | 49 | **40°** | 139 | 19 | **70°** | 109 | **1,'0** | **59,'0** | **4,'0** | **56,'0** | **7,'0** | **53,'0** | **10,'0** | **50,'0** | **13,'0** | **47,'0** | **16,'0** | **44,'0** | **19,'0** | **41,'0** | **22,'0** | **38,'0** | **25,'0** | **35,'0** | **28,'0** | **32,'0** |
| 11 | 168 | 48 | 41 | 138 | 18 | 71 | 108 | 1,1 | 58,9 | 4,1 | 55,9 | 7,1 | 52,9 | 10,1 | 49,9 | 13,1 | 46,9 | 16,1 | 43,9 | 19,1 | 40,9 | 22,1 | 37,9 | 25,1 | 34,9 | 28,1 | 31,9 |
| 12 | 167 | 47 | 42 | 137 | 17 | 72 | 107 | 1,2 | 58,8 | 4,2 | 55,8 | 7,2 | 52,8 | 10,2 | 49,8 | 13,2 | 46,8 | 16,2 | 43,8 | 19,2 | 40,8 | 22,2 | 37,8 | 25,2 | 34,8 | 28,2 | 31,8 |
| 13 | 166 | 46 | 43 | 136 | 16 | 73 | 106 | 1,3 | 58,7 | 4,3 | 55,7 | 7,3 | 52,7 | 10,3 | 49,7 | 13,3 | 46,7 | 16,3 | 43,7 | 19,3 | 40,7 | 22,3 | 37,7 | 25,3 | 34,7 | 28,3 | 31,7 |
| 14 | 165 | 45 | 44 | 135 | 15 | 74 | 105 | 1,4 | 58,6 | 4,4 | 55,6 | 7,4 | 52,6 | 10,4 | 49,6 | 13,4 | 46,6 | 16,4 | 43,6 | 19,4 | 40,6 | 22,4 | 37,6 | 25,4 | 34,6 | 28,4 | 31,6 |
| 15 | 164 | 44 | 45 | 134 | 14 | 75 | 104 | 1,5 | 58,5 | 4,5 | 55,5 | 7,5 | 52,5 | 10,5 | 49,5 | 13,5 | 46,5 | 16,5 | 43,5 | 19,5 | 40,5 | 22,5 | 37,5 | 25,5 | 34,5 | 28,5 | 31,5 |
| 16 | 163 | 43 | 46 | 133 | 13 | 76 | 103 | 1,6 | 58,4 | 4,6 | 55,4 | 7,6 | 52,4 | 10,6 | 49,4 | 13,6 | 46,4 | 16,6 | 43,4 | 19,6 | 40,4 | 22,6 | 37,4 | 25,6 | 34,4 | 28,6 | 31,4 |
| 17 | 162 | 42 | 47 | 132 | 12 | 77 | 102 | 1,7 | 58,3 | 4,7 | 55,3 | 7,7 | 52,3 | 10,7 | 49,3 | 13,7 | 46,3 | 16,7 | 43,3 | 19,7 | 40,3 | 22,7 | 37,3 | 25,7 | 34,3 | 28,7 | 31,3 |
| 18 | 161 | 41 | 48 | 131 | 11 | 78 | 101 | 1,8 | 58,2 | 4,8 | 55,2 | 7,8 | 52,2 | 10,8 | 49,2 | 13,8 | 46,2 | 16,8 | 43,2 | 19,8 | 40,2 | 22,8 | 37,2 | 25,8 | 34,2 | 28,8 | 31,2 |
| 19 | 160 | 40 | 49 | 130 | 10 | 79 | 100 | 1,9 | 58,1 | 4,9 | 55,1 | 7,9 | 52,1 | 10,9 | 49,1 | 13,9 | 46,1 | 16,9 | 43,1 | 19,9 | 40,1 | 22,9 | 37,1 | 25,9 | 34,1 | 28,9 | 31,1 |
| **20°** | 159 | 39 | **50°** | 129 | 9 | **80°** | 99 | **2,'0** | **58,'0** | **5,'0** | **55,'0** | **8,'0** | **52,'0** | **11,'0** | **49,'0** | **14,'0** | **46,'0** | **17,'0** | **43,'0** | **20,'0** | **40,'0** | **23,'0** | **37,'0** | **26,'0** | **34,'0** | **29,'0** | **31,'0** |
| 21 | 158 | 38 | 51 | 128 | 8 | 81 | 98 | 2,1 | 57,9 | 5,1 | 54,9 | 8,1 | 51,9 | 11,1 | 48,9 | 14,1 | 45,9 | 17,1 | 42,9 | 20,1 | 39,9 | 23,1 | 36,9 | 26,1 | 33,9 | 29,1 | 30,9 |
| 22 | 157 | 37 | 52 | 127 | 7 | 82 | 97 | 2,2 | 57,8 | 5,2 | 54,8 | 8,2 | 51,8 | 11,2 | 48,8 | 14,2 | 45,8 | 17,2 | 42,8 | 20,2 | 39,8 | 23,2 | 36,8 | 26,2 | 33,8 | 29,2 | 30,8 |
| 23 | 156 | 36 | 53 | 126 | 6 | 83 | 96 | 2,3 | 57,7 | 5,3 | 54,7 | 8,3 | 51,7 | 11,3 | 48,7 | 14,3 | 45,7 | 17,3 | 42,7 | 20,3 | 39,7 | 23,3 | 36,7 | 26,3 | 33,7 | 29,3 | 30,7 |
| 24 | 155 | 35 | 54 | 125 | 5 | 84 | 95 | 2,4 | 57,6 | 5,4 | 54,6 | 8,4 | 51,6 | 11,4 | 48,6 | 14,4 | 45,6 | 17,4 | 42,6 | 20,4 | 39,6 | 23,4 | 36,6 | 26,4 | 33,6 | 29,4 | 30,6 |
| 25 | 154 | 34 | 55 | 124 | 4 | 85 | 94 | 2,5 | 57,5 | 5,5 | 54,5 | 8,5 | 51,5 | 11,5 | 48,5 | 14,5 | 45,5 | 17,5 | 42,5 | 20,5 | 39,5 | 23,5 | 36,5 | 26,5 | 33,5 | 29,5 | 30,5 |
| 26 | 153 | 33 | 56 | 123 | 3 | 86 | 93 | 2,6 | 57,4 | 5,6 | 54,4 | 8,6 | 51,4 | 11,6 | 48,4 | 14,6 | 45,4 | 17,6 | 42,4 | 20,6 | 39,4 | 23,6 | 36,4 | 26,6 | 33,4 | 29,6 | 30,4 |
| 27 | 152 | 32 | 57 | 122 | 2 | 87 | 92 | 2,7 | 57,3 | 5,7 | 54,3 | 8,7 | 51,3 | 11,7 | 48,3 | 14,7 | 45,3 | 17,7 | 42,3 | 20,7 | 39,3 | 23,7 | 36,3 | 26,7 | 33,3 | 29,7 | 30,3 |
| 28 | 151 | 31 | 58 | 121 | 1 | 88 | 91 | 2,8 | 57,2 | 5,8 | 54,2 | 8,8 | 51,2 | 11,8 | 48,2 | 14,8 | 45,2 | 17,8 | 42,2 | 20,8 | 39,2 | 23,8 | 36,2 | 26,8 | 33,2 | 29,8 | 30,2 |
| 29 | 150 | 30 | 59 | 120 | 0 | 89 | 90 | 2,9 | 57,1 | 5,9 | 54,1 | 8,9 | 51,1 | 11,9 | 48,1 | 14,9 | 45,1 | 17,9 | 42,1 | 20,9 | 39,1 | 23,9 | 36,1 | 26,9 | 33,1 | 29,9 | 30,1 |
| W | S | C | W | S | C | W | S | 60'—58' | | 57'—55' | | 54'—52' | | 51'—49' | | 48'—46' | | 45'—43' | | 42'—40' | | 39'—37' | | 36'—34' | | 33'—31' | |

# Lehrbuch

der

# elementaren Mathematik

von

**Victor Schlegel,**
Oberlehrer am Gymnasium in Waren.

## Vierter Teil.

## Stereometrie

und

## sphärische Trigonometrie.

**Mit 62 Figuren in Holzschnitt und 4 lithogr. Tafeln.**

**Wolfenbüttel.**
Druck und Verlag von Julius Zwissler.
1880.

# Vorrede.

Bei der Bearbeitung des vorliegenden letzten Bandes meines Lehrbuchs der elementaren Mathematik ist es mein besonderes Bestreben gewesen, die mannigfachen Beziehungen zwischen ebenen und räumlichen Gebilden möglichst deutlich hervortreten zu lassen, und namentlich zu zeigen, wie die in der ebenen Geometrie enthaltenen Keime in der Stereometrie zur Entfaltung und Ausbildung gelangen, und wie andrerseits die Gebilde und Beziehungen in der Ebene als specielle Fälle solcher im Raume erscheinen. Dieser Zweck bedingte eine Darstellungsweise, welche sich möglichst genau an die im zweiten (und dritten) Bande befolgte anschliesst, nötigte mich aber auch zu vielfachen Abweichungen von der gewohnten Form der Darstellung, Abweichungen, welche, wie ich hoffe, eine bessere Anordnung des Stoffes herbeigeführt haben. Bedenkt man, wie grundverschieden in den meisten Lehrbüchern die Darstellungsweise der Stereometrie von derjenigen der Geometrie ist, so dürfte schon der Umstand, dass es gelang, die im zweiten Bande befolgte systematische Anordnung des Stoffes auch im vierten Bande konsequent durchzuführen, für diese Anordnung sprechen. — Der Begriff der Bewegung ist natürlich auch diesmal oberstes Prinzip. Ein die Stereometrie der ruhenden Gebilde, d h. die Theorie der Verwandtschaften im Raume, behandelnder Abschnitt musste wegbleiben, um den Umfang des Buches nicht über gewohnte Grenzen auszudehnen. Dagegen erschien es der Gleichmässigkeit wegen erforderlich, manche sonst in den Schulbüchern sehr stiefmütterlich behandelte Partieen, z. B. die Lehre vom Tetraeder und von den regelmässigen Polyedern, ausführlicher zu behandeln. — Ueber sonstige Eigentümlichkeiten der vorliegenden Bearbeitung habe ich noch folgendes zu bemerken. Als wichtigstes Raumelement erscheint die Ebene, während die Gerade nur in Verbindung mit der Ebene betrachtet wird. Die krummen Flächen sind von den durch sie begrenzten Körpern streng getrennt. In Nr. 16 ist der Versuch gemacht, die komplizierten Beweise des Fundamentalsatzes der Stereometrie durch einen einfacheren zu ersetzen, und für Satz 219, welcher die Zerlegung des dreiseitigen Prismas in drei Tetraeder behandelt, ist der gewöhnliche Beweis durch einen, wie es scheint, weniger bekannten, aber sehr viel eleganteren ersetzt. Die doppelte Analogie der dreiseitigen Ecke mit Winkel und Dreieck gab Anlass zu einer getrennten Behandlung ihrer entsprechenden Eigenschaften. Als vollständiges Analogon zum Dreieck erforderte das Tetraeder eine gesonderte, eingehendere Untersuchung, ebenso als Analogon zum Parallelogramm die Säule (welchen Namen ich für das unerträgliche „Parallelepipedon“ setze). Dem Begriffe der regelmässigen Polyeder ist der der „homogenen“ vorausgeschickt. — In der rechnenden Stereometrie sind

solche Körper übergangen, welche nicht schon vorher zu Betrachtungen Anlass gaben, und auch sonst kein Interesse bieten, namentlich auch der Obelisk. Die sphärische Trigonometrie ist durchaus analog mit der ebenen behandelt. Es mag an dieser Stelle noch bemerkt werden, dass die Zerlegung der Kugelfläche in regelmässige Polygone (Nr. 86) interessanten Stoff zu Aufgaben der sphärischen Trigonometrie liefert. — Ich habe endlich den Versuch gemacht, die allgemeinen Flächen zweiter Ordnung in elementarer Weise vorzuführen. Muss man auch im elementaren Unterrichte von einer Betrachtung ihrer Eigenschaften Abstand nehmen, so erscheint es doch wünschenswert, den Schüler wenigstens mit ihren Formen bekannt zu machen, was obendrein durch die schönen Brill'schen Kartonmodelle jetzt so sehr erleichtert ist. Die Art und Weise, wie ich diese Flächen eingeführt und klassifiziert habe, mag durch den bescheidenen Zweck, welcher dabei verfolgt wurde, entschuldigt werden.

Seit dem Erscheinen des dritten Bandes dieses Lehrbuches ist durch einen Erlass des preussischen Kultusministers vom 23. Januar 1880 (abgedruckt in Stiehl's Centralblatt S. 269) die Einführung fünf- oder vierstelliger Logarithmentafeln in den Schulen empfohlen worden. Der in jenem Bande gemachte Versuch, die vierstelligen Logarithmen für den Unterricht zu verwerten, hat hierdurch eine bedeutungsvolle Unterstützung gefunden. — Da der Druck des vorliegenden Bandes noch nicht begonnen hatte, als die preussische Verfügung über die neue Orthographie der Schulbücher erschien, so erklärt es sich, dass diese Orthographie in dem vorliegenden Bande bereits durchgeführt ist.

Schliesslich sage ich denjenigen Herren, welche mir Vorschläge zu Aenderungen oder Vervollständigungen in den drei ersten Bänden dieses Werkes gemacht haben, nicht minder auch der Verlagshandlung für die Liberalität, mit der sie allen meinen Wünschen hinsichtlich der Ausstattung des Werkes entgegengekommen ist, hierdurch meinen ergebensten Dank, und bitte meine Fachgenossen, auch dem vorliegenden Schlussbande freundliche Beachtung schenken zu wollen.

Waren, im August 1880.

**V. Schlegel.**

# Inhalt des vierten Teils.


## Einleitung (1. 2).

Seite

1. Uebersicht über die Grundgebilde des Raumes. — 2. Hilfsmittel der Anschauung . . . . . . . . . . . . . . . . . . 1

## Reine Stereometrie.

(Stereometrie der bewegten Gebilde.)

### A. Die Ebene und ihre Bewegungen im Raume (3—49) 6

*α*) Einmalige Bewegung der Ebene (3—22) . . . . 6

3. Entstehung und Bestimmung der Ebene — 4. Fortsetzung.

1) Lagen- und Richtungsänderung der Ebene (5—9) . 9

5. Bewegung der Ebene. — 6 Bewegung eines auf der Ebene liegenden Punktes. — 7. Bewegung einer auf der Ebene liegenden Geraden. — 8. Parallele Geraden in parallelen Ebenen. — 9. Windschiefe Geraden in parallelen Ebenen.

2) Seitenänderung der Ebene. — Der Raumwinkel (10—22) 15

10. Drehung. — 11. Beziehungen zwischen zwei Ebenen.

**Der Raumwinkel zweier Ebenen** . . . . 16

12. Definition des Raumwinkels zweier Ebenen.

13 Bewegung einer in der Ebene liegenden Geraden. Vorbemerkung. — 14. a) Die Gerade in schiefer Richtung zur Axe. Resultat der Drehung: Die gemeine Kegelfläche. — 15. b) Die Gerade in paralleler Richtung zur Axe. Resultat der Drehung: Die gemeine Cylinderfläche. — 16. c) Die Gerade in senkrechter Richtung zur Axe. Resultat der Drehung: Die Ebene. — 17. Zurückführung des Raumwinkels auf einen ebenen Winkel. — 18. Die Gerade in senkrechter Richtung zur Ebene.

**Der Neigungswinkel einer Geraden und einer Ebene** . . 26

19. Definition und Eigenschaften des Neigungswinkels einer Geraden und einer Ebene. — 20. Entfernung. — 21. Neigungswinkel paralleler Geraden und Ebenen.

22. Bewegung einer in der Ebene liegenden Kreislinie. Resultat der Drehung: Die Kugelfläche.

*β*) Zweimalige Bewegung der Ebene (23—38) . . . . 33

23. Uebersicht. — 24. Drei in einer Geraden sich schneidende Ebenen. — 25. Zwei von einer dritten geschnittene parallele Ebenen. — 26. Die unendlich ferne Gerade einer Ebene. — 27. Drei in parallelen Geraden sich schneidende Ebenen.

Seite

**Die dreiseitige Ecke** . . . . . . 37

1) Die Ecke als Analogon zum Winkel . . . . . . 37

28. Drei in einem Punkte sich schneidende Ebenen. Die dreiseitige Ecke. Vorbemerkungen. — 29. Einteilung der Ecken nach ihrer Grösse. — 30. Nebenecken, Nebenscheitelecken und Scheitelecken.

2) Die Ecke als Analogon zum Dreieck . . . . . 41

31. Vorbemerkungen. — 32. Bestimmung der Ecke durch Seiten und Winkel. — 33. Die drei ersten Fälle der Bestimmung einer Ecke durch drei Stücke. — 34. Die Polarecke. — 35. Die drei letzten Fälle der Bestimmung einer Ecke durch drei Stücke. — 36. Beziehungen zwischen den Winkeln und Seiten einer Ecke. — 37. Die rechte Ecke und ihre Polarecke. — 38. Das Kugeldreieck.

$\gamma$) Drei- und mehrmalige Bewegung der Ebene (39—49) 53

39. Vorbemerkungen

**a) Das Tetraeder (40—44)** . . . . . . 54

40. Definitionen. — 41. Das rechteckige Tetraeder. — 42. Beziehungen zwischen den Ecken eines Tetraeders — 43. Bestimmung des Tetraeders durch seine Stücke. -- 44. Beziehungen zwischen den Ecken und Seiten eines Tetraeders.

**b) Die Pyramide (45. 46)** . . . . . . . 61

45. Definitionen, und Eigenschaften der Pyramide. — 46. Schnittebenen der Pyramide.

**c) Der Kegel (47. 48)** . . . . . . . . 65

47. Definitionen, und Eigenschaften des Kegels. — 48. Schnittebenen des gemeinen Kegels.

**d) Das Pentaeder (49)** . . . . . . . . 70

49. Uebersicht.

**B. Die Figur und ihre Bewegungen im Raume (50—89)** 71

1) Lagen- und Richtungsänderung der Figur (50—70) 71

$\alpha$) Einmalige Bewegung der Figur (50—61) . . . . 71

**a) Bewegung des Dreiecks: Das dreiseitige Prisma** . 71

50. Definitionen, und Eigenschaften des dreiseitigen Prismas. — 51. Diagonalschnitte.

**b) Bewegung des Parallelogramms: Die Säule** . . . 74

52. Definitionen, und Eigenschaften der Säule. — 53 Eigenschaften der Gegenflächen, Gegenwinkel und Gegenecken. — 54. Specielle Arten der Säule. — 55 Diagonalschnitte, Axen und Diagonalaxen.

**c) Bewegung des Polygons: Das Prisma** . . . . 78

56. Definitionen, und Eigenschaften des Prismas. — 57. Pyramide und Prisma. — 58. Schnittebenen des Prismas.

**d) Bewegung des Kreises: Der Cylinder** . . . . . 81

59. Definitionen, und Eigenschaften des Cylinders. — 60. Kegel und Cylinder. — 61. Schnittebenen des gemeinen Cylinders.

$\beta$) Mehrmalige Bewegung der Figur (62—70) . . . . 85

62. Vorbemerkung.

**Bewegung des Parallelogramms** . . . . . 86

1. Die geometrischen Operationen mit Säulen . . . 86

63. Addition. — 64. Subtraktion. — 65. Multiplikation. — 66. Tei- — 67. Messung.

Seite

2. Säule und dreiseitiges Prisma . . . . . . . . 90

68. Sätze.

3 Dreiseitiges Prisma und Pyramide . . . . . . . 91

69. Sätze. — 70. Rückblick.

2) Seitenänderung der Figur (71—89) . . . . . . . 94

a) **Bewegung des Polygons: Der Rotationskörper** . . 94

71. Bewegung des rechtwinkligen Dreiecks: Der gerade Kegel. — 72. Bewegung des Rechtecks: Der gerade Cylinder. — 73. Bewegung eines Trapezes: Der gerade Kegelstumpf. — 74. Bewegung eines Polygons: Der Rotationskörper.

b) **Bewegung des Halbkreises: Die Kugel** . . . . 95

75. Entstehung der Kugel. — 76. Kugel und Punkt. — 77. Kugel und Ebene. α) Sekantenebenen. — 78. β) Tangentenebenen. — 79. Konstruktion einer Kugel aus gegebenen Bedingungen. Vorbemerkung. — 80. Sätze über den geometrischen Ort des Mittelpunktes einer Kugel. — 81. Sätze von drei Flächen, die sich in derselben Linie schneiden. — 82. Sätze von vier Linien, die sich in demselben Punkte schneiden. — 83. Kugel und Polyeder. — 84. Tetraeder. — 85. Homogene Polyeder. — 86. Teilung der Kugelfläche in regelmässige Polygone. — 87. Regelmässige Polyeder. — 88. Zwei Kugelflächen. — 89. Sätze über den geometrischen Ort des Mittelpunktes einer Kugel.

## Rechnende Stereometrie.

90. Vorbemerkung . . . . . . . . . . . . . . . . . 114

1) Der Körperraum als Streckenprodukt (91—97) 114

91. Masseinheit. — 92. Die rechteckige Säule. — 93. Die Säule. — 94. Das Prisma. — 95. Die Pyramide. — 96. Der Pyramidenstumpf. — 97. Polyeder.

2) Die regelmässigen Polyeder (98—101) . . . 118

98. Flächenwinkel. — 99. Radien der zugehörigen Kugeln. — 100. Oberfläche. — 101. Volumen.

3) Krummflächige Körper (102—121) . . . . . . 125

a) **Der Cylinder** . . . . . . . . . 125

102. Oberfläche des Mantels. — 103. Volumen.

b) **Der Kegel** . . . . . . . . . 126

104. Oberfläche des Mantels. Der gerade Kegel. — 105. Der gerade Kegelstumpf. — 106. Volumen. Der gemeine Kegel. — 107. Der gemeine Kegelstumpf.

c) **Rotationskörper** . . . . . . . . 128

108. Vorbemerkung.

1. Rotation um eine durch den Mittelpunkt und eine Ecke gehende Axe . . . . . . . . . . . . 128

109. Oberfläche des Rotationskörpers. — 110. Oberfläche der Kugel. — 111. Kugelzone und Kugelkappe. — 112. Kugelzweieck. — 113. Kugeldreieck.

114. Volumen der Kugel. — 115. Kugelkegel. — 116. Kugelkappe. — 117. Kugelzone. — 118. Kugelzweieck. — 119. Kugeldreieck.

Seite

2. Rotation um eine die Figur nicht schneidende Axe . . . 134

120. Oberfläche des Rotationskörpers. — 121. Volumen des Rotationskörpers.

## Sphärische Trigonometrie.

122. Vorbemerkung . . . . . . . . . . . . . . . . . 138

**I. Das rechtwinklige Kugeldreieck (123. 124)** . . . 138

123. Formeln. — 124. Anwendung der Formeln.

**II. Das schiefwinklige Kugeldreieck (125—133)** . . . 141

1. Erste Methode (125—127) . . . . . . 141

**a. Geometrisches Verfahren** . . . . . . 141

125. Der Sinussatz. — 126. Der Cosinussatz.

**b. Algebraisches Verfahren** . . . . . . 144

127. Gemeinsamer Ursprung des Sinus- und Cosinussatzes.

2. Zweite Methode (128—132) . . . . . 146

128. Vorbemerkung. — 129. Die Cosinusformeln. — 130. Anwendung der Sinus- und Cosinusformeln. — 131. Die Tangensformeln. — 132. Anwendung der Tangensformeln.

3. Dritte Methode (133) . . . . . . . . 152

133. Methode des Hilfswinkels.

## Anhang: Die Flächen zweiter Ordnung.

134. Vorbemerkung. — 135. Entstehungsweisen der Flächen zweiter Ordnung . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 156

1) Die elliptischen Flächen (136—138) . . . . 159

**a. Drehung der Ellipse** . . . . . . . . 159

136. 1) Das Ellipsoid.

**b. Drehung der Hyperbel** . . . . . . . 159

137. 2) Das zweischalige Hyperboloid. 3) Das einschalige Hyperboloid.

**c. Drehung der Parabel** . . . . . . . . 162

138. 4) Das elliptische Paraboloid.

2) Die cylindrischen Flächen (139—141) . . . 162

**a. Verschiebung der Ellipse** . . . . . . . 162

139. 5) Die elliptische Cylinderfläche.

**b. Verschiebung der Hyperbel** . . . . . 163

140. 6) Die hyperbolische Cylinderfläche.

**c. Verschiebung der Parabel** . . . . . 163

141. 7) Die parabolische Cylinderfläche.

3) Die windschiefe Fläche (142) . . . . . . 163

142. 8) Das hyperbolische Paraboloid.

---

Uebungssätze und Aufgaben . . . . . . . . . 165

Register . . . . . . . . . . . . . . . . 190

Berichtigungen . . . . . . . . . . . . . . 192

---

# Einleitung.

**1.** *Uebersicht über die Grundgebilde des Raumes.* — Die Lehre von den Gebilden im Raume und ihren Beziehungen zu einander heisst Stereometrie.*) Im Gebiete der Ebene waren der Punkt und die Gerade diejenigen Grundgebilde, durch deren Bewegung alle übrigen Gebilde abgeleitet wurden. Im Gebiete des Raumes tritt zu diesen beiden Grundgebilden als drittes noch die Ebene hinzu. Wie im Gebiete der Geraden beliebige Punkte, im Gebiete der Ebene beliebige Punkte und Geraden, so können im Gebiete des Raumes beliebige Punkte, Geraden und Ebenen angenommen werden. — Im Gebiete der Ebene konnte eine Gerade die beiden Arten ihrer Bewegung, Verschiebung und Drehung, nur auf je eine Art ausführen (wenn wir zwei entgegengesetzte Bewegungen als gleichartig ansehen), ein Punkt jedoch seine Lagenänderung auf unendlich viele Arten. Demnach entstand durch Bewegung der Geraden stets ein und dasselbe Gebilde, nämlich ein Teil der Ebene, durch Bewegung des Punktes dagegen Kurven von mannigfacher Gestalt. Und es führte infolge dessen die Bewegung einer Geraden zu einfacheren Gebilden als diejenige des Punktes. Daraus folgte weiter, dass es zweckmässig war, erst die Bewegungen der Geraden zu betrachten, und dann erst diejenigen des Punktes, und zwar in Verbindung mit der Bewegung einer Geraden, auf welcher der Punkt sich befand. — Im Gebiete des Raumes verhält sich nun die Ebene geradeso, wie im

*) Da die Stereometrie nur ein Zweig der allgemeinen Raumwissenschaft ist, zu welcher die Einleitung bereits dem zweiten Teile dieses Werkes vorausgeschickt wurde, so muss hier auch auf jene Einleitung verwiesen werden.

Gebiete der Ebene die Gerade. Auch die Ebene kann die beiden Arten ihrer Bewegung, Verschiebung und Drehung, nur auf je eine Art ausführen, die Gerade und der Punkt dagegen die ihrigen auf unendlich viele Arten. Wir werden also dem entsprechend in erster Linie die Bewegungen der Ebene untersuchen, dagegen diejenigen der Geraden und eines Punktes erst in Verbindung mit den Bewegungen einer Ebene, auf welcher diese Gebilde sich befinden.

**2.** *Hilfsmittel der Anschauung.* — Wie im Gebiete der Ebene zahlreichere Gebilde und Beziehungen zwischen denselben existieren als im Gebiete der Geraden, so zeigt das Gebiet des Raumes in dieser Hinsicht wieder eine grössere Reichhaltigkeit und Mannigfaltigkeit als das der Ebene. Aber die Untersuchung dieser Gebilde und Beziehungen wird dadurch erheblich erschwert, dass es nicht, wie in der Geometrie, möglich ist, dieselben in ähnlicher Darstellung auf einer Ebene zu veranschaulichen. Wir können zwar eine Tafel oder ein Blatt Papier als Abbild einer Ebene benutzen und darauf unsere Zeichnungen von ebenen Figuren entwerfen; aber wir können kein Abbild des Raumes herstellen, sondern müssen uns mit dem thatsächlich gegebenen Weltraume begnügen. In diesem aber können wir nicht Linien und Punkte zeichnen, wie auf einer Ebene, und ebensowenig Flächen. Es handelt sich also darum, Hilfsmittel zu finden, durch welche wir die Gebilde und ihre Beziehungen im Raume unserem Auge anschaulich machen können. Solche Hilfsmittel sind:

1) Modelle. Unter Modellen versteht man vollkommen ähnliche Darstellungen von Gebilden im Raume. Dieselben leisten hiernach für die Anschauung dasselbe wie die Zeichnungen in der Geometrie; aber ihre Herstellung ist bei weitem umständlicher, ebenso ihre Vervielfältigung und Abänderung. Die Konstruktion beliebig vieler Gebilde, die bei der Zeichnung lediglich die Instrumente Lineal und Zirkel erfordert, im Uebrigen aber dem Zeichnenden die grösste Freiheit lässt, ist daher hier so gut wie ausgeschlossen.

Anm. Räumliche Konstruktionen können jedoch in Gedanken ausgeführt und mit Worten beschrieben werden. Zu den praktisch ausführbaren Forderungen der Geometrie: „Konstruktion einer Geraden und einer Kreislinie in der Ebene" treten dann noch die eben nur in Gedanken ausführbaren Forderungen der Stereometrie: „Konstruktion einer Ebene, einer Cylinder-, Kegel- und Kugelfläche im Raume".

Man hat zu unterscheiden Modelle von Körpern, Flächen und Linien. Modelle von Körpern werden aus Holz, Gips,

Glas, Metall, Pappe etc. hergestellt, und zwar massiv oder hohl nach der Beschaffenheit des Stoffes.*) Gläserne gewähren den Vorteil, vermöge ihrer Durchsichtigkeit alle Kanten und Ecken des Körpers gleichzeitig erkennen zu lassen (freilich, wenn sie massiv sind, wegen der Strahlenbrechung nicht am wahren Orte). Für Körper, deren Oberfläche aus ebenen Figuren besteht, empfiehlt sich als leicht ausführbar das Ausschneiden ihrer Oberfläche aus einem einzigen Stück Pappe oder Papier, worauf die Fläche an den Kanten umgebogen wird und je zwei Kanten, die in eine einzige zusammenfallen sollen, durch Ueberkleben an einander befestigt werden. Zur Herstellung dieser Modelle bedarf man einer Zeichnung (*Netz* des Körpers), welche die sämmtlichen Kanten und Figuren der Oberfläche des Körpers auf einer einzigen Ebene darstellt. — Ebenen, welche durch den Körper gelegt sind, lassen sich durch Schnitte darstellen. Der Körper besteht alsdann aus mehreren Teilen, die sich beliebig trennen und zusammensetzen lassen.**) — *Flächen* können als Oberflächen von Körpern dargestellt werden (so die Kugelfläche als Oberfläche des Kugelkörpers), oder in Blattform (aus Papier, Pappe, Glas; aus ersterem Stoffe besonders leicht die Ebene, die Cylinder- und Kegelfläche), oder endlich durch Netze von Linien, die sich auf ihnen ziehen lassen, und die durch ihren Verlauf ein, wenn auch nicht völlig zusammenhängendes, Bild der Fläche geben.***) — Linien auf Flächen werden, wie immer, durch Zeichnung dargestellt. — *Linien* im Raume, sofern sie nicht an Körpern oder Flächen erscheinen, werden durch Fäden oder Drähte dargestellt, *Punkte* im Raum als Schnitte von Linien.

2) *Abbildungen.* Um Gebilde im Raume samt ihren Beziehungen durch Zeichnung in der Ebene darzustellen, denkt man sich die Gebilde zwischen dem betrachtenden Auge ($A$, *Augenpunkt*) und einer Ebene ($\alpha$, *Projektionsebene*) ge-

---

*) Solche Modelle werden u. a. geliefert von der „Leipziger Lehrmittel-Anstalt“ (Dr. O. Schneider), und in besonders reichhaltiger Auswahl von der „Lehrmittel-Anstalt J. Ehrhard & Co.“ in Bensheim a. d. Bergstr.

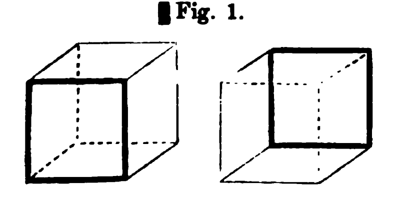
**) Hohlkörper aus Glas, zum teil mit gefärbtem Wasser gefüllt, und in verschiedenen Lagen gehalten, würden die verschiedenen ebenen Schnitte eines Körpers am besten zur Anschauung bringen.

***) Hierher gehören die „Kartonmodelle“ und die (erheblich teureren) „Fadenmodelle“ von Flächen zweiter Ordnung (L. Brill in Darmstadt), von denen jedes vermöge seiner Beweglichkeit eine ganze Reihe von Flächen derselben Art darstellt und gleichzeitig die auf der Fläche konstruierbaren Kreis- bezw. geraden Linien zur Anschauung bringt.

legen. Jeder Punkt (Eckpunkt oder Endpunkt) des Gebildes verdeckt dann für das Auge einen Punkt der Ebene, jede Linie des Gebildes eine Linie der Ebene. Sind dann diese verdeckten Punkte und Linien auf der Ebene (a) gezeichnet, so gewährt nach Entfernung des Gebildes diese Zeichnung dem in *A* befindlichen Auge denselben Anblick der Punkte und Linien, wie vorher das Gebilde selbst.*) (Der Unterschied der Entfernungen kommt erst beim Sehen mit beiden Augen zum Bewusstsein.) Diese Art der Abbildung heisst schiefe Projektion (vgl. T. II, Nr. 140). Bei dieser Darstellung, welche ebenso subjektiv getreu ist, wie diejenige durch Modelle objektiv getreu, erleiden die Winkel und Strecken Aenderungen ihrer Grösse (Beispiele liefert jedes Bild eines von geraden Linien begrenzten Gegenstandes). Daher muss man, um solche Abbildungen ohne das Gebilde selbst richtig herzustellen, diese Aenderungen kennen, die wieder von der gegenseitigen Lage des Gebildes, des Augenpunktes und der Projektionsebene abhängen. Die Wissenschaft, welche solche Abbildungen darzustellen lehrt, heisst beschreibende (deskriptive) Geometrie. — Ein von ebenen Figuren begrenzter Körper kann entweder so dargestellt werden, dass sämmtliche, oder so, dass nur die dem Auge gleichzeitig sichtbaren Ecken und Kanten gezeichnet werden. Man wird den Körper im ersten Falle als durchsichtig, im zweiten als undurchsichtig betrachten.

Anm. Im ersten Falle sind die in das Innere der Zeichnung fallenden Kanten zum teil offene, zum teil verdeckte. Betrachtet man beide Arten von Kanten mit entgegengesetzter Eigenschaft behaftet, so stellt dieselbe Zeichnung eine andere Ansicht desselben Körpers dar. (S. die nebenstehenden verschiedenen Abbildungen eines Würfels, die beide, als geometrische Figuren betrachtet, kongruent sind. Der Unterschied tritt am besten bei der Betrachtung mit einem Auge hervor.)

Fig. 1.



Denkt man sich den Augenpunkt in unendliche Entfernung gerückt, so entsteht die (in Fig. 1, wie in allen folgenden Figuren angewendete) Parallelprojektion, welche gegenüber der schiefen den Vorteil gewährt, dass parallele Geraden in der Darstellung parallel bleiben, wodurch die Herstellung der

*) Genau dieselbe Methode wird in der Praxis beim Zeichnen mikroskopischer Bilder befolgt.

Zeichnung wesentlich erleichtert wird. Als Beispiel dieser Projektion kann die Abbildung eines Gegenstandes durch den von der Sonne herrührenden Schatten (Silhouette) angesehen werden.

Anm. Wie ist das Verhältnis der Grösse des Bildes zu der des Körpers bei der schiefen und bei der Parallelprojektion?

Krumme Flächen werden dadurch abgebildet, dass man ihre Grenzen und charakteristischen Linien, welche die Beschaffenheit ihrer Krümmung angeben, abbildet. Oder man denkt sich die Flächen in einer bestimmten Richtung beleuchtet, und giebt dann die durch ihre Krümmung hervorgerufene Verteilung von Licht und Schatten durch Schattierung wieder.

Anm. Die erste Art der Darstellung unterscheidet z. B. das Bild eines Globus von einem Kreise, die zweite das einer Kugel von einem Kreise, das eines Kegels von einem Sektor.

Die Anschaulichkeit der Abbildungen wird ausserordentlich erhöht, wenn man von einem Gebilde zwei Abbildungen aus verschiedenen Augenpunkten besitzt und diese Bilder durch ein Stereoskop betrachtet. Das stereoskopische Bild lässt dann die wirkliche Lage der Teile des Gebildes hinter einander deutlich erkennen.*) (Um von einer einzelnen Abbildung einen annähernd ähnlichen Eindruck zu haben, muss man dieselbe mit einem Auge betrachten.)

3) Schnitte. Um gewisse Eigenschaften und Beziehungen eines Gebildes zur Anschauung zu bringen, genügt es, sich dasselbe durch eine Ebene geschnitten zu denken und die Schnittlinien und Schnittpunkte des Gebildes mit dieser Ebene zu zeichnen. (So kann ein Cylinder für manche Zwecke durch einen Kreis, für andere durch ein Parallelogramm ersetzt werden.) War das Gebilde durch einfache Bewegung einer ebenen Figur entstanden, so genügt die Zeichnung dieser ebenen Figur ebenfalls für manche Zwecke, da man sich nur vorzustellen braucht, dass dieselbe jener Bewegung unterworfen werde. Aus den Eigenschaften und Beziehungen der gegebenen Figur folgen dann entsprechende des daraus entstandenen räumlichen Gebildes. Viele Sätze der Stereometrie lassen sich auf diese Weise aus Sätzen der Geometrie ableiten.

*) Eine grosse Anzahl solcher stereoskopischen Bilder ist der Schrift von Hugel: „Die regulären und halbregulären Polyeder" (Neustadt a. d. H. Witter) beigegeben. Einige dieser Bilder finden sich auf der diesem Buche beigegebenen Tafel.

# Reine Stereometrie.

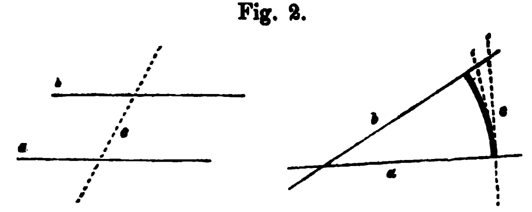
**(Stereometrie der bewegten Gebilde.)**

## A. Die Ebene und ihre Bewegungen im Raume.

### *a*) Einmalige Bewegung der Ebene.

**3.** ***Entstehung und Bestimmung der Ebene.****) — Wenn zwei Geraden (*a*, *b*) einen (endlich oder unendlich fernen) Punkt gemeinsam haben, und die erste Gerade durch einfache Bewegung in die zweite übergeht (d.h. so, dass ein beliebiger Punkt der ersten Geraden die Richtung auf einen beliebigen festen oder bestimmten beweglichen Punkt der zweiten Geraden innehält), so ist die von der bewegten Geraden beschriebene Fläche eine Ebene (T. II, Nr. 27 u. 29). — Da die zweite Gerade auch ausserhalb dieser Ebene im Raume auf unendlich viele Arten angenommen werden kann, so kann die erste auf unendlich viele Arten eine Ebene beschreiben. Das Unterscheidende dieser Bewegungen nennen wir ihre Seite. Bewegt sich also eine Gerade beständig nach derselben Seite, so beschreibt sie eine Ebene (T. II, Nr. 41). Die Ebene ist hiernach bestimmt 1) durch Lage und Richtung der bewegten Geraden, 2) durch die Seite der Bewegung. Die Merkmale einer Ebene sind also Lage, Richtung und Seite.

Fig. 2.




*) Der Inhalt von Nr. 3 und 4 gehört eigentlich in die Geometrie der Ebene, und ist grösstenteils bereits in T. II zu finden. Die Wiederholung an gegenwärtiger Stelle findet des besseren Zusammenhanges wegen statt.

Durch die Seite, nach welcher sich die erste Gerade anfänglich bewegt, sind alle Stellungen, die sie künftig durchlaufen wird, von vornherein mitbestimmt. Umgekehrt reicht jede einzelne dieser Stellungen im Verein mit der ersten Geraden dazu aus, jene Seite zu bestimmen (T. II, 8). Da jede Gerade auf einer Ebene als erzeugende Gerade angesehen werden kann, so ist hiernach durch eine beliebige Gerade auf einer Ebene ihre Lage und Richtung, durch zwei beliebige Geraden auf der Ebene ihre Lage, Richtung und Seite, d. h. die Ebene selbst, vollkommen bestimmt. Anders ausgedrückt:

Durch zwei in einem (endlich oder unendlich 1.
fernen) Punkte sich schneidende Geraden (*a*, *b*) kann man nur *eine* Ebene legen.

Anm. Umkehrung: Eine Fläche ist eine Ebene, wenn man in ihr durch jeden ihrer Punkte 2 Geraden ziehen kann.

Eine Gerade, welche zwei Punkte einer Ebene verbindet, liegt ganz in derselben (T. II, 35). Verbindet man also zwei beliebige Punkte der beiden Geraden *a*, *b* (Fig. 2) durch eine Gerade *c*, so ist (nach 1) die durch *a* und *b* bestimmte Ebene auch durch *a* und *c* (oder durch *b* und *c*) bestimmt. Demnach kann man die Entstehung der Ebene auch folgendermassen definieren:

Eine Gerade *a* beschreibt eine Ebene, wenn sie 2.
sich um einen ihrer Punkte (einschliesslich des unendlich fernen) so dreht, dass sie beständig eine andere Gerade *c* schneidet.

4. *Fortsetzung.* — Eine Ebene ist bestimmt:

1) Durch zwei parallele (*a*, *b*) oder sich schneidende (*a*, *c*) Geraden (nach 1), oder, da man eine der Parallelen durch einen beliebigen ihrer Punkte (nach T. II, 30) ersetzen kann, und ebenso die schneidende Gerade *a* durch ihren Drehungspunkt (nach 2);

2) durch eine Gerade und einen ausserhalb derselben liegenden Punkt, oder, da man diese Gerade durch zwei beliebige ihrer Punkte ersetzen kann (T. II, 14);

3) durch drei nicht in derselben Geraden liegende Punkte.

Hieraus folgt:

Durch eine Gerade und einen ausserhalb dersel- 3.
ben liegenden Punkt, sowie durch drei nicht in derselben Geraden liegende Punkte kann man nur *eine* Ebene legen.

Anm. Die Konstruktion einer Ebene aus den unter 1), 2), 3) genannten Stücken ist eine der (freilich nur theoretisch erfüllbaren) Forderungen der konstruierenden Stereometrie.

Eine Ebene wird durch drei an beliebige ihrer Punkte gesetzte grosse, oder durch zwei an beliebige ihrer Geraden gesetzte kleine lateinische, oder durch einen kleinen deutschen Buchstaben bezeichnet.

Aus 1 und 3 folgt: Bewegt eine Ebene sich so, dass sie beständig entweder durch zwei Geraden, oder durch eine Gerade und einen ausserhalb derselben liegenden Punkt, oder durch drei nicht in derselben Geraden liegende Punkte geht, so bewegt sie sich in sich selbst.

Anm. Prüfung der ebenen Beschaffenheit des Fussbodens durch Möbeln, bei welchen die Endpunkte der vier Füsse genau in einer Ebene liegen, und umgekehrt. Vorteil der mit drei Füssen versehenen Möbeln.

Die Lage einer Ebene ist bestimmt durch einen beliebigen ihrer Punkte; ihre Lage und Richtung durch eine beliebige ihrer Geraden oder zwei beliebige ihrer Punkte; ihre Lage, Richtung und Seite durch zwei beliebige ihrer Geraden oder drei beliebige ihrer Punkte.

Ein Punkt hat dieselbe oder verschiedene Lage mit einer Ebene, jenachdem er auf oder ausser ihr liegt; eine Gerade hat gleiche Richtung oder dieselbe Lage mit einer Ebene, jenachdem sie keinen oder einen Punkt mit der Ebene gemeinsam hat, sie hat dieselbe Lage und Richtung mit der Ebene, wenn sie ganz in der Ebene liegt.

Zwei Ebenen können nur entweder in der Lage und Richtung oder in der Seite übereinstimmen. Könnte eine Ebene durch Bewegung eines Punktes entstehen, so würden zwei von diesem Punkte auf verschiedene Art beschriebene Ebenen nur diesen Punkt gemeinsam haben, d. h. in der Lage übereinstimmen, und sich in Richtung und Seite unterscheiden. Da aber die Ebene das Resultat der Bewegung einer Geraden ist, so kann sie ihre Lage nicht ohne ihre Richtung ändern, und umgekehrt. Zwei von derselben Geraden beschriebene Ebenen stimmen also in Lage und Richtung überein und unterscheiden sich durch die Seite; zwei von verschiedenen (sich nicht schneidenden) Geraden durch Bewegung nach gleicher Seite beschriebene Ebenen stimmen in der Seite überein und unterscheiden sich durch Lage und Richtung. — Zwei Ebenen haben hiernach niemals nur einen Punkt, sondern stets eine Linie gemeinsam. Diese Linie muss aber eine Gerade sein, weil eine in einer Ebene liegende krumme Linie nur diese eine Ebene erzeugen

kann, während jede andere Fläche, die sie beim Heraustreten aus der Ebene beschreibt, krumm ist.

Also: Zwei Ebenen mit gleicher Lage haben stets eine Gerade gemeinsam. 4.

Anders ausgedrückt: Haben zwei Ebenen dieselbe Lage, so haben sie auch dieselbe Richtung (und umgekehrt). 5.

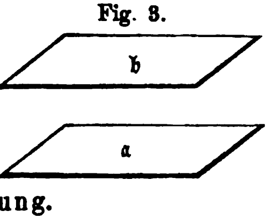
Hiernach ist also eine Ebene vollkommen bestimmt durch ihre Lage und ihre Seite. Man kann also stets eine einzige Ebene konstruiren von gegebener Lage und Seite. — Dagegen ist die Ebene durch Richtung und Seite überbestimmt, weil die gegebene Richtung eine unendliche Menge von Lagen darstellt, während zur Bestimmung der Ebene nur eine derselben erforderlich ist. Man kann also eine Ebene von gegebener Richtung und Seite im allgemeinen nicht konstruieren.

Ferner sind hiernach für eine Ebene, obwohl sie drei Merkmale hat, nur zwei verschiedene Arten der Bewegung denkbar, nämlich 1) Aenderung der Lage und Richtung mit Beibehaltung der Seite, 2) Aenderung der Seite mit Beibehaltung der Lage und Richtung.

## 1) Lagen- und Richtungsänderung der Ebene.

**5.** *Bewegung der Ebene.* — Ist eine Ebene $a$ durch Aenderung ihrer Lage und Richtung (ohne ihre Seite zu ändern) in $b$ übergegangen, so darf keine Gerade (und folglich kein Punkt) zugleich auf $a$ und $b$ liegen; denn sonst könnte diese Gerade durch ihre Bewegung jede der beiden Ebenen erzeugen, und da Lage und Richtung einer Ebene durch eine beliebige ihrer Geraden bestimmt wird (Nr. 3), so hätten beide Ebenen dieselbe Lage und Richtung gegen die Annahme. — Wir nennen diese Art der Bewegung einer Ebene Verschiebung.

Fig. 3.




Verschiebung einer Ebene ist also Aenderung ihrer Lage und Richtung mit Beibehaltung ihrer Seite.

Anm. zu Fig. 3. Wie die unendliche Gerade als begrenzte Strecke, so muss die unendliche Ebene als begrenzte Figur abgebildet werden, und zwar geschieht dies aus Gründen der Anschaulichkeit meistens am besten durch das Parallelogramm.

Zwei Ebenen ($a$, $b$) mit verschiedener Lage und Richtung aber gleicher Seite heissen parallel. (In Zeichen $a \parallel b$.)

Anm. Diesen Namen führen die Ebenen auch dann noch, wenn eine von ihnen mit entgegengesetzter Seite genommen wird. Ist es nötig, diesen Fall besonders zu bezeichnen, so kann man zwei Ebenen mit verschiedener Lage und Richtung und entgegengesetzter Seite antiparallel nennen. So sind z. B. Decke und Fussboden eines Zimmers, zwei gegenüberstehende Wände desselben, die beiden Seiten eines Blattes Papier antiparallele Ebenen.

Zwei parallele (bezw. antiparallele) Ebenen entstehen, wenn zwei verschiedene, sich nicht schneidende Geraden sich nach gleichen (bezw. entgegengesetzten) Seiten bewegen.

Anm. Schnitten sich die beiden bewegten Geraden, so müssten die beiden entstehenden Ebenen, weil jede eine der beiden Geraden enthält, auch ihren Schnittpunkt gemeinsam haben, also ausser in der Seite noch in der Lage übereinstimmen, d. h. zusammenfallen.

6. Hat eine Ebene ihre Lage geändert, so hat auch jeder Punkt auf ihr seine Lage um dieselbe Strecke geändert. Denn alle ihre Punkte haben gleichgrosse und gleichgerichtete Bewegungen (Lagenänderungen) gemacht. — Wie die Lage einer Ebene durch einen beliebigen Punkt auf ihr vollkommen bestimmt ist, so auch ihre Lagenänderung durch diejenige eines beliebigen Punktes auf ihr.

Eine Ebene kann aus der Lage $\mathfrak{a}$ auf unzählige Arten in die Lage $\mathfrak{b}$ kommen. Die Lagenänderung der Ebene ist einfach, wenn diejenige eines beliebigen Punktes auf ihr eine einfache ist, d. h., wenn ein beliebiger Punkt auf ihr eine beliebige Gerade beschreibt. Das von der Ebene beschriebene Gebilde ist aber in jedem Falle ein Teil des Raumes, weil wir uns diese Bewegung, wie jede andere, nur innerhalb des Raumes vorstellen können. (Vgl. dagegen die entsprechende Stelle T. II, Nr. 27).

Hiernach kann man im Raume zu einer in ihm gegebenen Ebene beliebige parallele Ebenen legen.

7. Durch einen ausserhalb einer Ebene gegebenen Punkt kann man nur *eine* parallele Ebene legen. Denn die Lage derselben ist durch den gegebenen Punkt, und ihre Seite durch die gegebene Ebene vollkommen bestimmt. Durch Lage und Seite aber ist die Ebene (wie aus 5 folgte) selbst vollkommen bestimmt.

Aus dem Begriff der Gleichheit folgt, dass zwei Seiten, die einer dritten gleich sind, auch unter einander gleich sind.

8. Folglich: Sind zwei Ebenen einer dritten parallel, so sind sie auch unter einander parallel.

**6.** ***Bewegung eines auf der Ebene liegenden Punktes.*** — Wie die Lage einer Ebene durch einen beliebigen Punkt auf ihr

vollkommen bestimmt ist, so auch ihre einfache Lagenänderung (Verschiebung) durch diejenige eines beliebigen ihrer Punkte. Bewegt sich nun eine Ebene so, dass einer ihrer Punkte eine Gerade beschreibt, so ist die Lagenänderung des Punktes, mithin auch diejenige der Ebene, durch die von dem Punkte zurückgelegte Strecke bestimmt. Gleichen Lagenänderungen entsprechen also gleiche von dem Punkte auf der Geraden zurückgelegte Strecken. Verschiedene Lagenänderungen verhalten sich an Grösse wie die entsprechenden von dem Punkte auf der Geraden zurückgelegten Strecken. — Da ein Punkt *A* der Ebene 𝔞 durch geradlinige Bewegung jeden Punkt *B* der parallelen Ebene 𝔟 erreichen kann, so kann auch die Ebene 𝔞 auf unendlich viele Arten in die Lage 𝔟 kommen. Die auf einander folgenden Lagenänderungen von 𝔞 verhalten sich also wie die entsprechenden von dem Punkte *A* auf einer beliebigen Geraden zurückgelegten Strecken. Da überdies der Punkt *A* beliebig ist, so folgt der Satz:

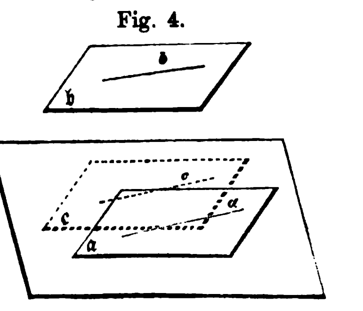
Werden zwei Geraden im Raume von einer Anzahl paralleler Ebenen geschnitten, so verhalten sich die Strecken auf der einen Geraden ebenso wie die auf der andern. 9.

Aus 9 folgt weiter:

Werden auf *einer* Geraden durch eine Anzahl von parallelen Ebenen gleiche Stücke abgeschnitten, so werden auch auf jeder anderen Geraden durch diese Ebenen gleiche Stücke abgeschnitten. 10.

7. *Bewegung einer auf der Ebene liegenden Geraden.* — Wenn eine Ebene ihre Lage ändert, so ist mit dieser Bewegung im allgemeinen noch eine Bewegung der Ebene in sich selbst verbunden. Diese letztere Bewegung kann aber von zweifacher Art sein. Wir nennen sie Verschiebung oder Drehung der Ebene in sich selbst, jenachdem eine beliebige in der Ebene liegende Gerade sich durch diese Bewegung verschiebt oder dreht. (Fig. 4 zeigt in der durch das grosse Parallelogramm dargestellten Ebene die Verschiebung des Ebenenstückes (Parallelogramms) 𝔞 nach 𝔠, wobei die Gerade *a* sich nach *c* verschiebt. Fig. 5 zeigt in derselben

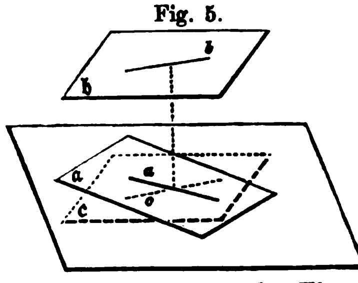
Fig. 4.



Ebene die Drehung des Ebenenstückes a nach c, wobei die Gerade *a* sich nach *c* dreht.)

Man kann nun die doppelte Bewegung der Ebene (wenn *a* nach *b* rückt) in jedem der beiden Fälle durch zwei nach einander folgende einzelne Bewegungen ersetzen, nämlich durch eine blosse Bewegung der Ebene in sich selbst, wobei *a* nach *c* geht, und eine blosse Lagenänderung, wobei *c* nach *b* geht. Durch die Grösse der Verschiebung oder Drehung von *a* nach *c* wird die Bewegung der Ebene in sich selbst gemessen, durch die Grösse der Verschiebung von *c* nach *b* die blosse Lagenänderung der Ebene. Die Grösse dieser Verschiebung wird (nach T. II, Nr. 28 und 74) durch jede auf *b* und *c* senkrecht stehende Strecke gemessen. (In Fig. 5 kann diese Strecke so gewählt werden, dass sie durch den Scheitel des Winkels *ac* geht, also zwei Punkte der Geraden *a* und *b* verbindet.)

Fig. 5.



11. 8. *Parallele Geraden in parallelen Ebenen.* — Hat eine Ebene ihre Lage ohne Drehung in sich selbst geändert, so hat auch jede Gerade auf ihr nur ihre Lage geändert. Denn eine Richtungsänderung der Geraden würde nach der Definition der Drehung der Ebene in sich selbst eben diese Drehung herbeiführen. (Demnach ist in Fig. 4 $a \parallel b \parallel c$, und in Fig. 5 $b \parallel c$.) — Hieraus folgt:

12. Sind zwei Ebenen parallel, so giebt es zu jeder Geraden der einen Ebene parallele Geraden in der anderen.

13. Umgekehrt: Durch zwei parallele Geraden kann man beliebige Paare paralleler Ebenen legen. (Denn die erste Ebene kann beliebig gewählt werden.)

Ferner folgt aus dem Begriff der Parallelität:

14. Sind zwei Geraden im Raume einer dritten parallel, so sind sie unter einander parallel.

Keine Gerade der einen von zwei parallelen Ebenen kann mit einer Geraden der anderen Ebene einen Punkt gemeinsam haben. Denn sonst hätten diesen Punkt die Ebenen selbst gemeinsam. Demnach:

15. Zwei Geraden in parallelen Ebenen haben stets verschiedene Lage.

Da nun keine Gerade der einen Ebene mit der anderen Ebene einen Punkt gemeinsam hat, so sagt man, dass die Geraden der einen Ebene der anderen Ebene parallel seien. Also:

Sind zwei Ebenen parallel, so ist jede in der 16.
einen Ebene liegende Gerade der anderen Ebene parallel.

Durch einen Punkt ausserhalb einer Ebene kann 17.
man beliebige zu der Ebene parallele Geraden ziehen.

Durch eine Gerade, welche einer Ebene parallel 18.
ist, kann man eine zu dieser Ebene parallele Ebene legen. (Denn die Gesamtheit der durch 16 bestimmten Geraden bildet eine Ebene, welche durch jede dieser Geraden hindurchgeht und bestimmt ist.)

Anm. 18 ist Umkehrung von 16. Welche andere Umkehrung von 16 lässt sich noch aufstellen?

Aus 13 und 16 folgt:

Sind zwei Geraden parallel, so ist jede derselben 19.
parallel jeder durch die andere gelegten Ebene. Anders ausgedrückt: Eine Gerade ist einer Ebene parallel, wenn man in der Ebene eine Parallele zu ihr ziehen kann.

Anm. Durch diesen Satz wird für die Parallelität einer Ebene mit einer Geraden ein Merkmal aufgestellt, welches dieselbe auf die Parallelität von Geraden zurückführt.

Umgekehrt: Ist eine Gerade $a$ einer Ebene $\mathfrak{b}$ paral- 20.
lel, so ist sie jeder in der Ebene $\mathfrak{b}$ liegenden Geraden $b$ parallel, die mit ihr selbst in einer Ebene liegt. Denn schnitten sich $a$ und $b$, so müsste, weil $b$ ganz in $\mathfrak{b}$ liegt, auch $\mathfrak{b}$ von $a$ geschnitten werden, was gegen die Annahme ist.

Ist eine von zwei Parallelen einer Ebene paral- 21.
lel, so ist auch die andere derselben parallel.

Anm. Gilt auch die Umkehrung dieses Satzes?

Sind die Schenkel eines Winkels einer Ebene ($\mathfrak{a}$) 22.
parallel, so ist die Ebene ($\mathfrak{b}$) des Winkels der Ebene ($\mathfrak{a}$) parallel. Denn die durch einen Schenkel nach 18 parallel gelegte Ebene enthält nach der zweiten Umkehrung von 18 (s. Anm. daselbst) auch den andern Schenkel. Durch beide Schenkel ist aber die Ebene ($\mathfrak{b}$) bestimmt.

Konstruiert man in der Ebene $\mathfrak{a}$ einen Winkel, dessen Schenkel denen des Winkels in der Ebene $\mathfrak{b}$ parallel sind, so ist auch $\mathfrak{a}$ durch diesen neuen Winkel vollkommen bestimmt. Mithin:

23. **Sind die Schenkel zweier Winkel paarweise parallel, so sind die Ebenen der Winkel parallel (und die Winkel gleich).**

Anm. Durch diesen Satz wird für die Parallelität zweier Ebenen ein Merkmal aufgestellt, welches dieselbe auf die Parallelität von Geraden zurückführt. — Aus der Definition des Winkels als Richtungsunterschied folgt, dass die beiden Winkel auch einander gleich sind. Der Satz 53 in T. II gilt also allgemein.

Hieraus folgt die Lösung der

**Aufgabe 1. — Durch einen gegebenen Punkt $A_1$ zu einer gegebenen Ebene $ABC$ die parallele Ebene zu legen.**

Man lege die Ebenen $A_1AB$ und $A_1AC$, ziehe in der ersteren $A_1B_1 \parallel AB$, in der letzteren $A_1C_1 \parallel AC$, und lege die Ebene $A_1B_1C_1$. Diese ist die gesuchte.

24. 9. *Windschiefe Geraden in parallelen Ebenen.* — **Hat eine Ebene ihre Lage mit Drehung in sich selbst geändert, so hat jede Gerade auf ihr ihre Richtung geändert.**

Ist durch diese Bewegung die Gerade $a$ (Fig. 5) in $b$ übergegangen, so haben $a$ und $b$ verschiedene Lage (nach 15) und ungleiche Richtung (nach 24). — Zwei Geraden ($a$, $b$) mit verschiedener Lage und ungleicher Richtung heissen **windschief.**

25. **Sind zwei Ebenen parallel, so sind alle Geraden der einen Ebene mit einer gegebenen Geraden der anderen Ebene entweder parallel oder windschief.**

Da in derselben Ebene zwei Geraden mit verschiedener Lage und ungleicher Richtung nicht vorkommen können (T. II, Nr. 30), so folgt weiter:

26. **Durch zwei windschiefe Geraden kann man keine Ebene legen.**

Da ferner zwei windschiefe Geraden in zwei parallelen Ebenen enthalten sind, so folgt umgekehrt:

27. **Durch zwei windschiefe Geraden kann man zwei parallele Ebenen legen.** — Sind $a$ und $b$ die Geraden, $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ die Ebenen (Fig. 5), so muss nach 16 $b \parallel \mathfrak{a}$ sein. Da nun die Ebene $\mathfrak{a}$ ausserdem die Gerade $a$ enthalten muss, so kann $\mathfrak{a}$ nicht beliebig angenommen werden, sondern ist vollständig bestimmt. Es ist daher auch nur **ein** Paar paralleler Ebenen möglich. Hieraus folgt weiter:

28. **Durch eine von zwei windschiefen Geraden kann**

man nur *eine* Ebene legen, die mit der anderen parallel ist. — Sind $a$ und $b$ die Geraden, $\mathfrak{a}$ die Ebene, so ist $\mathfrak{a}$ erstens durch $a$ bestimmt. Da ferner $b \parallel \mathfrak{a}$ sein soll, so kann man nach 20 in $\mathfrak{a}$ die Gerade $c \parallel b$ ziehen, wobei $c$ und $b$ in einer Ebene liegen. Dann ist $\mathfrak{a}$ zweitens durch $c$ bestimmt (nach 19). Hieraus folgt die Lösung der

Aufgabe 2. — Durch eine von zwei windschiefen Geraden $a$ diejenige Ebene zu legen, welche mit der anderen $b$ parallel ist.

Man lege durch $b$ und einen beliebigen Punkt $A$ der Geraden $a$ eine Ebene, ziehe in derselben durch $A$ $c \parallel b$, und lege die Ebene $ac$. Diese ist die gesuchte.

Anm. Hierdurch ist auch die Aufgabe erledigt: Durch zwei windschiefe Geraden die parallelen Ebenen zu legen. Man löst erst Aufgabe 2, dann Aufgabe 1, wobei man die Gerade $b$ durch einen beliebigen ihrer Punkte ersetzt.

## 2) Seitenänderung der Ebene. — Der Raumwinkel.

**10.** *Drehung.* — Ist eine Ebene $\mathfrak{a}$ durch Aenderung ihrer Seite (ohne ihre Lage und Richtung zu ändern) in $\mathfrak{b}$ übergegangen, so giebt es jedenfalls eine einzige Gerade auf ihr, welche an der Bewegung nicht teilnahm, die also $\mathfrak{b}$ mit $\mathfrak{a}$ gemeinsam hat. — Denn gäbe es keine solche Gerade, so hätten beide Ebenen nicht dieselbe Lage und Richtung; gäbe es aber darin mehr als eine, so wären beide Ebenen in derselben Weise bestimmt (nach 1); also könnte keine Seitenänderung stattgefunden haben. — Wir nennen diese Art der Bewegung einer Ebene Drehung, die ruhende Gerade $o$ die Drehungsaxe (Axe), und sagen, $\mathfrak{a}$ habe sich um $o$ bis $\mathfrak{b}$ gedreht.

Fig. 6.

Drehung einer Ebene ist also Aenderung ihrer Seite mit Beibehaltung ihrer Lage und Richtung. Von zwei Ebenen mit verschiedener Seite aber derselben Lage und Richtung sagt man, sie schneiden sich.

Zwei sich schneidende Ebenen entstehen, wenn zwei zusammenfallende Geraden $o$ sich nach verschiedenen Seiten bewegen.

Zwei Ebenen können sich nur in *einer* Geraden 29.
schneiden. Denn nach 1 müssen zwei Ebenen, die zwei Geraden gemeinsam haben, zusammenfallen.

Eine Ebene $\mathfrak{a}$ kann nur auf eine Art in $\mathfrak{b}$ übergehen und beschreibt dabei einen Teil des Raumes.

29a. **Schneidet eine Ebene eine von zwei parallelen Ebenen, so schneidet sie auch die andere.**

**11.** ***Beziehungen zwischen zwei Ebenen.*** — Verschiebung und Drehung sind hiernach zwei verschiedene Arten einfacher Bewegung, die von einer Ebene ausgeführt werden können.*)

Aus den obigen Betrachtungen geht hervor, dass allgemein die Gesetze gelten:

Zwei Ebenen mit derselben Lage und Richtung haben stets ungleiche Seite (und umgekehrt).

Zwei Ebenen mit gleicher Seite haben stets verschiedene Lage und Richtung (und umgekehrt).

Anm. Zwei Ebenen, die sich durch Lage, Richtung und Seite unterscheiden, sind im Raume nicht möglich. Sollte eine Ebene durch zwei aufeinanderfolgende Bewegungen einmal Lage und Richtung und sodann die Seite ändern, so müsste sie bei der zweiten Bewegung (wenn sie nicht mit der ursprünglichen Ebene wieder dieselbe Lage und Richtung erhalten sollte) aus dem Raume heraustreten, was nicht denkbar ist. (Vgl. T. II, Nr. 30.)

Zwei parallele Ebenen teilen den Raum in drei, zwei sich schneidende in vier unvollständig begrenzte Teile.

### Der Raumwinkel zweier Ebenen.

**12.** ***Definition des Raumwinkels zweier Ebenen.*** — Die Grösse der Drehung einer Ebene kann ebensowenig wie diejenige einer Geraden unmittelbar durch ein Gebilde veranschaulicht werden. (Vgl. T. II, Nr. 31.) Sind ferner zwei sich schneidende Ebenen gegeben, so muss, ähnlich wie dort, auf jeder Ebene eine ihrer beiden Seiten festgesetzt werden, damit die Grösse der Drehung, durch welche eine Ebene die Seite der andern annimmt, eine völlig bestimmte sei.

**Die Drehungsgrösse zwischen zwei Ebenen heisst ihr (Raum-) Winkel.**

Die Axe der beiden Ebenen heisst Scheitellinie des Winkels, die Ebenen selbst, von der Scheitellinie an gerechnet, heissen Schenkelebenen des Winkels.

Anm. Eine Schenkelebene des Winkels beschreibt bei ihrer Drehung einen Teil des Raumes, der von den beiden Schenkelebenen unvollständig begrenzt wird. — Unter der Lage eines Raumwinkels versteht man die Lage dieses von seinen Schenkelebenen eingeschlossenen Raumstückes. — Hinsichtlich der doppelten Bedeutung des Raumwinkels gilt dasselbe wie beim Winkel in der Ebene. (S. T. II, Anm. in Nr. 32.)

---

*) Wie die Verschiebung als specieller Fall der Drehung betrachtet werden kann, wird später gezeigt werden (Nr. 26).

Da die Drehungsgrösse zwischen zwei Ebenen sich, wie in Nr. 17 gezeigt werden wird, durch einen ebenen Winkel darstellen lässt, so reducieren sich alle weiteren Untersuchungen über Raumwinkel auf diejenigen über ebene Winkel (T. II, Nr. 33, 34, 37—40, 45 ff.). Umgekehrt geht aus jedem Satze, welcher die Winkel und Seitenlinien einer ebenen Figur betrifft, ein Satz über Raumwinkel und Ebenen hervor, wenn man die Ebene jener Figur einer einfachen Verschiebung unterwirft.

Wie eine Gerade in der Ebene, so kann sich auch eine Ebene im Raume nach zwei entgegengesetzten Seiten drehen. Wir können daher dem Raume zwei entgegengesetzte Seiten zuschreiben. Wie man von einem Punkte einer Ebene sagen kann, er liege diesseits oder jenseits einer in der Ebene gezogenen Geraden, und von einem Punkte des Raumes, er liege oberhalb oder unterhalb einer im Raume gelegten Ebene, so könnte man auch von einem Punkte, welcher in einem vierdimensionalen Gebiete läge, sagen, er liege innerhalb oder ausserhalb des in jenem Gebiete befindlichen Raumes. Wir vermögen aber ebensowenig uns ein solches Gebiet vorzustellen, wie die Lage eines Punktes ausserhalb des Raumes. — Aber aus der Möglichkeit, dass jede Ebene sich nach zwei entgegengesetzten Seiten drehen kann, folgt, dass von einer Ebene aus im Raume jede Konstruktion auf zwei entgegengesetzte Arten so ausgeführt werden kann, dass die konstruierten Gebilde gleiche Grösse und Gestalt haben (vgl. T. II, Nr. 42).

Gleiche Konstruktionen von einer (oder verschiedenen) Ebenen aus nach entgegengesetzten Seiten 29a.
geben gleiche aber entgegengesetzte (symmetrische) Resultate.

Anm. Zwei symmetrische Gebilde der Ebene kann man dadurch zur Deckung (Kongruenz) bringen, dass man das eine von der entgegengesetzten Seite der Ebene aus betrachtet (ihm die entgegengesetzte Seite giebt). Was wäre hiernach erforderlich, um zwei symmetrische Gebilde des Raumes zur Deckung (Kongruenz) zu bringen?

**13.** *Bewegung einer in der Ebene liegenden Geraden. — Vorbemerkung.* — Dreht eine Ebene sich um eine in ihr liegende Gerade $o$, so beschreibt jede in ihr liegende Gerade $a$ eine Fläche. Die Gestalt dieser Fläche ist aber eine verschiedene, jenachdem sich $a$ zu $o$ in schiefer, paralleler oder senkrechter Richtung befindet. Da die beiden letzteren Richtungen als specielle Arten der ersteren angesehen werden können, so sind auch die in den beiden letzten Fällen entstehenden Flächen specielle Arten der im ersten Falle entstehenden.

**14.** a) *Die Gerade a in schiefer Richtung zur Axe. — Resultat der Drehung: Die gemeine Kegelfläche.* — Macht eine Ebene um eine in ihr liegende Gerade *o* eine ganze Umdrehung, so beschreibt jede zur Axe *o* schief liegende Gerade *a* eine krumme Fläche, die man (gemeine) Kegelfläche nennt.

Fig. 7.

Anm. Angenommen, die Ebene des Papiers drehe sich in Fig. 7 um die Axe *o*, so beschreiben zwei auf *a* beliebig angenommene Punkte $A_1$ und $A_2$ Kreislinien, die auf der von *a* beschriebenen Kegelfläche liegen und in der Figur die Gestalt derselben andeuten. — Da die sich drehende Ebene zum zweiten Male mit der Ebene des Papiers zusammenfällt, wenn sie eine halbe Umdrehung gemacht hat, so gerät auch die Gerade *a* noch einmal in die letztere Ebene. Die Kegelfläche wird also von der Ebene des Papiers in zwei Geraden, *a* und *b*, geschnitten.

Die auf verschiedenen Seiten von *o* liegenden Teile von *a* beschreiben zwei Teile der Kegelfläche, welche nur durch den Schnittpunkt von *a* und *o* zusammenhängen. Die vollständige Kegelfläche besteht also aus zwei getrennten Teilen. Da diese Teile jedoch offenbar ebenso unter einander kongruent sind, wie die durch *a* und *o* gebildeten Scheitelwinkel, so pflegt man nur einen dieser Teile zu betrachten und als Kegelfläche zu bezeichnen.

Die Gerade *o* heisst Axe, die Gerade *a* in allen ihren verschiedenen Richtungen Seitenlinie, der Schnittpunkt von *a* und *o* (*O*) Spitze, jede durch die Axe gelegte Ebene (also die sich drehende Ebene in ihren verschiedenen Stellungen) Axenschnitt, endlich der Winkel zweier in demselben Axenschnitt liegenden Seitenlinien (*ab*) Winkel an der Spitze der Kegelfläche.

Aus der Entstehungsweise der Kegelfläche folgen unmittelbar die Sätze:

30. Alle Seitenlinien einer Kegelfläche bilden mit der Axe gleiche Winkel.

31. Auf der Kegelfläche können durch ihre Spitze beliebige Geraden gezogen werden.

Da man durch je zwei Seitenlinien der Kegelfläche eine Ebene legen kann, welche durch ihre Spitze geht, so folgt umgekehrt:

32. Jede durch die Spitze einer Kegelfläche gelegte Ebene schneidet die Kegelfläche entweder gar nicht oder in zwei Seitenlinien.

Jede durch eine Seitenlinie der Kegelfläche gelegte Ebene schneidet die Kegelfläche nur noch in einer zweiten Seitenlinie (32). 33.

Da ferner jede Fläche, auf der man in jedem ihrer Punkte zwei gerade Linien ziehen kann, eine Ebene ist (Umk. z. 1), so folgt:

Auf der Kegelfläche kann man durch einen beliebigen ihrer Punkte (mit Ausnahme der Spitze) nur *eine* Gerade ziehen. — Alle auf der Kegelfläche gezogenen Geraden schneiden sich in der Spitze. 34.

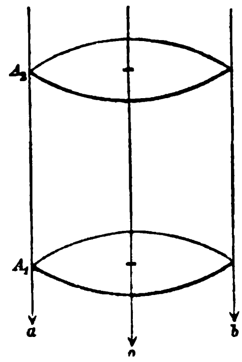
Auf der Kegelfläche können ausser den Seitenlinien keine anderen geraden Linien gezogen werden. 35.

Anm. Ein Modell der Kegelfläche (begrenzt durch die von $A_1$ beschriebene Kreislinie) liefert ein aus Papier geschnittener Kreissektor, dessen Ränder längs der Richtung der begrenzenden Radien zusammengeklebt werden.

Im allgemeinen versteht man unter Kegelfläche jede Fläche, die von einer Geraden beschrieben wird, welche sich im Raume beliebig um einen ihrer Punkte dreht. Eine von einem beliebigen anderen Punkte dieser Geraden beschriebene Linie heisst, weil sie zur näheren Bestimmung der Gestalt der Kegelfläche dient, Leitlinie der Kegelfläche. Die Leitlinie der gemeinen Kegelfläche ist eine Kreislinie. Hiernach ist die Ebene ein specieller Fall der gemeinen Kegelfläche (T. II, Nr. 29 und 35).

**15.** b) *Die Gerade a in paralleler Richtung zur Axe. — Resultat der Drehung: Die gemeine Cylinderfläche.* — Macht eine Ebene um eine in ihr liegende Gerade *o* eine ganze Umdrehung, so beschreibt jede zur Axe *o* parallele Gerade *a* eine krumme Fläche, die man (gemeine) Cylinderfläche nennt.

Fig. 8.




Da die parallelen Geraden *a* und *o* als solche angesehen werden können, die sich in einem unendlich fernen Punkte schneiden (T. II, Nr. 58), so kann auch die Cylinderfläche als specieller Fall der Kegelfläche angesehen werden, d. h. als Kegelfläche, deren Spitze auf der Axe in unendliche Entfernung gerückt ist. Demnach folgt aus jeder Eigenschaft der Kegelfläche ohne weiteres eine entsprechende Eigenschaft der Cylinderfläche.

Anm. Angenommen, die Ebene des Papiers drehe sich in Fig. 8 um die Axe *o*, so beschreiben zwei auf *a* beliebig angenommene Punkte $A_1$ und $A_2$ Kreislinien, die auf der von *a* beschriebenen Cylinderfläche liegen und in der Figur die Gestalt derselben andeuten. — Die Cylinderfläche wird von der Ebene des Papiers in zwei Geraden, *a* und *b*, geschnitten. — Die Cylinderfläche entsteht auch durch Bewegung einer Kreislinie auf einer sich verschiebenden Ebene.

Die Gerade *o* heisst Axe, die Gerade *a* in allen ihren verschiedenen Lagen Seitenlinie, jede durch die Axe gelegte Ebene Axenschnitt der Cylinderfläche.

Aus den Sätzen 30—35 folgt:

36. Alle Seitenlinien einer Cylinderfläche sind der Axe parallel (30).

37. Auf der Cylinderfläche können beliebige der Axe parallele Geraden gezogen werden (31).

38. Jede mit der Axe einer Cylinderfläche parallel gelegte Ebene schneidet die Cylinderfläche entweder gar nicht oder in zwei Seitenlinien (32).

39. Jede durch eine Seitenlinie der Cylinderfläche gelegte Ebene schneidet die Cylinderfläche nur noch in einer zweiten Seitenlinie (33).

40. Auf der Cylinderfläche kann man durch einen beliebigen ihrer Punkte nur *eine* Gerade ziehen (34). — Alle auf der Cylinderfläche gezogenen Geraden sind einander parallel.

41. Auf der Cylinderfläche können ausser den Seitenlinien keine anderen geraden Linien gezogen werden (35).

Anm. Ein Modell der Cylinderfläche (begrenzt durch die von $A_1$ und $A_2$ beschriebenen Kreislinien) liefert ein aus Papier geschnittenes Rechteck, dessen Ränder längs der Richtung zweier Gegenseiten zusammengeklebt werden.

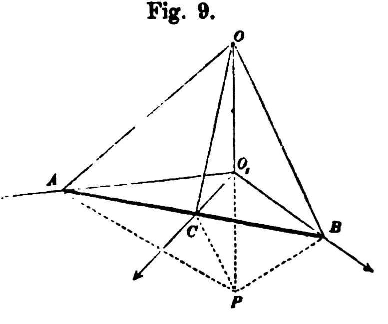
Im allgemeinen versteht man unter Cylinderfläche jede Fläche, die von einer Geraden beschrieben wird, welche sich beliebig im Raume verschiebt. Eine von einem beliebigen anderen Punkte dieser Geraden beschriebene Linie heisst, weil sie zur näheren Bestimmung der Gestalt der Cylinderfläche dient, Leitlinie der Cylinderfläche. Die Leitlinie der gemeinen Cylinderfläche ist eine Kreislinie. — Hiernach ist auch die Ebene ein specieller Fall der gemeinen Cylinderfläche (T. II, Nr. 27 und 28).

**16.** c) *Die Gerade a in senkrechter Richtung zur Axe. — Resultat der Drehung: Die Ebene.* — Nimmt man in Fig. 7 an, dass die Gerade *a* zur Axe *o* senkrecht stehe, so müssen, weil

Winkel $(ao) = (bo)$ ist, $b$ und $a$ entgegengesetzte Richtung haben und in dieselbe Gerade fallen. Es kann also jeder Punkt dieser Geraden als Schnittpunkt von $a$ und $b$, d. h. als Spitze der entstehenden Kegelfläche betrachtet werden. — Ferner steht die Gerade $a$ während ihrer Bewegung beständig auf $o$ senkrecht, und zu jeder ihrer Stellungen $a_1$ giebt es eine entgegengesetzte Stellung $b_1$, in welche $a_1$ gerät, nachdem die Ebene eine halbe Umdrehung gemacht hat. Und ebenso wie $b$ mit $a$, fällt auch $b_1$ mit $a_1$ zusammen. — Demnach kann nicht nur jeder Punkt der Geraden $a\,(b)$, sondern jeder Punkt einer jeden Seitenlinie $a_1\,(b_1)$ als Spitze der entstehenden Kegelfläche betrachtet werden; d. h.: die in diesem Falle entstehende Kegelfläche hat die Eigenschaft, dass man auf ihr durch jeden ihrer Punkte beliebige Geraden ziehen kann (31). Nach der Umkehrung zu 1 muss also diese Kegelfläche eine Ebene sein.

Anm. Andere Ableitungen dieses Resultates: 1) Die Kegelfläche wird von jeder durch die Axe gehenden Ebene in zwei Geraden geschnitten (32). Sie wird nur in einer Geraden geschnitten, wenn die erzeugende Gerade auf der Axe senkrecht steht. Da nun zwei Ebenen sich stets nur in einer Geraden schneiden, so kann umgekehrt eine Fläche, die von allen (durch eine Gerade gehenden) Ebenen nur in einer Geraden geschnitten wird, selbst nur eine Ebene sein. Mithin geht in diesem Falle die Kegelfläche in eine Ebene über.

Fig. 9.




2) Es sei in Fig. 9 $OO_1$ die Drehungsaxe, und $O_1A$ und $O_1B$ zwei beliebige Stellungen der auf der Axe senkrechten, die Kegelfläche erzeugenden Geraden. Legt man die Ebene $AO_1B$ und zieht in derselben $O_1C$ in beliebiger Richtung, so kann man durch einen beliebigen Punkt $C$ der Geraden $O_1C$ stets eine Gerade $AB$ so ziehen, dass $AC = CB$ ist (T. II, Aufgabe 143). Dann ist (nach T. II, 366)

im Dreieck $\overline{OAB}$: $OA^2 + OB^2 = 2OC^2 + 2AC^2$;

im Dreieck $\overline{O_1AB}$: $O_1A^2 + O_1B^2 = 2O_1C^2 + 2AC^2$;

subtrahiert: $OA^2 - O_1A^2 + OB^2 - O_1B^2 = 2(OC^2 - O_1C^2)$,

oder nach T. II, 362: $OO_1{}^2 + OO_1{}^2 = 2(OC^2 - O_1C^2)$

oder: $OO_1{}^2 = OC^2 - O_1C^2$;

d. h.: Das Dreieck $\overline{OO_1C}$ ist rechtwinklig, oder $O_1C \perp OO_1$. Hieraus folgt aber, dass alle auf $OO_1$ in $O_1$ senkrecht stehenden Geraden in der durch $O_1A$ und $O_1B$ bestimmten Ebene liegen, dass also $O_1A$ diese Ebene beschreibt.

3) Man verlängere in Fig. 9 $OO_1$ über $O_1$ hinaus um sich selbst bis $P$. Dann ist

$\overline{OAO_1} \cong \overline{PAO_1}$; $\overline{OBO_1} \cong \overline{PBO_1}$; $\overline{OAB} \cong \overline{PAB}$; $\overline{OAC} \cong \overline{PAC}$; $\overline{OCO_1} \cong \overline{PCO_1}$;

folglich:

$OA = PA$; $OB = PB$; $OAC = PAC$; $OC = PC$; $OO_1C = PO_1C$.

Da aber $OO_1C$ und $PO_1C$ Nebenwinkel und einander gleich sind, so sind sie gleich $R$; d. h.: $O_1C \perp OO_1$.

42. **Folgerungen: Dreht sich ein rechter Winkel um einen seiner Schenkel, so beschreibt der andere eine Ebene.**

Da diese Ebene durch zwei Richtungen des sich drehenden Schenkels bestimmt ist (1), so folgt weiter:

43. **Steht eine Gerade auf zwei Geraden in deren Schnittpunkte senkrecht, so steht sie auf jeder in der Ebene der beiden Geraden durch ihren Schnittpunkt gezogenen Geraden senkrecht.**

44. **Alle Geraden, die auf einer Geraden in demselben Punkte senkrecht stehen, liegen in einer Ebene.**

**17.** *Zurückführung des Raumwinkels auf einen ebenen Winkel.* — Macht eine Ebene um eine in ihr liegende Gerade $o$ eine halbe Umdrehung, so ist, wie eben gezeigt, unter allen durch irgend einen Punkt der Linie $o$ gezogenen Geraden die auf $o$ senkrechte ($c$) die einzige, welche einen ebenen Winkel beschreibt. Da dieser Winkel ein gestreckter ist, so hat die Senkrechte ebenso wie die Ebene eine halbe Umdrehung gemacht. Da ferner die Gerade $c$ und die Ebene ein und dieselbe Bewegung ausführen, so vollenden beide auch den $n^{\text{ten}}$ Teil einer halben Umdrehung durch dieselbe Bewegung; d. h.: **Für jede Drehung der Ebene ist die Drehungsgrösse von $c$ derjenigen der Ebene gleich.** Demnach kann die Drehung der Ebene durch diejenige von $c$ gemessen werden, und da die Lage von $c$ beliebig ist, so hat man den Satz:

45. **Die Drehung einer Ebene ist eben so gross als diejenige einer beliebigen, auf der Axe senkrechten Geraden in der Ebene.**

Der Raumwinkel zweier Ebenen wird hiernach als ebener Winkel konstruiert, indem man in beiden Ebenen auf der Axe in einem beliebigen ihrer Punkte Senkrechten errichtet. Ein derartig konstruierter Winkel heisst **Neigungswinkel** der beiden Ebenen.

46. Folgerungen: **Alle Neigungswinkel zweier Ebenen sind einander gleich** (23).

**Alle Neigungswinkel zweier Ebenen liegen in** 47.
**parallelen Ebenen** (23).

Da jede zur Axe schief stehende Gerade *a* (Fig. 7) nach einer halben Umdrehung der Ebene mit ihrer neuen Richtung *b* einen spitzen Winkel bildet, so beschreibt sie auch, wenn die Ebene den $n^{\text{ten}}$ Teil einer Umdrehung macht, einen kleineren Winkel als eine zur Axe senkrechte Gerade, d. h.:

**Unter allen Geraden einer sich drehenden Ebene** 48.
**beschreibt eine zur Axe senkrechte den grössten Winkel; zwei Geraden, welche gleiche Winkel mit der Axe bilden, beschreiben gleiche Winkel; von zwei Geraden, welche ungleiche Winkel mit der Axe bilden, beschreibt diejenige, welche den kleineren Winkel mit der Axe bildet, den kleineren Winkel.**

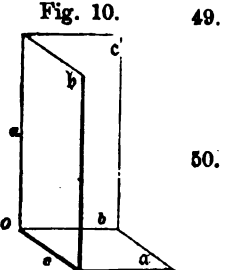
Anm. Hierbei ist unter dem Winkel, welchen die Gerade beschreibt, nur der Unterschied zwischen ihrer Anfangs- und Endrichtung verstanden. Die wirkliche Drehungsgrösse der Geraden wird aber durch diesen Winkel nur dann ausgedrückt, wenn die Gerade zur Axe senkrecht steht, weil die Gerade nur in diesem Falle eine Ebene beschreibt. In allen anderen Fällen ist der Winkel zweier Geraden im Raume kleiner als die Drehungsgrösse zwischen ihnen.

Ist der Neigungswinkel zweier Ebenen ein rechter, so sagt man, dass die Ebenen **auf einander senkrecht stehen.**

**18.** *Die Gerade in senkrechter Richtung zur Ebene.* — Wenn eine Gerade eine Ebene so schneidet, dass sie auf allen, durch ihren Schnittpunkt mit der Ebene in dieser gezogenen Geraden senkrecht steht, so sagt man, sie **stehe auf der Ebene senkrecht.** — Aus 43 folgt nun:

**Steht eine Gerade** (*a*) **auf zwei Geraden** (*b*, *c*) **senkrecht, die durch ihren** 49.
**Schnittpunkt mit einer Ebene** (𝔞) **in dieser gezogen sind, so steht sie auf der Ebene senkrecht** (Fig. 10).

Fig. 10.

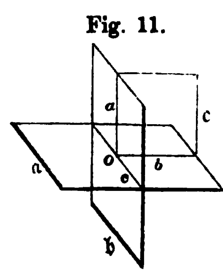



Umgekehrt: **Steht eine Gerade auf** 50.
**einer Ebene senkrecht, so steht sie auf jeder durch ihren Schnittpunkt mit der Ebene in dieser gezogenen Geraden senkrecht.**

Da *a* auf *b* und *c* senkrecht steht, so ist (*bc*) der Neigungswinkel der Ebenen 𝔟 und 𝔠. Aus 49 folgt also:

**Die Ebene des Neigungswinkels zweier Ebenen** 51.
**steht auf jeder der beiden Ebenen senkrecht.**

Fig. 11.




Legt man durch *a* (Fig. 11) eine beliebige Ebene b, welche die Ebene a in *e* schneidet und errichtet in a die Gerade *b* senkrecht auf *e*, so steht *a* auf *e* (nach 50) und *b* auf *e* senkrecht; mithin ist (*ab*) der Neigungswinkel von a und b, und da derselbe nach 50 ein Rechter ist, so steht b auf a senkrecht; d. h.:

52. Steht eine Gerade auf einer Ebene senkrecht, so steht jede durch die Gerade gelegte Ebene auf der ersten Ebene senkrecht.

53. Umkehrungen von 52: Stehen zwei Ebenen senkrecht zu einander, so steht jede Gerade, welche man in einer von ihnen senkrecht zur Axe errichtet oder fällt, senkrecht zur andern.

54. Stehen zwei Ebenen senkrecht zu einander, und errichtet man in einem Punkte der Axe eine Senkrechte auf der ersten Ebene, so liegt diese Senkrechte in der zweiten Ebene.

55. Stehen zwei Ebenen senkrecht zu einander, und fällt man von einem Punkte der zweiten Ebene eine Senkrechte auf die erste, so liegt diese Senkrechte in der zweiten Ebene.

Stehen zwei Ebenen b und c (Fig. 10) auf einer dritten a senkrecht, und errichtet man im Schnittpunkte der beiden Axen *b* und *e* auf a die Senkrechte *a*, so liegt dieselbe nach 54 sowohl in b wie in c, ist also Schnittlinie beider Ebenen. Daraus folgt als weitere Umkehrung zu 52:

56. Stehen zwei Ebenen zu einer dritten senkrecht, so steht auch ihre Schnittlinie zur dritten Ebene senkrecht.

Da in jeder Ebene c, die man durch *a* legen kann (Fig. 10), im Punkte *O* sich nur eine Senkrechte auf *b* errichten lässt, und alle diese Senkrechten nach 50 in *a* zusammenfallen, so folgt:

57. In einem Punkte (*O*) einer Ebene (a) lässt sich auf derselben nur *eine* Senkrechte (*a*) errichten.

Anm. Andrer Beweis für 57: Eine zweite Senkrechte $a_1$ würde mit *a* zusammen eine Ebene c bestimmen, in welcher nach 50 sowohl *a* wie $a_1$ auf *b* senkrecht stehen müssten.

58. Von einem ausserhalb einer Ebene liegenden Punkte lässt sich auf dieselbe nur *eine* Senkrechte fällen (55, 50).

**Anm.** Andrer Beweis für 58 ähnlich wie für 57.

Hiernach ist durch die Seite einer Ebene die Richtung einer auf ihr senkrechten Geraden vollkommen bestimmt. Daraus folgt weiter:

Zwei Geraden, die auf derselben Ebene senkrecht stehen, sind parallel. 59.

Umgekehrt: Steht eine von zwei parallelen Geraden auf einer Ebene senkrecht, so steht auch die andere auf ihr senkrecht. 59a.

Nach 42 ist durch eine Gerade die in einem ihrer Punkte senkrecht stehende Ebene vollkommen bestimmt. Folglich:

Durch einen Punkt einer Geraden lässt sich nur *eine* zu der Geraden senkrechte Ebene legen. 60.

**Anm.** Andrer Beweis für 60: Eine Gerade *c* kann nicht auf zwei sich schneidenden Ebenen c und $c_1$ gleichzeitig senkrecht stehen. Denn legt man durch die Gerade eine beliebige, die Axe schneidende Ebene, welche c in *b* und $c_1$ in $b_1$ schneidet, so müsste in dieser Ebene *c* auf den sich schneidenden Geraden *b* und $b_1$ zugleich senkrecht stehen.

Hiernach ist durch die Richtung einer Geraden die Seite einer auf ihr senkrechten Ebene vollkommen bestimmt. Daraus folgt weiter:

Zwei Ebenen, die auf derselben Geraden senkrecht stehen, sind parallel. 61.

Umgekehrt: Steht eine Gerade auf einer von zwei parallelen Ebenen senkrecht, so steht sie auch auf der andern senkrecht. 61a.

Aus 51 folgt die Lösung der

Aufgabe 3. — Durch eine in der Ebene a gegebene Gerade *b* die zu a senkrechte Ebene c zu legen (Fig. 12).

Fig. 12.

Man errichte in a die Gerade *c* senkrecht auf *b*, lege durch *c* die Ebene b beliebig, errichte in b im Punkte *O* die Gerade *a* senkrecht auf *c*, und lege die Ebene $ab = c$. Diese ist die gesuchte.

Ferner folgt aus 53 die Lösung der

Aufgabe 4. — In einem in der Ebene a gegebenen Punkte *A* die zu a senkrechte Gerade zu errichten.

Man ziehe durch *A* in der Ebene a die Gerade *b* beliebig, konstruiere nach Aufg. 3 die Ebene c und errichte in c auf *b* im Punkte *A* die Senkrechte *AB*. Diese ist die gesuchte.

Aufgabe 5. — Aus einem ausserhalb der Ebene $\mathfrak{a}$ gegebenen Punkte $B$ die zu $\mathfrak{a}$ senkrechte Gerade zu fällen.

Man lege durch $B$ die Ebene $\mathfrak{b}$ beliebig, fälle in $\mathfrak{b}$ die Gerade $a$ senkrecht auf $c$, errichte in $\mathfrak{a}$ die Gerade $b$ senkrecht auf $c$, lege die Ebene $ab = \mathfrak{c}$, und fälle in $\mathfrak{c}$ aus $B$ auf $b$ die Senkrechte $BA$. Diese ist die gesuchte nach 53.

Aufgabe 6. — Durch eine ausserhalb der Ebene $\mathfrak{a}$ gegebene Gerade $a$ die zu $\mathfrak{a}$ senkrechte Ebene $\mathfrak{c}$ zu legen.

Man nehme in $a$ den Punkt $B$ beliebig an, fälle nach Aufgabe 5 die auf $\mathfrak{a}$ senkrechte Gerade $BA$ und lege durch $BA$ und $a$ die Ebene $\mathfrak{c}$. Diese ist die gesuchte nach 52.

Anm. Es ist gleichgültig, ob $a$ und $\mathfrak{a}$ sich schneiden oder parallel sind. — Mittelst 59 kann Aufgabe 4 durch Aufgabe 5 oder auch umgekehrt gelöst werden.

Aus 49 folgt die Lösung der

Aufgabe 7. — Durch einen auf der Geraden $c$ gegebenen Punkt $O$ die zu $c$ senkrechte Ebene $\mathfrak{c}$ zu legen.

Man lege durch $c$ die Ebenen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ beliebig, errichte in $O$ auf $c$ in der Ebene $\mathfrak{a}$ die Senkrechte $b$, in der Ebene $\mathfrak{b}$ die Senkrechte $a$, und lege die Ebene $ab = \mathfrak{c}$. Diese ist die gesuchte.

Aufgabe 8. — Durch einen ausserhalb der Geraden $c$ gegebenen Punkt $B$ die zu $c$ senkrechte Ebene $\mathfrak{c}$ zu legen.

Man lege durch $B$ und $c$ die Ebene $\mathfrak{b}$, ferner durch $c$ die Ebene $\mathfrak{a}$ beliebig, fälle aus $B$ in der Ebene $\mathfrak{b}$ die Senkrechte $BO = a$ auf $c$, errichte in $O$ in der Ebene $\mathfrak{a}$ die Senkrechte $b$ auf $c$, und lege die Ebene $ab = \mathfrak{c}$. Diese ist die gesuchte.

### Der Neigungswinkel einer Geraden und einer Ebene.

**19.** *Definition und Eigenschaften des Neigungswinkels einer Geraden und einer Ebene.* — Der Neigungswinkel $(\mathfrak{ab})$ zweier Ebenen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ wird gleichzeitig Neigungswinkel der Geraden $a$ gegen die Ebene $\mathfrak{b}$ und Neigungswinkel der Geraden $b$ gegen die Ebene $\mathfrak{a}$ genannt.

Ist der Neigungswinkel der beiden Ebenen ein rechter, so steht die Gerade $a$ auf der Ebene $\mathfrak{b}$ senkrecht. (Denn sie steht auf $b$ und auf der Axe der beiden Ebenen senkrecht, folglich nach 49 auf der Ebene $\mathfrak{b}$.)

Der zweite Schenkel *b* des Neigungswinkels der Geraden *a* gegen die Ebene 𝔟 heisst der N e i g u n g s s c h e n k e l der Geraden *a*.

Fig. 13.

Steht *a* auf 𝔟 senkrecht, so wird die Richtung des Neigungsschenkels beliebig, weil alsdann jede durch den Fusspunkt von *a* in 𝔟 gezogene Gerade durch Drehung um *R* in die Richtung *a* kommen kann.

Da nach 51 die Ebene *ab* auf 𝔟 senkrecht steht, so liegt nach 55 jede aus einem Punkte der Geraden *a* auf die Ebene 𝔟 gefällte Senkrechte in der Ebene *ab*; also:

S t e h t e i n e G e r a d e s c h i e f z u e i n e r E b e n e, s o l i e g e n a l l e a u s P u n k t e n d e r G e r a d e n a u f d i e E b e n e g e f ä l l t e n S e n k r e c h t e n i n d e r E b e n e d e s N e i g u n g s w i n k e l s, u n d d i e F u s s p u n k t e d i e s e r S e n k r e c h t e n a u f d e m N e i g u n g s s c h e n k e l. 62.

Anm. Da der Neigungsschenkel durch den Schnittpunkt der Geraden *a* mit der Ebene 𝔟 und durch einen beliebigen jener Fusspunkte bestimmt ist, so folgt aus 62 die K o n s t r u k t i o n d e s N e i g u n g s w i n k e l s d e r G e r a d e n *a* g e g e n d i e E b e n e 𝔟.

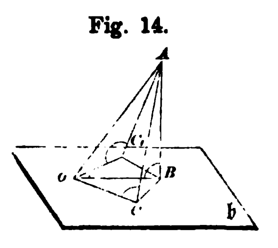


Fig. 14.

Zieht man durch den Schnittpunkt *O* einer Geraden *OA* und einer Ebene 𝔟 in dieser letzteren ausser dem Neigungsschenkel *OB* noch eine beliebige Gerade *OC*, legt die Ebene *AOC*, fällt in derselben $AC \perp OC$ und legt die Ebene *ABC*, so ist $ABC = R$ (50), $AC > AB$ (T. II, 108) und $AOC > AOB$ (T. II, 175). Folglich:

U n t e r a l l e n W i n k e l n, w e l c h e e i n e z u e i n e r E b e n e s c h i e f s t e h e n d e G e r a d e m i t d e n d u r c h i h r e n S c h n i t t p u n k t i n d e r E b e n e g e z o g e n e n G e r a d e n b i l d e t, i s t d e r N e i g u n g s w i n k e l d e r k l e i n s t e. 63.

Zieht man ferner in der Ebene 𝔟 die Gerade $OC_1$ so, dass $BOC_1 = BOC$ ist, macht $OC_1 = OC$ und legt die Ebene $AOC_1$, so folgt (29a) aus der Symmetrie der Konstruktionen zur Ebene *AOB* (oder aus der Kongruenz der Dreiecke $\overline{BOC}$ und $\overline{BOC_1}$, $\overline{ABC}$ und $\overline{ABC_1}$, $\overline{AOC}$ und $\overline{AOC_1}$), dass $AOC = AOC_1$. Folglich:

B i l d e t d e r N e i g u n g s s c h e n k e l e i n e r s c h i e f e n G e r a d e n g l e i c h e W i n k e l m i t z w e i d u r c h i h r e n S c h n i t t p u n k t m i t e i n e r E b e n e i n d i e s e r g e z o g e n e n G e r a d e n, 64.

so bildet auch die schiefe Gerade gleiche Winkel mit den letzteren (und umgekehrt).

Ist $BOC = BOC_1 = R$, so ist $C_1OC$ eine Gerade, und die Ebenen $AOC$ und $AOC_1$ fallen in eine Ebene zusammen. Es sind also $AOC$ und $AOC_1$ Nebenwinkel, und, da sie nach 64 einander gleich sind, beide gleich $R$; d. h.:

65. Steht der Neigungsschenkel einer schiefen Geraden senkrecht auf einer durch ihren Schnittpunkt mit einer Ebene in dieser gezogenen Geraden, so steht auch die schiefe Gerade auf der letzteren senkrecht (und umgekehrt).

Anm. Da $AC \perp OC$, so folgt aus 65, dass auch $BC \perp OC$. Dasselbe folgt, wenn man den Pythagoräischen Satz auf die Dreiecke $\overline{AOB}$, $\overline{AOC}$, $\overline{ABC}$ anwendet.

Ist $BOC > BOC_1$, so liefert die Betrachtung der Dreiecke $\overline{BOC}$ und $\overline{BOC_1}$ (T. II, 123); $\overline{ABC}$ und $\overline{ABC_1}$ (T. II, 118); $\overline{AOC}$ und $\overline{AOC_1}$ (T. II, 123) das Resultat, dass $AOC > AOC_1$. Folglich:

66. Bildet der Neigungsschenkel einer schiefen Geraden ungleiche Winkel mit zwei durch ihren Schnittpunkt mit einer Ebene in dieser gezogenen Geraden, so bildet auch die schiefe Gerade in demselben Sinne ungleiche Winkel mit den letzteren (und umgekehrt).

Da der grösste Wert von $BOC$ $2R$ ist, so folgt aus 66:

67. Unter allen Winkeln, welche eine zu einer Ebene schief stehende Gerade mit den durch ihren Schnittpunkt in der Ebene gezogenen Geraden bildet, ist der Nebenwinkel des Neigungswinkels der grösste.

Da drei in der Ebene 𝔟 von $O$ ausgehende Geraden mit dem Neigungsschenkel $OB$ nur dann gleiche Winkel bilden können, wenn die Richtung desselben beliebig wird, d. h. wenn $AO$ auf 𝔟 senkrecht steht, so folgt weiter:

68. Bildet eine Gerade gleiche Winkel mit drei durch ihren Schnittpunkt mit einer Ebene in dieser gezogenen Geraden, so steht sie auf der Ebene senkrecht.

**20.** *Entfernung.* — Da jede durch $A$ gehende schiefe Gerade $a$ mit der Senkrechten $AB$ und dem Neigungsschenkel $b$ ein rechtwinkliges Dreieck bildet, so folgt aus T. II, 108:

69. Unter allen Geraden, welche einen Punkt ausser-

**halb einer Ebene mit Punkten der Ebene verbinden, ist die Senkrechte die kürzeste.**

Die von einem Punkte *A* auf eine Ebene 𝔟 gefällte Senkrechte *AB* heisst daher die Entfernung des Punktes *A* von der Ebene 𝔟. (Vgl. T. II, Nr. 74.)

Dreht sich das Dreieck $\overline{AOB}$ um *AB*, so beschreibt *O* eine Kreislinie in der Ebene 𝔟 (42) und *OA* eine Kegelfläche (Nr. 14). Also:

**Von einem ausserhalb einer Ebene gelegenen Punkte *A* kann man nach der Ebene 𝔟 beliebig viele gleichlange Strecken ziehen, die auf einer Kegelfläche liegen, gegen die Ebene gleich geneigt sind, und deren Fusspunkte vom Fusspunkte der aus *A* auf die Ebene gefällten Senkrechten gleichen Abstand haben.** 70.

**Alle Punkte einer Ebene, welche auf derselben Kreislinie liegen, haben gleichen Abstand von einem Punkte der im Mittelpunkte dieser Kreislinie auf der Ebene errichteten Senkrechten.** 71.

Ferner folgt aus 70 und T. II, 117 und 118:

**Sind von einem Punkte ausserhalb einer Ebene zwei ungleiche Strecken nach Punkten der Ebene gezogen, so hat die längere Strecke den kleineren Neigungswinkel gegen die Ebene, aber ihr Fusspunkt den grösseren Abstand vom Fusspunkte der Senkrechten (und umgekehrt).** 72.

Ist in der Mitte einer Strecke *AB* eine Senkrechte errichtet, und wird diese Figur um *AB* gedreht, so beschreibt die Senkrechte eine auf *AB* senkrechte Ebene (42), und aus T. II, 120 folgt:

**Der geometrische Ort eines Punktes, der von *zwei* gegebenen Punkten gleichweit entfernt ist, ist die auf der Verbindungsstrecke beider Punkte in ihrer Mitte errichtete senkrechte Ebene.** 73.

Ferner folgt aus 70:

**Der geometrische Ort eines Punktes, der von *drei* gegebenen Punkten gleichweit entfernt ist, ist die auf der Ebene der drei Punkte im Mittelpunkte des durch dieselben bestimmten Kreises errichtete Senkrechte.** 74.

Konstruiert man nach 73 die drei geometrischen Oerter für den Punkt, der von *A* und *B*, von *B* und *C*, von *C* und *A*

gleichweit entfernt ist, so müssen sich jene drei Ebenen nach 74 in der auf der Ebene $ABC$ im Mittelpunkte des Umkreises von $\overline{ABC}$ errichteten Senkrechten schneiden. Also:

75. Die in den Mitten der Verbindungsstrecken dreier Punkte $A$, $B$, $C$ senkrecht errichteten Ebenen schneiden sich in derjenigen Geraden, welche im Mittelpunkte des Umkreises von $\overline{ABC}$ auf der Ebene desselben senkrecht errichtet ist.

Verschieben sich zwei sich schneidende Geraden nebst den Halbierungslinien ihrer Winkel längs einer im Scheitel auf ihrer Ebene errichteten senkrechten Geraden, so beschreiben alle vier Geraden Ebenen, und aus T. II, 122 folgt:

76. Der geometrische Ort eines Punktes, welcher von *zwei* gegebenen Ebenen gleichweit entfernt ist, ist das Ebenenpaar, welches die Winkel der gegebenen Ebenen halbiert.

Konstruiert man hiernach die beiden geometrischen Oerter für den Punkt, welcher von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$, sowie von $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ gleichweit entfernt ist, so schneiden sich dieselben in vier Geraden, durch welche auch der geometrische Ort des Punktes gehen muss, welcher von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{c}$ gleichweit entfernt ist. Also:

77. Die drei Ebenenpaare, welche die Winkel dreier Ebenen halbieren, schneiden sich in vier Geraden, welche den geometrischen Ort eines Punktes bilden, der von den *drei* Ebenen gleichweit entfernt ist.

**21.** *Neigungswinkel paralleler Geraden und Ebenen.* — Werden zwei parallele Geraden $OA$ und $O_1A_1$ von einer Ebene in $O$ und $O_1$ geschnitten, und sind $AB$ und $A_1B_1$ die aus $A$ und $A_1$ auf die Ebene gefällten Senkrechten, also $OB$ und $O_1B_1$ die Neigungsschenkel der Geraden, so ist $OA \parallel O_1A_1$, $AB \parallel A_1B_1$ (59), folglich $OAB = O_1A_1B_1$ (23, Anm.), $AOB = A_1OB_1$ (T. II, 78). Folglich:

78. Parallele Geraden haben mit derselben Ebene gleiche Neigungswinkel.

Anm. Gilt auch die Umkehrung dieses Satzes? — Ein specieller Fall von 78 ist 59a.

Werden zwei parallele Ebenen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}_1$ von einer Geraden in $O$ und $O_1$ geschnitten, und fällt man aus einem Punkte $A$ der Geraden auf $\mathfrak{a}$ die Senkrechte $AB$, welche $\mathfrak{a}_1$ in $B_1$ schneidet, so steht $AB_1$ auf $\mathfrak{a}_1$ senkrecht (61a); folglich sind $OB$ und

$O_1B_1$ die Neigungsschenkel der Geraden, und in der Ebene $AB_1O_1$ ist $AOB = AO_1B_1$ (T. II, 78). Folglich:

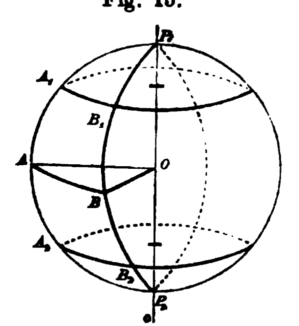
Parallele Ebenen haben mit derselben Geraden gleiche Neigungswinkel. 79.

Anm. Gilt auch die Umkehrung dieses Satzes? — Ein specieller Fall von 79 ist 61a.

22. *Bewegung einer in der Ebene liegenden Kreislinie. — Resultat der Drehung: Die Kugelfläche.* — Macht eine Ebene um eine in ihr liegende Gerade $o$ eine ganze Umdrehung, so beschreibt eine Halbkreislinie, deren Durchmesser in der Axe liegt, eine krumme Fläche, die man Kugelfläche nennt.

Anm. Angenommen, die Ebene des Papiers drehe sich in Fig. 15 um die Axe $o$, so beschreiben zwei auf der Halbkreislinie beliebig angenommene Punkte $A_1$ und $A_2$ Kreislinien, die auf der Kugelfläche liegen und in der Figur die Gestalt derselben andeuten. — Da die sich drehende Ebene zum zweitenmale mit der Ebene des Papiers zusammenfällt, wenn sie eine halbe Umdrehung gemacht hat, so gerät auch die Halbkreislinie noch einmal in die letztere Ebene. Die Kugelfläche wird also von der Ebene des Papiers in einer Kreislinie geschnitten.

Fig. 15.




Beträgt die Drehung der Halbkreislinie weniger als einen geschlossenen Winkel, so wird die von ihr beschriebene Fläche Kugelzweieck genannt. Der Mittelpunkt der Halbkreislinie ($O$) heisst auch Mittelpunkt (Centrum) der Kugelfläche, jeder Radius der Halbkreislinie in jeder seiner verschiedenen Richtungen Radius der Kugelfläche, jeder von der Halbkreislinie beschriebene Raumwinkel Centriwinkel.

Der Mittelpunkt einer Kugelfläche ist also derjenige Punkt, dessen Verbindungsstrecken mit beliebigen Punkten der Kugelfläche gleich gross sind; Radius jede Strecke, welche einen Punkt der Kugelfläche mit dem Mittelpunkte verbindet.

Aus der Entstehung der Kugelfläche folgen die Sätze:

Alle Radien einer Kugelfläche sind einander gleich. 80.

Der geometrische Ort eines Punktes, der von einem gegebenen Punkte eine gegebene Entfernung hat, ist die aus dem gegebenen Punkte mit der gegebenen Entfernung als Radius konstruierte Kugelfläche. 81.

Anm. Die Konstruktion einer Kugelfläche aus einem gegebenen Punkte mit einem gegebenen Radius ist eine der (freilich nur theoretisch erfüllbaren) Forderungen der konstruierenden Stereometrie. Ebenso steht es mit der Konstruktion der Kegel- und der Cylinderfläche.

Legt man durch den Mittelpunkt der Kugelfläche eine Ebene, so schneidet dieselbe die Kugelfläche in einer Linie, deren Punkte alle vom Mittelpunkte um die Länge des Radius entfernt sind (80), d. h. in einer Kreislinie mit gleichem Radius. Man hat also den Satz:

82. **Alle durch den Mittelpunkt einer Kugelfläche gelegten Ebenen schneiden die Kugelfläche in Kreislinien mit gleichem Radius (Diametralkreisen).**

Der Durchmesser eines Diametralkreises heisst Durchmesser der Kugelfläche, die Endpunkte eines Durchmessers heissen Gegenpunkte der Kugelfläche.

Anm. Hiernach kann jede Hälfte einer beliebigen derartigen Kreislinie durch ihre Umdrehung dieselbe Kugelfläche erzeugen.

Wenn eine Halbkreislinie auf der Kugelfläche ein Kugelzweieck $\widehat{AB}$ beschreibt, so beschreibt die zugehörige Ebene einen Centriwinkel $AOB$, von dem man sagt, er gehöre zum Zweieck $\widehat{A_3B_3}$.

Anm. Entsprechend dem konvexen Centriwinkel $AOB$ wird durch die beiden Halbkreislinien $A_1A_2$ und $B_1B_2$ auf der Kugelfläche noch ein zweites Zweieck begrenzt, welches mit dem ersten zusammen die ganze Kugelfläche bildet. Jedes Zweieck liegt in dem Raumstück des zugehörigen Centriwinkels.

Die beiden Zweiecke $\widehat{AB}$, welche zusammen die Kugelfläche bilden, heissen einander entgegengesetzt.

Da das Zweieck durch dieselbe Bewegung entsteht wie der Centriwinkel, so kann es ebenso wie dieser als Mass für die Drehung der Ebene betrachtet werden. Uebertragung der Sätze vom Raumwinkel auf das Zweieck.

83. **Zu gleichen Centriwinkeln einer Kugelfläche gehören gleiche Zweiecke (und umgekehrt). — Zu dem grösseren von zwei Centriwinkeln einer Kugelfläche gehört das grössere Zweieck (und umgekehrt).**

Aus 83 folgt:

84. **Jede durch den Mittelpunkt einer Kugelfläche gehende Ebene halbiert die Kugelfläche. — Zwei solche Ebenen, die auf einander senkrecht stehen, teilen die Kugelfläche in vier gleiche Teile (s. auch 97).**

Anm. Die Hälfte der Kugelfläche heisst Halbkugel(fläche). Anwendung der vorstehenden Erklärungen und Sätze auf den Globus.

Da man aus einem Punkte des Raumes mit demselben Radius nur eine Kugelfläche konstruieren kann, so ist die Kugelfläche durch ihren Radius nach Gestalt und Grösse vollständig bestimmt. Daraus folgt:

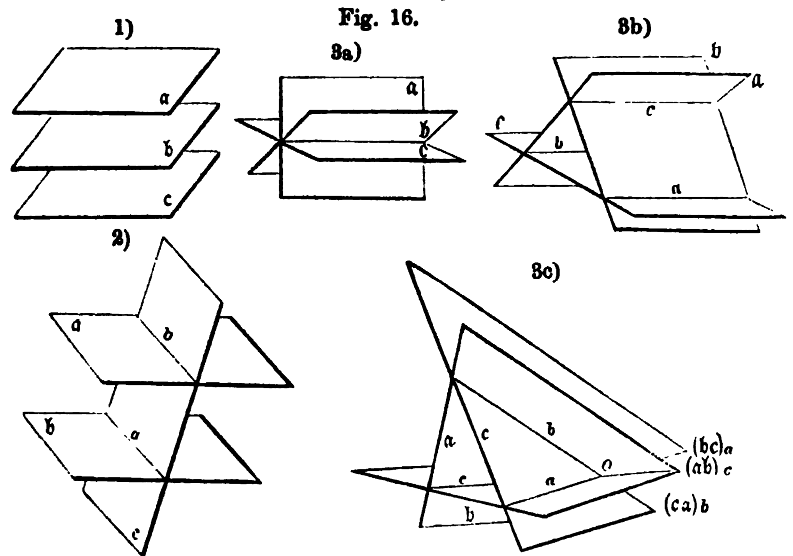
Kugelflächen mit gleichem Radius sind kongruent. 85.

Anm. Wie zwischen der Geraden und der Ebene, so besteht auch eine Analogie zwischen der Kreislinie und der Kugelfläche. Wie die Ebene aus der Geraden durch Verschiebung, so entsteht die Kugelfläche aus der Kreislinie durch Drehung. Einem Punkte auf der Kreislinie entspricht eine Halbkreislinie auf der Kugelfläche, einem Radius der Kreislinie eine Halbkreisfläche der Kugelfläche. Rückt der Mittelpunkt in unendliche Entfernung, so nähert sich die Kreislinie einer Geraden und die Kugelfläche einer Ebene. (Scheinbar ebene Beschaffenheit der Erdoberfläche!) Andere Analogieen werden sich später zeigen.

### β) Zweimalige Bewegung der Ebene.

**23.** *Uebersicht.* — Ist eine Ebene $\mathfrak{a}$ durch zwei auf einander folgende Bewegungen erst in $\mathfrak{b}$ und dann in $\mathfrak{c}$ übergegangen, so können die beiden Bewegungen sein: 1) zwei Ver-

Fig. 16.




schiebungen, 2) eine Verschiebung und eine Drehung, 3) zwei Drehungen. Im dritten Falle können die beiden Drehungen entweder 3a) um dieselbe Gerade oder 3b) um zwei parallele oder 3c) um zwei sich schneidende Geraden stattfinden (Fig. 16).

Man hat alsdann 1) drei Ebenen mit gleicher Seite; 2) zwei von einer dritten geschnittene parallele Ebenen; 3a) drei Ebenen mit gleicher Lage und Richtung; 3b) drei Ebenen mit verschiedener Seite, welche paarweise gleiche Richtung und Lage haben; 3c) drei Ebenen mit verschiedener Seite, welche paarweise gleiche Richtung und alle drei dieselbe Lage haben.

Anm. Drei Ebenen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ schneiden sich im allgemeinen in den drei Geraden $\mathfrak{a}\mathfrak{b} = c$, $\mathfrak{b}\mathfrak{c} = a$, $\mathfrak{c}\mathfrak{a} = b$. Im Falle 3) ist nur von zweien dieser Geraden ($c$ und $a$), um welche die beiden Drehungen stattfinden, die Rede; das Verhalten der dritten ($b$) bedarf einer besonderen Untersuchung, deren Resultat die Sätze 86—88 ausdrücken. — In wieviel Teile wird der Raum in jedem der fünf Fälle geteilt? Wieviele Schnittlinien entstehen in jedem Falle? Wie ordnen sich die 5 Fälle nach der Anzahl dieser Schnittlinien?

Im Falle 3a) ist die Schnittlinie von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ nach Voraussetzung dieselbe wie die von $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$, demnach auch dieselbe wie von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{c}$. Dies giebt den Satz:

86. Wenn drei Ebenen sich schneiden und zwei Schnittlinien zusammenfallen, so fällt auch die dritte mit ihnen zusammen.

Im Falle 3c) schneiden sich die Schnittlinien $c$ und $a$ nach Voraussetzung in einem Punkte $O$. Da nun $c$ die Schnittlinie von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$, und $a$ diejenige von $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ ist, so gehört der Punkt $O$ gleichzeitig den Ebenen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$, sowie den Ebenen $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ an, also auch gleichzeitig den Ebenen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{c}$; d. h. er liegt auf der Schnittlinie ($b$) dieser Ebenen. Demnach geht auch $b$ durch $O$, und man hat den Satz:

87. Wenn drei Ebenen sich schneiden, und zwei Schnittlinien durch einen Punkt gehen, so geht auch die dritte durch diesen Punkt.

Im Falle 3b) sind die Schnittlinien $c$ und $a$ nach Voraussetzung parallel; d. h.: der Punkt $O$ ist in unendliche Entfernung gerückt. Nun geht nach 87 auch $b$ durch diesen unendlich fernen Punkt, ist also mit $a$ und $c$ parallel. Dies giebt den Satz:

88. Wenn drei Ebenen sich schneiden, und zwei Schnittlinien parallel sind, so ist auch die dritte mit ihnen parallel.

Anm. Weil je zwei Schnittlinien stets in einer Ebene liegen, können keine zwei Schnittlinien windschief sein.

Da der Fall 1) zu keiner besonderen Bemerkung Anlass giebt, so betrachten wir der Reihe nach die Fälle 3a), 2), 3b), 3c).

**24.** *Drei in einer Geraden sich schneidende Ebenen.* — Wenn drei in einem Punkte sich schneidende Geraden einer Ebene durch einfache Verschiebung aus dieser Ebene heraustreten, so entstehen drei in einer Geraden sich schneidende Ebenen (Fig. 16, 3a). Jeder Satz über die Winkel der drei Geraden giebt dann einen Satz über die Raumwinkel der drei Ebenen, und es können daher die Untersuchungen und Sätze über ebene Winkel in T. II, Nr. 37—51 ohne weiteres auf Raumwinkel übertragen werden.

**25.** *Zwei von einer dritten geschnittene parallele Ebenen.* — Wenn zwei von einer dritten geschnittene parallele Geraden durch einfache Verschiebung aus ihrer Ebene heraustreten, so entstehen zwei von einer dritten geschnittene parallele Ebenen (Fig. 16, 2). Jeder Satz über die Winkel der drei Geraden giebt dann einen Satz über die Raumwinkel der drei Ebenen, und es können daher die Untersuchungen und Sätze über ebene Winkel in T. II, Nr. 52—57 ohne weiteres auf Raumwinkel übertragen werden.

Da die Geraden $a$ und $b$, in welchen die parallelen Ebenen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ von $\mathfrak{c}$ geschnitten werden, nicht windschief sein können, weil sie in derselben Ebene $\mathfrak{c}$ liegen, und sich auch nicht schneiden können, weil sie in den parallelen Ebenen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ liegen, so müssen sie parallel sein. Mithin:

Parallele Ebenen haben mit derselben Ebene 89.
parallele Schnittlinien.

**26.** *Die unendlich ferne Gerade einer Ebene.* — Wenn die Ebene $\mathfrak{c}$ (Fig. 16, 2) sich um die Gerade $b$ dreht, um mit $\mathfrak{a}$ zusammenzufallen, so verschiebt sich ihre Schnittlinie mit $\mathfrak{b}$ (die Gerade $a$) auf der Ebene $\mathfrak{b}$, und entfernt sich so immer weiter von ihrer ursprünglichen Lage. So lange die Ebene $\mathfrak{c}$ noch nicht die mit $\mathfrak{b}$ parallele Seite $\mathfrak{a}$ angenommen hat, existiert diese Schnittlinie in endlicher, messbarer Entfernung. Ist aber $\mathfrak{c}$ in $\mathfrak{a}$ übergegangen, also mit $\mathfrak{b}$ parallel geworden, so sagt man, die Schnittlinie der Ebenen $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{b}$ sei in unendliche Entfernung gerückt. Statt also zu sagen: zwei parallele Ebenen haben keine (endlich entfernte) Gerade gemeinsam, kann man auch sagen: sie schneiden sich in einer unendlich fernen Geraden. — Da zwei parallele Ebenen gleiche Seite haben, so kann man die unendlich ferne Gerade einer Ebene auch als Vertreterin ihrer Seite ansehen. — Da eine Ebene von anderen Ebenen in Geraden von allen auf

ihr möglichen Richtungen geschnitten wird, und da jede dieser Schnittlinien durch Verschiebung in die unendlich ferne Gerade übergehen kann, so ist es gleichgültig, mit welcher Richtung man sich die unendlich ferne Gerade vorstellt.

Da die unendlich ferne Gerade von jeder andern Geraden der Ebene offenbar in einem unendlich fernen Punkte geschnitten wird, so kann man sagen:

90. Die unendlich fernen Punkte aller Geraden einer Ebene liegen auf der unendlich fernen Geraden dieser Ebene.

Anm. Durch Erweiterung dieser Betrachtung gelangt man zu dem Resultat, dass die unendlich fernen Geraden aller Ebenen des Raumes auf der unendlich fernen Ebene des Raumes liegen.

Dreht sich die Ebene $\mathfrak{c}$, nachdem sie mit $\mathfrak{a}$ zusammen gefallen ist, noch weiter, so kommt ihre Schnittlinie mit $\mathfrak{b}$, welche vorher nach der einen Seite in unendliche Entfernung gerückt war, von der andern Seite her aus unendlicher Entfernung wieder zum Vorschein und nähert sich wieder ihrer ursprünglichen Lage $\mathfrak{a}$.

Hiernach erscheint die Parallelität zweier Ebenen als ein specieller Fall des Schneidens, und man kann mit Hilfe der eben festgestellten Ausdrucksweise sagen, dass zwei Ebenen im Raume stets eine Gerade gemeinsam haben, nämlich eine endlich entfernte (oder Lage und Richtung), wenn sie sich schneiden, eine unendlich ferne (oder die Seite), wenn sie parallel sind. — Ebenso erscheint die Verschiebung einer Ebene als specieller Fall der Drehung, nämlich als Drehung um die unendlich ferne Gerade der Ebene.

Analoge Betrachtungen, wie sie am Schluss von Nr. 58 in T. II angestellt wurden, führen zu den Sätzen:

91. Eine Gerade kann als Cylinderfläche mit einem Radius von der Grösse Null betrachtet werden, deren Axe mit der Geraden selbst zusammenfällt.

92. Eine Ebene kann als Cylinderfläche mit unendlich grossem Radius betrachtet werden, deren Axe die unendlich ferne Gerade einer zu der Ebene senkrechten Ebene ist.

93. Eine Gerade kann als Kegelfläche mit einem Winkel an der Spitze von der Grösse Null betrachtet werden, deren Axe mit der Geraden selbst zusammenfällt.

Eine Ebene kann als Kegelfläche mit einem Win-

kel an der Spitze von der Grösse $2R$ betrachtet werden, deren Axe eine zu der Ebene senkrechte Gerade ist.

Da ferner durch Drehung der Kreislinie die Kugelfläche entsteht, der Punkt aber (nach T. II, 74) als specieller Fall der Kreislinie angesehen werden kann, so folgt:

Ein Punkt kann als Kugelfläche mit einem Radius 95.
von der Grösse Null angesehen werden, deren Mittelpunkt mit dem Punkte selbst zusammenfällt.

Da endlich auch die Gerade (nach T. II, 75) als specieller Fall der Kreislinie angesehen werden kann, und die Verschiebung der Ebene als Drehung um eine unendlich ferne Gerade, so wird die Ebene, welche von einer Geraden beschrieben wird, die auf einer sich verschiebenden Ebene liegt, ein specieller Fall der Kugelfläche sein. Folglich:

Eine Ebene kann als Kugelfläche mit unendlich 96.
grossem Radius betrachtet werden, deren Mittelpunkt der unendlich ferne Punkt einer auf der Ebene senkrechten Geraden ist.

**27.** *Drei in parallelen Geraden sich schneidende Ebenen.* — Wenn drei in drei Punkten sich schneidende Geraden durch einfache Verschiebung aus ihrer Ebene heraustreten, so entstehen drei in parallelen Geraden sich schneidende Ebenen (Fig. 16, 3b). Jeder Satz über die Winkel der drei Geraden giebt dann einen Satz über die Raumwinkel der drei Ebenen, und es können daher die Untersuchungen und Sätze über ebene Winkel in T. II, Nr. 59—87 ohne weiteres auf Raumwinkel übertragen werden.

Drei oder mehrere Ebenen, welche sich in parallelen Geraden schneiden, begrenzen ein offenes prismatisches Raumstück. Das von einer Cylinderfläche begrenzte offene Raumstück ist ein specieller Fall hiervon.

## Die dreiseitige Ecke.

### 1) Die Ecke als Analogon zum Winkel.

**28.** *Drei in einem Punkte sich schneidende Ebenen. Die dreiseitige Ecke. — Vorbemerkungen.* — Drei Ebenen (𝔞, 𝔟, 𝔠), welche sich in drei durch denselben Punkt ($O$) gehenden Geraden ($a, b, c$) schneiden, teilen den Raum in acht unvollständig begrenzte Teile, deren jeder eine (dreiseitige) Ecke genannt wird. Der Punkt $O$ heisst der Scheitel, die Geraden $a, b, c$,

vom Scheitel an gerechnet, heissen die **Kanten**, die Ebenen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, soweit sie zwischen den Kanten liegen, die **Schenkelebenen** der Ecke.

Die Kanten der Ecke sind also nur einseitig durch den Scheitel begrenzt, die Schenkelebenen sind die Ebenenstücke der von den Kanten gebildeten Winkel. Die Begrenzung dieser Ebenenstücke in der Zeichnung geschieht am besten durch Kreisbogen, die mit gleichem Radius aus $O$ in jeder der drei Ebenen beschrieben werden (S. Fig. 18, S. 41).

Da alle Punkte dieser Kreisbogen von $O$ gleichweit entfernt sind, so liegen sie auf einer aus dem Mittelpunkte $O$ beschriebenen Kugelfläche.

Anm. Sofern man unter einem ebenen Winkel die Drehungsgrösse zwischen zwei Geraden versteht, können Winkel und Ecke nicht als entsprechende Gebilde der Ebene und des Raumes angesehen werden. Denn der Winkel entsteht durch **eine** Drehung einer Geraden, die Ecke dagegen durch **zwei** Drehungen einer Ebene um verschiedene Geraden. Die Ecke kann also nicht als einfache Drehungsgrösse betrachtet werden.

Sofern man aber unter einem ebenen Winkel das von den Schenkeln des Winkels unvollständig begrenzte Ebenenstück versteht, ist die Ecke als räumliches Gebilde analog dem Winkel als ebenem Gebilde. Nur tritt an die Stelle der Zahl 2 (Anzahl der Ausdehnungen der Ebene) überall die Zahl 3 (Anzahl der Ausdehnungen des Raumes). Es entsprechen sich: 2 Bestimmungsstücke des Winkels (Scheitel und Schenkel) und 3 der Ecke (Scheitel, Kanten und Schenkelebenen); 2 Begrenzungsgebilde des Winkels (die Schenkel) und 3 der Ecke (die Schenkelebenen); $2^2 = 4$ Winkel, welche durch zwei sich schneidende Geraden und $2^3 = 8$ Ecken, welche durch drei sich schneidende Ebenen gebildet werden. Wie aus dem Winkel durch Hinzufügung einer Geraden oder einer Kreislinie eine Figur, so entsteht aus der Ecke durch Hinzufügung einer Ebene oder einer Kugelfläche ein Körper. Wie die Grösse eines Winkels durch diejenige des zwischen seinen Schenkeln liegenden Kreisbogens veranschaulicht werden kann, so die Grösse einer Ecke durch diejenige des zwischen ihren Schenkelebenen liegenden Teiles der Kugelfläche.

**29.** *Einteilung der Ecken nach ihrer Grösse.* — Unter der Grösse einer Ecke verstehen wir die Grösse des zwischen ihren Schenkelebenen liegenden Teils einer Kugelfläche, die aus dem Scheitel der Ecke als Mittelpunkt mit dem Radius 1 beschrieben ist.

Anm. Die Grösse einer Ecke ist hierdurch unabhängig von der Grösse der Drehungen, durch welche sie entstanden ist, bestimmt. Ebenso konnte als Grösse eines Winkels die Grösse des zwischen seinen Schenkeln liegenden Bogens einer Kreislinie betrachtet werden, die aus dem Scheitel des Winkels als Mittelpunkt mit dem Radius 1 beschrieben wurde (vgl. T. III, Nr. 34). Hierdurch lässt sich, wie wir später sehen werden, die Grösse der Ecke ebenso wie die des Winkels durch ein Vielfaches von $\pi$ ausdrücken, indem die ganze Kugelfläche den Wert $4\pi$ hat.

Die der *ganzen* Kugelfläche entsprechende Ecke heisst *geschlossene Ecke*. Ihre Schenkelebenen schneiden sich in einer einzigen Geraden, und haben beliebige Seite, ihre Kanten fallen in eine einzige zusammen.

Anm. Gleiche Gestalt mit der geschlossenen Ecke hat auch die Ecke von der Grösse Null (*Nullecke*), welcher ein *Punkt* der Kugelfläche entspricht.

Die der *halben* Kugelfläche entsprechende Ecke heisst *flache Ecke*. Ihre drei Schenkelebenen fallen in eine einzige zusammen (84), ihre Kanten liegen in derselben Ebene und haben beliebige Richtung.

Anm. Wie die geschlossene und die Nullecke (die Kugelfläche und der Punkt) sich zu einer geschlossenen Ecke ergänzen, so auch die beiden flachen Ecken (die beiden Halbkugelflächen), welche zu beiden Seiten einer Ebene liegen. (Ebenso in der Ebene der geschlossene und der Nullwinkel, sowie die beiden gestreckten Winkel zu beiden Seiten einer Geraden.) — Eine Ecke heisst *konvex*, wenn sie grösser, *konkav*, wenn sie kleiner ist als eine flache.

Die dem *vierten Teile* der Kugelfläche entsprechende Ecke heisst *gestreckte Ecke*. Zwei ihrer Schenkelebenen fallen in eine einzige zusammen, auf welcher die dritte senkrecht steht (84), zwei ihrer Kanten fallen in eine einzige zusammen, die Richtung der dritten ist beliebig.

Anm. Einer gestreckten Ecke entspricht also als Teil der Kugelfläche ein specieller Fall des Zweiecks (vgl. Nr. 22). Wie ist die Ecke beschaffen, die dem allgemeinen Zweieck entspricht?

Wenn eine Halbkreislinie ein Zweieck beschreibt, so beschreibt der Halbierungspunkt der Halbkreislinie einen Bogen, welcher die Fläche des Zweiecks halbiert. Da die Ebene dieses Bogens auf den Ebenen des Zweiecks senkrecht steht, so hat man den Satz (Ergänzung zu 84):

**Drei durch den Mittelpunkt einer Kugelfläche** 97.
**gehende, auf einander senkrechte Ebenen teilen die Kugelfläche in acht gleiche Teile.**

Anm. *Modell* mittelst dreier aus Papier ausgeschnittener, in einander gesteckter Kreise, die nach Angabe von Fig. 18 eingeschnitten sind

Fig. 17.

Die dem *achten Teile* der Kugelfläche entsprechende Ecke heisst *rechte Ecke*. Ihre drei Schenkelebenen stehen auf einander senkrecht, ebenso ihre drei Kanten.

Aus 85 folgt der Reihe nach:

**Alle geschlossenen, alle flachen, alle gestreck-** 98.
**ten und alle rechten Ecken sind einander gleich.** —

Die flache Ecke ist die Hälfte, die gestreckte der vierte Teil, die rechte der achte Teil der geschlossenen Ecke.

**30.** *Nebenecken, Nebenscheitelecken und Scheitelecken.* *) — Soll die durch drei sich schneidende Ebenen gebildete Ecke nicht eine vieldeutige Grösse sein, so muss man auf jeder der drei Ebenen eine bestimmte Seite festsetzen, und als Ecke der drei Ebenen diejenige der acht im ganzen entstehenden Ecken bezeichnen, deren Innenseiten die drei festgesetzten Seiten sind.

Zu jeder konkaven Ecke gehört eine durch ihre Aussenseiten gebildete konvexe Ecke, welche mit ihr zusammen eine geschlossene Ecke ausmacht. Unter der Ecke dreier Ebenenstücke versteht man, wenn nichts anderes darüber festgesetzt ist, jedesmal die konkave Ecke.

Die Ecken, welche zwei Ebenen mit den beiden entgegengesetzten Seiten einer dritten Ebene bilden, heissen Nebenecken. Zwei Nebenecken bilden zusammen ein Zweieck und
98a. hängen durch eine Schenkelebene zusammen. — Die Summe zweier Nebenecken hat keine feste Grösse.

Anm. Wie konstruiert man zu einer gegebenen Ecke eine Nebenecke? — Wieviele Nebenecken kann man zu jeder Ecke konstruieren? — Wieviel Paare von Nebenecken entstehen, wenn drei Ebenen sich in einem Punkte schneiden? — Wenn man die Innenseiten der drei Ebenen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ und die Aussenseiten $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}_1$ nennt, wie heissen dann die acht entstehenden Ecken (jede Ecke durch ihre drei Seiten bezeichnet), und wie heissen die Nebeneckenpaare?

Die Ecken, welche eine Ebene mit zwei anderen und mit deren entgegengesetzten Seiten bildet, heissen Nebenscheitelecken. — Zwei Nebenscheitelecken hängen nur durch eine Kante zusammen. — Die drei Nebenecken einer Ecke bilden drei Paare von Nebenscheitelecken. — Zwei Paare Nebenscheitelecken an derselben Kante bilden zusammen eine flache
98b. Ecke. — Zwei Nebenscheitelecken haben weder eine feste Summe, noch im allgemeinen gleiche Grösse.

Anm. Wie konstruiert man zu einer gegebenen Ecke eine Nebenscheitelecke? — Wieviele Nebenscheitelecken kann man zu einer gegebenen Ecke konstruieren? — Wieviel Paare von Nebenscheitelecken entstehen, wenn drei Ebenen sich in einem Punkte schneiden? — Wie heissen die Paare der Nebenscheitelecken?

---

*) Hierzu ähnliches Modell wie Fig. 18. Nur müssen die beiden Schnitte jedes Kreises nicht rechte, sondern beliebige schiefe Winkel mit einander bilden.

Eine Ecke und diejenige Nebenecke ihrer Nebenscheitelecke, welche nicht Nebenecke der ersten ist, heissen zusammen Scheitelecken. — Die Scheitelecke einer Ecke ist also diejenige, welche die entgegengesetzten Seiten ihrer Schenkelebenen bilden.

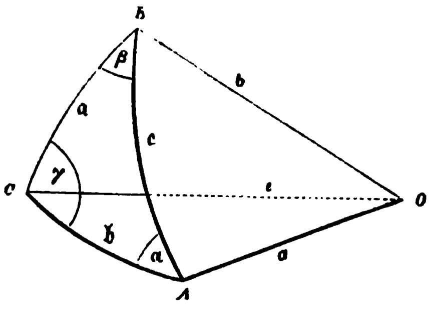
Zwei Scheitelecken sind symmetrisch, also von gleicher Grösse. Sie hängen nur durch den Scheitel zusammen. Die drei Nebenecken einer Ecke sind die Nebenscheitelecken ihrer Scheitelecke und umgekehrt. 99.

Anm. Wie konstruiert man zu einer gegebenen Ecke eine Scheitelecke? — Wieviele Scheitelecken kann man zu einer gegebenen Ecke konstruieren? — Wieviel Paare von Scheitelecken entstehen, wenn drei Ebenen sich in einem Punkte schneiden? — Wie heissen die Paare der Scheitelecken?

## 2) Die Ecke als Analogon zum Dreieck.

**31.** *Vorbemerkungen.* — Die ebenen Winkel, welche die Kanten einer Ecke mit einander bilden, heissen auch Seiten der Ecke; die Raumwinkel, welche die Schenkelebenen der Ecke mit einander bilden, heissen auch Winkel der Ecke. Eine dreiseitige Ecke hat also drei Seiten und drei Winkel. — In Bezug auf eine Seite der Ecke heissen die beiden Winkel, welche diese Seite zur gemeinsamen Schenkelebene haben, die der Seite anliegenden Winkel, der dritte heisst der der Seite gegenüberliegende Winkel. — In Bezug auf einen Winkel heissen die beiden Seiten, welche seine Schenkelebenen bilden, die den Winkel einschliessenden Seiten; die dritte heisst die dem Winkel gegenüberliegende Seite. — Es liegen sich also in der dreiseitigen Ecke gegenseitig je ein Winkel und eine Seite gegenüber.

Fig. 18.




Die Bezeichnung der Seiten einer Ecke geschieht durch kleine deutsche, die Bezeichnung der Winkel durch kleine griechische Buchstaben, so dass jede Seite den der gegenüberliegenden Ecke entsprechenden Buchstaben erhält. (S. Fig. 18.)

Anm. Bereits aus Anzahl und Beschaffenheit der Stücke geht die Analogie zwischen Dreieck und dreiseitiger Ecke hervor. Diese Analogie wird im folgenden noch weiter begründet werden.

**32.** ***Bestimmung der Ecke durch Seiten und Winkel.*** — Seiten und Winkel einer Ecke heissen ihre Stücke. Eine dreiseitige Ecke*) hat also 6 Stücke.

Ist zur Konstruktion einer Ecke nur ein Stück gegeben, so kann man sich dasselbe in fester Lage denken. Ist es eine Seite, so kann jede durch den Scheitel gehende Gerade (sofern sie nicht auf der durch die Seite bestimmten Ebene liegt) die gegenüberliegende Kante der Ecke sein. Ist es ein Winkel, so kann jede (mit keiner der Schenkelebenen parallele) durch den Scheitel gehende Ebene (sofern sie nicht durch die Scheitellinie des Winkels geht) die gegenüberliegende Seite der Ecke sein.

Sind zur Konstruktion der Ecke zwei Stücke gegeben, unter denen sich wenigstens eine Seite befindet,**) so kann man sich diese Seite in fester Lage denken. Die gegenüberliegende Kante ist dann aber nicht mehr eine beliebige durch den Scheitel gehende Gerade, sondern liegt auf einer bestimmten Fläche, welche der geometrische Ort dieser Kante genannt wird.

Anm. Allgemein heisst eine Fläche, auf welcher eine mit einer bestimmten Eigenschaft begabte Gerade liegen muss, der geometrische Ort dieser Geraden. So lange die Gerade sich auf dieser Fläche bewegt, behält sie ihre Eigenschaft; sobald sie die Fläche verlässt, verliert sie dieselbe. Sind für eine Gerade zwei geometrische Oerter gegeben, so muss sie auf zwei Flächen zugleich liegen, d. h. in der Schnittlinie der beiden Flächen. (Schneiden sich die beiden Flächen in mehreren Geraden, so besitzt jede dieser Geraden die beiden verlangten Eigenschaften.) Eine Gerade ist also im allgemeinen durch zwei geometrische Oerter vollkommen bestimmt.

Ausser einer Seite (a) kann zur Bestimmung der Ecke gegeben sein: 1) ein anliegender Winkel ($\beta$ oder $\gamma$); 2) eine zweite Seite (b oder c); 3) der gegenüberliegende Winkel ($\alpha$). — Es soll zunächst der geometrische Ort der Kante *a* für die beiden ersten Fälle bestimmt werden. (Der dritte Fall wird als unerheblich übergangen, kann aber nach Analogie von T. II, 167 behandelt werden.)

1) Ist zu einer Ecke eine Seite (a) und ein anliegender Winkel ($\beta$) gegeben, so muss die der Seite a gegenüberliegende Kante *a* auf der zweiten Schenkelebene des an a im Schenkel *b* angetragenen Winkels $\beta$ liegen. Man hat also den Satz:

---

*) Unter „Ecke" soll im folgenden stets die dreiseitige Ecke verstanden werden.

**) Der Fall, dass zwei Winkel gegeben sind, wird auf den zweier Seiten zurückgeführt werden.

**Ist zu einer Ecke eine Seite und ein anliegender Winkel gegeben, so ist der geometrische Ort der dritten Kante die zweite Schenkelebene des an die Seite in ihrem Schenkel angetragenen Winkels. — (aβ)** 100.

2) Sind zu einer Ecke zwei Seiten (a, b) gegeben, so muss der eine Schenkel von a(c) auch Schenkel von b sein. Man kennt also Grösse, Lage und Richtung von b, nur nicht die Seite. Der andere Schenkel von b(a) ist dann die der Seite a gegenüberliegende Kante. Dreht sich b um c, so beschreibt a eine Kegelfläche. Man hat also den Satz:

**Sind zu einer Ecke zwei Seiten gegeben, so ist der geometrische Ort der dritten Kante die mit der zweiten Seite um einen Schenkel der ersten beschriebene Kegelfläche. — (ab)** 101.

Sind zur Konstruktion der Ecke drei Stücke gegeben, unter denen sich wenigstens eine Seite befindet,*) und ist diese Seite festgelegt, so sind durch sie zwei Kanten der Ecke bestimmt. Zur Bestimmung der dritten Kante hat man aber zwei geometrische Oerter. Den einen liefert a in Verbindung mit dem zweiten, den andern wiederum a in Verbindung mit dem dritten der gegebenen Stücke. Die dritte Kante ist also ebenfalls vollkommen bestimmt, und dadurch die ganze Ecke. Man hat also den Satz:

**Zur Bestimmung einer Ecke sind drei ihrer Stücke notwendig und hinreichend.** 102.

Aus 29b folgt nun: **Zwei Ecken, welche aus denselben drei Stücken in derselben Weise, jedoch an verschiedenen Stellen des Raumes, konstruiert sind, sind einander kongruent oder symmetrisch.** 103.

**33.** ***Die drei ersten Fälle der Bestimmung einer Ecke durch drei Stücke.*** — Von den 6 Stücken der Ecke können auf folgende Arten drei zur Bestimmung gewählt werden:

1) Drei Seiten. (abc)
2) Zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel. (abγ)
3) Zwei Seiten und ein nicht eingeschlossener Winkel. (abβ)
4) Drei Winkel. (αβγ)
5) Eine Seite und die beiden anliegenden Winkel. (αβc)
6) Eine Seite, ein anliegender und der gegenüberliegende Winkel. (αβa)

---

*) Der Fall dreier Winkel wird auf den Fall dreier Seiten zurückgeführt werden.

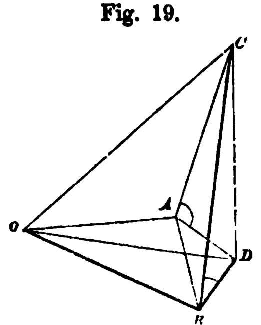
**Erster Fall.** Drei Seiten ($\mathfrak{abc}$). — Ist $\mathfrak{a}$ festgelegt, so ist nach 101 der erste geometrische Ort der Kante $a$ (aus $\mathfrak{ab}$) die mit $\mathfrak{b}$ um $c$ beschriebene Kegelfläche, und der zweite (aus $\mathfrak{ac}$) die mit $\mathfrak{c}$ um $b$ beschriebene Kegelfläche. Da jede der beiden Kegelflächen symmetrisch zu $\mathfrak{a}$ ist, so sind auch ihre beiden Schnittlinien ($a$) symmetrisch zu $\mathfrak{a}$ konstruiert, mithin sind die beiden entstehenden Ecken ($\overline{abc}$) selbst symmetrisch.

Anm. Damit die beiden Kegelflächen sich schneiden, muss $\mathfrak{b} + \mathfrak{c} > \mathfrak{a}$, aber $< 4R - \mathfrak{a}$ sein.

Aus 103 folgt nun:

104. **Erster Kongruenzsatz:** Zwei Ecken sind kongruent (oder symmetrisch), wenn sie in den drei Seiten übereinstimmen.

Fig. 19.




Anm. Andrer Beweis von 104: Es seien $O(ABC)$ und $O_1(A_1B_1C_1)$ die beiden Ecken, so mache man $OC = O_1C_1$ und konstruiere die Neigungswinkel der Ebene $\overline{OAB}$ gegen $\overline{OAC}$ ($CAD$) und gegen $\overline{OBC}$ ($CBD$). Dieselbe Konstruktion wird in der anderen Ecke ausgeführt. Dann beweise man der Reihe nach die Kongruenz der Dreiecke

$OAC$, $OBC$, $AOB$, $\overline{DAB}$, $\overline{CDA}$, $\overline{CDB}$

und

$\overline{O_1A_1C_1}$, $\overline{O_1B_1C_1}$, $\overline{A_1O_1B_1}$, $\overline{D_1A_1B_1}$, $\overline{C_1D_1A_1}$, $\overline{C_1D_1B_1}$.

Hiermit ist die Gleichheit zweier Winkelpaare der beiden Ecken bewiesen. Die Gleichheit des dritten Winkelpaares ergiebt sich, wenn man in dem bisherigen Beweise die Buchstaben $ABC$ cirkulär vertauscht, und $E$ statt $D$ setzt, wobei $E$ der Fusspunkt der von $A$ auf die Ebene $\overline{OBC}$ gefällten Senkrechten ist.

**Zweiter Fall.** Zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel ($\mathfrak{ab}\gamma$). — Ist $\mathfrak{a}$ festgelegt, so ist nach 101 der erste geometrische Ort der Kante $a$ (aus $\mathfrak{ab}$) die mit $\mathfrak{b}$ um $c$ beschriebene Kegelfläche. Der zweite geometrische Ort der Kante $a$ (aus $\mathfrak{a}\gamma$) ist nach 100 die zweite Schenkelebene des in $c$ an $\mathfrak{a}$ angetragenen Winkels $\gamma$. Da die beiden geometrischen Oerter sich nur in einer Geraden schneiden, so entsteht nur eine Ecke.

Aus 103 folgt nun:

105. **Zweiter Kongruenzsatz:** Zwei Ecken sind kongruent (oder symmetrisch), wenn sie in zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel übereinstimmen.

Anm. Andrer Beweis von 105 (Fig. 19): Sind die Seiten $COA$, $BOA$ und der Winkel $CAD$ diejenigen Stücke der ersten Ecke, welche nach

Voraussetzung den homologen Stücken der zweiten Ecke gleich sind, so beweise man der Reihe nach die Kongruenz der Dreiecke

$$\overline{OAC},\ \overline{CAD},\ \overline{OAD},\ \overline{OBD},\ \overline{CDB},\ \overline{OBC}$$

und $$\overline{O_1A_1C_1},\ \overline{C_1A_1D_1},\ \overline{O_1A_1D_1},\ \overline{O_1B_1D_1},\ \overline{C_1D_1B_1},\ \overline{O_1B_1C_1}.$$

Hiermit ist die Gleichheit des dritten Seitenpaares bewiesen, woraus die Kongruenz der Ecken nach 104 folgt.

Dritter Fall. Zwei Seiten und ein nicht eingeschlossener Winkel (ab$\beta$).*) — Ist a festgelegt, so ist nach 101 der erste geometrische Ort der Kante *a* (aus ab) die mit b um *c* beschriebene Kegelfläche. Der zweite geometrische Ort der Kante *a* (aus a$\beta$) ist nach 100 die zweite Schenkelebene des in *b* an a angetragenen Winkels $\beta$. Die beiden geometrischen Oerter schneiden sich entweder gar nicht, oder in einer Geraden (wenn b > a und a + b < 2*R*), oder in zwei Geraden (wenn b < a und a + b < 2*R*). Die Ecke ist also nur im zweiten Falle vollkommen bestimmt. Im dritten Falle sind zwei verschiedene Ecken möglich, und es muss zu den drei vorhandenen Bedingungen noch eine vierte treten, damit die Kongruenz der Ecken für diesen Fall ausgesprochen werden kann. (Ueber die Behandlung dieses Falles vergl. T. II, Nr. 69, letzte Anm.)

Im zweiten Falle enthält die an b grenzende Nebenecke die Stücke 2*R* — a, b, $\beta$. Da diese Ecke durch die erste vollständig bestimmt ist, so ist sie es auch durch ihre eignen Stücke. Setzt man nun in den obigen Bedingungen b > a und a + b < 2*R* für a den Wert 2*R* — a, so gehen sie über in b > 2*R* — a und 2*R* — a + b < 2*R*, oder a + b > 2*R* und b < a. Die Ecke ist also auch dann vollkommen bestimmt, wenn diese letzteren Bedingungen erfüllt sind. Da beide Paare von Bedingungen aussagen, dass b zwischen a und 2*R* — a liegt, so folgt aus 103:

Dritter Kongruenzsatz: Zwei Ecken sind kon- 106.
gruent (oder symmetrisch), wenn sie in zwei Seiten und einem nicht eingeschlossenen Winkel übereinstimmen, und die dem Winkel gegenüberliegende Seite zwischen der anderen und deren Supplementseite liegt.

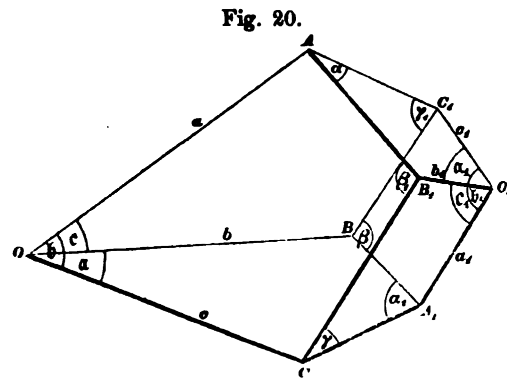
Aus der Kongruenz (Symmetrie) zweier Ecken, die mit Hilfe der Gleichheit dreier Stücke bewiesen ist, folgt die Gleichheit der übrigen (homologen) Stücke. Also:

*) Hierzu das in der Fussnote auf S. 40 erwähnte Modell, in welchem eine von denjenigen Ecken als zu konstruierende anzusehen ist, in welchen a, b, c spitz sind.

107. **In zwei kongruenten (symmetrischen) Ecken sind je zwei homologe Stücke einander gleich.**

**34.** ***Die Polarecke.*** — Fällt man von einem beliebigen Punkte $O_1$ innerhalb einer Ecke $O(ABC)$ die Senkrechten $O_1A_1$, $O_1B_1$, $O_1C_1$ auf die Seiten der Ecke (Fig. 20), so sind diese Senkrechten die Kanten einer neuen Ecke, welche die **Polarecke** der ersten genannt wird.

Fig. 20.



Fällt man aus einem anderen Punkte $O_2$ die Senkrechten $O_2A_2$, $O_2B_2$, $O_2C_2$, so ist $O_1A_1 \parallel O_2A_2$, $O_1B_1 \parallel O_2B_2$, $O_1C_1 \parallel O_2C_2$ (59), folglich $A_1O_1B_1 = A_2O_2B_2$, $B_1O_1C_1 = B_2O_2C_2$, $C_1O_1A_1 = C_2O_2A_2$ (23), folglich $O_1(A_1B_1C_1) \cong O_2(A_2B_2C_2)$ (104); d. h.:

108. **Alle zu einer gegebenen Ecke konstruierten Polarecken sind einander kongruent.**

Anm. Die Lage des Punktes $O_1$ ist hiernach für Gestalt und Grösse der Polarecke gleichgiltig.

Da $c_1 \perp (ab)$ und $a_1 \perp (bc)$,
so ist nach (52) auch
$$(c_1a_1) \perp (ab) \text{ und } (c_1a_1) \perp (bc);$$
folglich nach (56)
$$b \perp (c_1a_1).$$
Durch cirkuläre Vertauschung der Buchstaben $a$, $b$, $c$ findet sich ferner:
$$c \perp (a_1b_1); \quad a \perp (b_1c_1);$$

109. d. h.: **Stehen die Kanten der zweiten Ecke senkrecht auf den Seiten der ersten, so stehen auch die Kanten der ersten senkrecht auf den Seiten der zweiten. Anders ausgedrückt: Ist die zweite Ecke Polarecke der ersten, so ist auch die erste Polarecke der zweiten.**

Da $c_1 \perp (ab)$, so ist nach 50 auch $c_1 \perp AC_1$ und $c_1 \perp BC_1$; d. h.: $AC_1B$ ist der Neigungswinkel der Ebenen $(b_1c_1)$ und $(a_1c_1)$, oder $AC_1B = \gamma_1$. Entsprechendes findet für alle Winkel der beiden Ecken statt, sodass man hat:

$$CA_1B = \alpha_1, \quad AB_1C = \beta_1, \quad BC_1A = \gamma_1;$$
$$C_1AB_1 = \alpha, \quad A_1BC_1 = \beta, \quad B_1CA_1 = \gamma.$$

Da nun $a \perp (b_1 c_1)$, so ist auch $a \perp AC_1$; und da $b \perp (c_1 a_1)$, so ist auch $b \perp BC_1$; d. h.: es ist $OAC_1 = OBC_1 = R$, und in dem Viereck $\overline{AOC_1B}$ ist $AOB + AC_1B = 2R$ (T. II, 84), oder $\mathfrak{c} + \gamma_1 = 2R$. Durch cirkuläre Vertauschung der Buchstaben und durch Umstellung der Indices erhält man das Resultat, dass folgende Ausdrücke den Wert $2R$ haben:

$$\mathfrak{a} + \alpha_1, \quad \mathfrak{b} + \beta_1, \quad \mathfrak{c} + \gamma_1,$$
$$\mathfrak{a}_1 + \alpha, \quad \mathfrak{b}_1 + \beta, \quad \mathfrak{c}_1 + \gamma;$$

d. h.: Jede Seite einer Ecke beträgt mit demjenigen Winkel ihrer Polarecke, dessen Scheitellinie auf ihr senkrecht steht, zusammen $2R$. 110.

Zwei Polarecken stehen also in der Beziehung zu einander, dass die Seiten der einen und die Winkel der andern Supplemente sind. Mittelst dieser Beziehung lässt sich aus jedem Satze, welcher von Seiten und Winkeln einer Ecke handelt, ein andrer ableiten, in welchem statt der Seiten die Winkel, statt der Winkel die Seiten auftreten.

**35.** *Die drei letzten Fälle der Bestimmung einer Ecke durch drei Stücke.* — Sind zwei Ecken kongruent, so sind ihre Seiten und Winkel, also nach 110 auch die Winkel und Seiten ihrer Polarecken gleich; daher sind auch ihre Polarecken kongruent. Also:

Sind zwei Ecken kongruent (symmetrisch), so sind auch ihre Polarecken kongruent (symmetrisch). 111.

Mittelst der Sätze 110 und 111 lässt sich nun die Kongruenz zweier Ecken in den noch übrigen drei Fällen darthun.

Vierter Fall. Drei Winkel $(\alpha\beta\gamma)$. — Sind in zwei Ecken die drei Winkel gleich, so sind nach 110 in ihren Polarecken die drei Seiten gleich $(\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1)$. (Denn werden die Stücke der zweiten Ecke und ihrer Polarecke durch einen hinzugefügten Strich von denen der ersten unterschieden, so folgt z. B. aus $\alpha + \mathfrak{a}_1 = 2R$, $\alpha' + \mathfrak{a}_1' = 2R$, $\alpha = \alpha'$, dass auch $\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{a}_1'$ ist.) Folglich sind diese Polarecken einander kongruent (104), daher auch die gegebenen Ecken (111). Also:

Vierter Kongruenzsatz: Zwei Ecken sind kongruent (oder symmetrisch), wenn sie in den drei Winkeln übereinstimmen. 112.

Fünfter Fall. Eine Seite und die beiden anliegenden Winkel $(\alpha\beta\mathfrak{c})$. — Sind in zwei Ecken eine Seite und

die beiden anliegenden Winkel gleich, so sind nach 110 in ihren Polarecken zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel gleich ($\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1\gamma_1$). Folglich sind diese Polarecken einander kongruent (105), daher auch die gegebenen Ecken (111). Also:

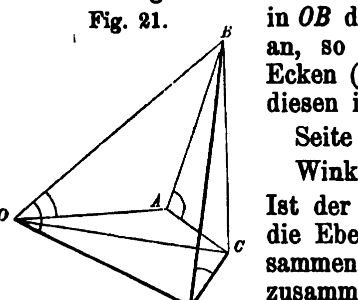
113. Fünfter Kongruenzsatz: Zwei Ecken sind kongruent (oder symmetrisch), wenn sie in einer Seite und den beiden anliegenden Winkeln übereinstimmen.

Sechster Fall. Eine Seite, ein anliegender und der gegenüberliegende Winkel ($\alpha\beta\mathfrak{b}$). — Sind in zwei Ecken eine Seite, ein anliegender und der gegenüberliegende Winkel gleich, so sind nach 110 in ihren Polarecken zwei Seiten und ein nicht eingeschlossener Winkel gleich ($\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1\beta_1$). Folglich sind diese Polarecken einander kongruent (106), wenn $\mathfrak{b}_1$ zwischen $\mathfrak{a}_1$ und $2R-\mathfrak{a}_1$ liegt. Daher sind auch die gegebenen Ecken kongruent (111), wenn $2R-\beta$ zwischen $2R-\alpha$ und $2R-(2R-\alpha)$ liegt, d. h. wenn $\beta$ zwischen $\alpha$ und $2R-\alpha$ liegt. Also:

114. Sechster Kongruenzsatz: Zwei Ecken sind kongruent (oder symmetrisch), wenn sie in einer Seite, einem anliegenden und dem gegenüberliegenden Winkel übereinstimmen, und der der Seite gegenüberliegende Winkel zwischen dem andern und dessen Supplementwinkel liegt.

**36.** *Beziehungen zwischen den Winkeln und Seiten einer Ecke.* — Trägt man an ein Dreieck $\overline{OBC}$ nach beiden Seiten in $OB$ den Winkel $\beta$, in $OC$ den Winkel $\gamma$ an, so erhält man zwei symmetrische Ecken (113) $O(ABC)$ und $O(A_1BC)$. In diesen ist nach 107

Fig. 21.




$$\text{Seite } BOA = BOA_1, \text{ Seite } COA = COA_1,$$
$$\text{Winkel } BAC = BA_1C \text{ (vgl. Fig. 19).}$$

Ist der Winkel $\gamma$ ein rechter, so fallen die Ebenen $OAC$ und $OA_1C$ in eine zusammen, und die beiden Ecken bilden zusammen die Ecke $O(ABA_1)$. Da in dieser gleichzeitig Seite $BOA = BOA_1$ und Winkel $BAC = BA_1C$ ist, so hat man den Satz:

115. Gleichen Seiten einer Ecke liegen gleiche Winkel gegenüber (und umgekehrt).

Anm. Andrer Beweis dieses Satzes: $\overline{BOA} \cong \overline{BOA_1}$, $\overline{BAC} \cong \overline{BA_1C}$, daher $BAC = BA_1C$. — Specielle Fälle von 115 sind?

Anm. Dieser, dem pythagoräischen Satze der Geometrie entsprechende Satz hat natürlich nur algebraische Bedeutung.

**42.** *Beziehungen zwischen den Ecken eines Tetraeders.* — Wie unter allen geradlinigen Figuren das Dreieck die geringste Zahl der Strecken zu seiner Begrenzung erfordert, so unter allen ebenflächigen Körpern das Tetraeder die geringste Zahl der Ebenen. Den drei Seiten des Dreiecks entsprechen die vier Seiten, den drei Winkeln des Dreiecks die vier Ecken des Tetraeders. — Beziehungen zwischen den Ecken des Tetraeders (entsprechend T. II, Nr. 61 und 62) können darum hier nicht aufgestellt werden, weil die Ecke nicht, wie der Winkel, durch eine einmalige, sondern durch eine zweimalige Drehung entsteht, ihre Grösse also, wie oben (Nr. 29) bemerkt, nicht direkt, sondern nur mit Hilfe einer Kugelfläche bestimmt werden kann.

Anm. Setzt man die Summe der Ecken eines Tetraeders gleich $x$, und legt durch einen Punkt $X$ innerhalb des Tetraeders und durch jede Kante eine Ebene, so zerfällt das gegebene Tetraeder in vier neue Tetraeder, deren Ecken (bis auf diejenigen mit dem Scheitel $X$) zusammen gleich den Ecken des gegebenen sind. Wäre nun die Summe der vier Ecken in allen Tetraedern gleich, so würde man (vgl. erste Anm. in Nr. 29) erhalten: $4x = x + 4\pi$; $x = \frac{4}{3}\pi$. — Legt man nur durch eine Kante $AD$ (Fig. 25) eine Ebene $ADE$, welche das Tetraeder in zwei Teile teilt, so ist die Summe der Ecken dieser letzteren (bis auf diejenigen mit dem Scheitel $E$) gleich der Summe der Ecken des gegebenen. Bezeichnet man die Summe der beiden Nebenecken mit dem Scheitel $E$ mit $y$, so würde nach der vorigen Annahme sein: $2x = x + y$, oder $x = y$. Nun ist aber $y$ eine veränderliche Grösse (98a), also auch $x$. Demnach hat die Summe der Ecken eines Tetraeders überhaupt keinen festen Wert. — Wie lässt sich, unter der Voraussetzung, dass die Winkelsumme eines Dreiecks einen festen Wert hat, durch zwei analoge Methoden beweisen, dass diese Summe $2R$ ist?

Eine beliebige Anzahl von Ebenen bildet in jeder Aufeinanderfolge einen Körper, welcher Polyeder genannt wird, und zwar konkaves Polyeder, wenn alle seine Ecken konkav sind.

Da jede Seite eines Polyeders von einer Anzahl Kanten, jede Kante von zwei Eckpunkten begrenzt ist, so lässt sich annehmen, dass zwischen der Zahl der Seiten, Kanten und Eckpunkte eines Polyeders eine analoge Beziehung besteht, wie zwischen der Zahl der Seiten und Ecken eines Polygons (T. II, 82). — Zerlegt man nun jede Seite des Polyeders, die im allgemeinen ein Polygon ist, durch Diagonalen von einem Eckpunkte aus in Dreiecke, und legt durch einen beliebigen Punkt im Innern des Polyeders und durch sämmtliche Kanten und Diagonalen Ebenen, so zerfällt das Polyeder in lauter Tetraeder.

Umgekehrt lässt sich jedes Polyeder aus Tetraedern zusammensetzen. — Bezeichnen wir nun die Zahl der Seiten eines Polyeders mit $s$, die Zahl seiner Kanten mit $k$, die Zahl seiner Eckpunkte mit $e$, so ist für das Tetraeder

$$s = 4,\ k = 6,\ e = 4;$$

also (1) $$e + s - k = 2.$$

Angenommen, diese Formel gelte für ein aus $n$ Tetraedern zusammengesetztes Polyeder. Wenn sich dann zeigen lässt, dass sie auch noch für dasjenige Polyeder gilt, welches aus dem vorigen durch Hinzufügung eines neuen Tetraeders entsteht, so gilt sie allgemein. Denn sie gilt, wie bereits gefunden, für das Tetraeder, also, wenn jener Satz bewiesen ist, für das aus 2, 3 .. Tetraedern zusammengesetzte, d. h. für jedes Polyeder.

Fügt man nun einem Polyeder ein Tetraeder hinzu, so fallen drei Eckpunkte und drei Kanten des letzteren mit drei Eckpunkten und drei Kanten des ersteren zusammen. Das Tetraeder liefert also nur einen neuen Eckpunkt und drei neue Kanten. Ausserdem fällt eine Seite des Tetraeders mit einer Seite des Polyeders zusammen, und diese beiden fallen nun in das Innere des neuen Körpers, zählen also als Seiten nicht mehr mit. Demnach verliert das Polyeder eine Seite und erhält drei neue Seiten, gewinnt also im ganzen zwei Seiten. Die Zahl seiner Eckpunkte, Seiten und Kanten ist demnach $(e + 1)$, $(s + 2)$, $(k + 3)$. Da nun

$$(2)\quad (e + 1) + (s + 2) - (k + 3) = e + s - k = 2$$

ist, so gilt Formel (1), wenn für den aus $n$, so auch für den aus $n + 1$ Tetraedern bestehenden Körper.

Fällt eine zweite Seite des Tetraeders mit einer Seite des Polyeders in dieselbe Ebene, so fällt die zwischen beiden Seiten liegende Kante aus der Zahl der Grenzkanten weg, und die Zahl der Seiten verringert sich ebenfalls um Eins, während die Zahl der Eckpunkte dieselbe bleibt. Die Zahl der Eckpunkte, Seiten und Kanten des neuen Polyeders ist demnach $(e + 1)$, $(s + 1)$, $(k + 2)$, und wiederum ist

$$(e + 1) + (s + 1) - (k + 2) = e + s - k = 2.$$

Anm. Wenn in Fig. 25 $\overline{ADCE}$ das hinzutretende Tetraeder ist, so fällt $\overline{ADE}$ in das Innere des Körpers, ferner fällt $\overline{AEB}$ mit $\overline{AEC}$ und $\overline{DEB}$ mit $\overline{DEC}$ zusammen; also verliert das Polyeder die Seite $\overline{AED}$ und gewinnt nur die Seite $\overline{ACD}$. Es verliert ferner die Kanten $AE$ und $DE$, und gewinnt $AC$ und $DC$, während $CE$ mit $BE$ zusammenfällt. Es verliert endlich den Eckpunkt $E$ und gewinnt dafür $C$. Die Zahl der Seiten, Kanten

und Eckpunkte bleibt also in diesem Falle unverändert. Derselbe kann aber für den Beweis unseres Satzes übergangen werden, da er offenbar nur bei der Zerlegung eines Tetraeders in zwei neue Tetraeder in Betracht kommt, welche Zerlegung hier unnötig ist.

Hiernach gilt allgemein der Satz:

In jedem konkaven Polyeder ist die Zahl der Sei- 134.
ten, vermehrt um die Zahl der Eckpunkte, um Zwei grösser als die Zahl der Kanten.*)

Anm. $n$ Ebenen schneiden sich zu je zwei in $n^{\cdot 2}$ Geraden und zu je drei in $n^{\cdot 3}$ Punkten. (Hierbei können Geraden und Punkte zusammenfallen oder in unendliche Entfernung rücken.) Die Zahl der Ebenen, welche man durch je drei von $n$ Punkten legen kann, beträgt ebenfalls $n^{\cdot 3}$. (Hierbei können Ebenen zusammenfallen oder parallel werden.) — Entsprechend den Sternfiguren (T. II, Nr. 64, letzte Anm.) giebt es auch Sternpolyeder. (S. Nr. 87 am Ende.)

**43.** *Bestimmung des Tetraeders durch seine Stücke.* — Seiten und Ecken eines Tetraeders heissen seine Hauptstücke, Kanten und Winkel seine Nebenstücke. Ein Tetraeder hat also 8 Hauptstücke und 12 Nebenstücke.

Soll ein Tetraeder aus Hauptstücken konstruiert werden, so dürfen dieselben nicht ganz beliebig gegeben sein, sondern es müssen je zwei Seiten in einer Kante, je zwei Ecken in einem Winkel übereinstimmen. Endlich muss eine Seite des Tetraeders, die einer Ecke anliegen soll, einen ebenen Winkel enthalten, welcher gleich einer Seite der Ecke ist.

Die Konstruktion der Tetraeder aus Hauptstücken erfolgt durch geometrische Oerter in analoger Weise wie die Konstruktion der Dreiecke (T. II, Nr. 66 und 67). Man erhält die Sätze:

Ist zu einem Tetraeder eine Seite ($\overline{BCD}$, Fig. 24) 135.
und eine anliegende Ecke ($\overline{C}$) gegeben, so ist der geometrische Ort des vierten Eckpunktes die dritte Kante ($CA$) der in $C$ an $\overline{BCD}$ angetragenen Ecke. — ($a\overline{C}$)

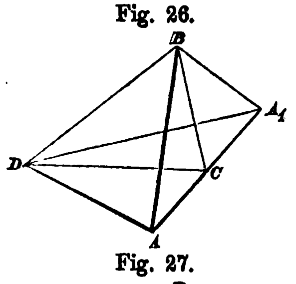
Sind zu einem Tetraeder zwei Seiten ($\overline{BCD}$ und $\overline{BCA}$) 136.
gegeben, so ist der geometrische Ort des vierten Eckpunktes die Kreislinie, welche $A$ beschreibt, wenn die Seite $\overline{BCA}$ sich um die Kante $BC$ dreht. — ($a\overline{b}$)

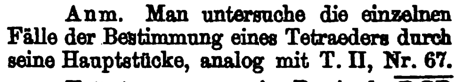
---

*) Nach Euler (1707—83), dem Urheber dieses Satzes, heissen konkave Polyeder auch Euler'sche Polyeder. — Für andere Polyeder gilt der Satz nicht. Setzt man z. B. einen kleineren Würfel so auf einen grösseren, dass die Kanten beider sich nicht berühren, so ist für den Gesammtkörper $e = 16$, $k = 24$, $s = 11$, also $e + s - k = 3$.

137. Zur Bestimmung eines Tetraeders sind drei seiner Hauptstücke (unter denen wenigstens eine Seite sein muss) notwendig und hinreichend.

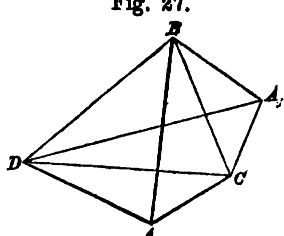
Fig. 26.





Anm. Man untersuche die einzelnen Fälle der Bestimmung eines Tetraeders durch seine Hauptstücke, analog mit T. II, Nr. 67.

Trägt man an ein Dreieck $\overline{BCD}$ (Fig. 26) nach beiden Seiten in $B$ die Ecke $\overline{B}$, in $D$ die Ecke $\overline{D}$ an, so erhält man zwei symmetrische Tetraeder $\overline{ABCD}$ und $\overline{A_1BCD}$.

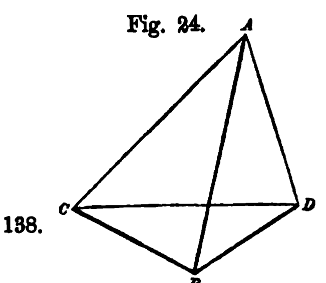
Fig. 27.




Ist der Winkel $\overline{DC}$ ein rechter, so liegen $\overline{DCA}$ und $\overline{DCA_1}$ in derselben Ebene. Ist ausserdem $\overline{BC}$ ein rechter Winkel, so liegen auch $\overline{BCA}$ und $\overline{BCA_1}$ in derselben Ebene, und der aus den beiden Tetraedern bestehende Körper geht in ein Tetraeder über, in welchem $\overline{BDA} \cong \overline{BDA_1}$ ist.

**44.** ***Beziehungen zwischen den Ecken und Seiten eines Tetraeders.*** — Ein Tetraeder heisst gleichschenklig, wenn zwei; gleichseitig, wenn drei; regelmässig, wenn alle vier Seiten einander symmetrisch kongruent sind.

Fig. 24.




Ist $\overline{ACB} \cong \overline{ACD}$ (Fig. 24), so ist $AB = AD$, und $CB = CD$; d. h.: $\overline{ABD}$ und $\overline{CBD}$ sind gleichschenklige Dreiecke. Also:

138. Im gleichschenkligen Tetraeder sind die nichtkongruenten Seiten gleichschenklige Dreiecke.

Ist ausserdem $\overline{ABD} \cong \overline{ACB} \cong \overline{ADC}$, so müssen auch $\overline{ACD}$ und $\overline{ACB}$ gleichschenklig sein; und da $BC = CD = DB$, so ist $\overline{BCD}$ gleichseitig; d. h.:

139. Im gleichseitigen Tetraeder sind die kongruenten Seiten gleichschenklige Dreiecke, während die vierte Seite ein gleichseitiges Dreieck ist.

Ist ausserdem $\overline{BCD} \cong \overline{ABD} \cong \overline{ACB} \cong \overline{ADC}$, so müssen auch die drei letzteren Dreiecke gleichseitig sein; d. h.:

Im regelmässigen Tetraeder sind alle vier Seiten gleichseitige Dreiecke. 140.

Ist $\overline{ACB} \cong \overline{ACD}$, so sind die Ecken $\bar{D}$ und $\bar{B}$ kongruent (138 und 104); d. h.:

Kongruenten Seiten eines Tetraeders liegen kongruente Ecken gegenüber (und umgekehrt). 141.

Anm. Hiernach sind im gleichschenkligen Tetraeder zwei, im gleichseitigen drei, im regelmässigen alle vier Ecken kongruent.

Da in Fig. 27 die Halbierungsebene des Raumwinkels $\overline{BD}$ gleichzeitig auf $\overline{DAA_1}$ und $\overline{BAA_1}$ senkrecht steht, und da $\overline{DAC} \cong \overline{DA_1C}$; $\overline{BAC} \cong \overline{BA_1C}$ ist, so hat man den Satz:

Halbiert man im gleichschenkligen Tetraeder den 142.
von den kongruenten Seiten eingeschlossenen Raumwinkel, so steht die Halbierungsebene auf den beiden anderen Seiten und deren gemeinsamer Kante senkrecht, und teilt jede dieser Seiten in zwei kongruente Dreiecke.

Anm. Man bilde die Umkehrungssätze, analog zu T. II, Anm. zu 99.

Folgerung: Im gleichseitigen Tetraeder schneiden 143.
sich die drei Ebenen, welche die von den kongruenten Seiten eingeschlossenen Winkel halbieren, in einer Geraden, welche auf der vierten Seite in deren Mittelpunkte senkrecht steht (T. II, 201).

Anm. Man untersuche die Beziehungen zweier über demselben gleichschenkligen Dreieck errichteten gleichschenkligen, und zweier über demselben gleichseitigen Dreieck errichteten gleichseitigen Tetraeder, analog mit T. II, Nr. 70.

Fällt man in einem beliebigen Tetraeder aus einem Eckpunkte $A$ eine Senkrechte auf die Gegenseite $\mathfrak{a}$ und legt durch diese Senkrechte und die drei anderen Eckpunkte Ebenen, so zerfällt das Tetraeder in drei Tetraeder, und die Seite $\mathfrak{a}$ in drei Seiten $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{d}_1$, welche die Projektionen von $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ auf die durch $\mathfrak{a}$ bestimmte Ebene sind. Dann ist nach 130

$$\mathfrak{b}_1 < \mathfrak{b};\ \mathfrak{c}_1 < \mathfrak{c};\ \mathfrak{d}_1 < \mathfrak{d};$$

also $$\mathfrak{b}_1 + \mathfrak{c}_1 + \mathfrak{d}_1 < \mathfrak{b} + \mathfrak{c} + \mathfrak{d},$$

oder $$\mathfrak{a} < \mathfrak{b} + \mathfrak{c} + \mathfrak{d};$$

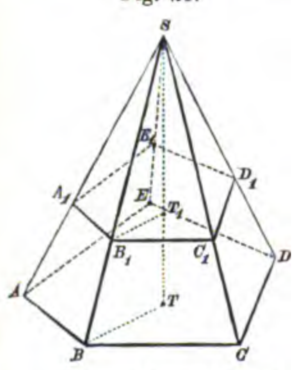
d. h.: In jedem Tetraeder ist die Summe dreier Seiten 144.
grösser als die vierte.

### b) Die Pyramide.

**45.** *Definitionen und Eigenschaften der Pyramide.* — Wie die dreiseitige Ecke durch das Hinzutreten einer vierten Ebene

sich zu einem Körper, dem Tetraeder, schliesst, so auch die vielseitige Ecke durch das Hinzutreten einer neuen Ebene zu einem Körper, welcher **Pyramide** genannt wird. — Eine Pyramide ist also ein Körper, welcher begrenzt wird von Ebenen, deren Schnittlinien alle durch einen Punkt gehen, und von einer Ebene, welche alle diese Linien schneidet. — Die ersteren Ebenen heissen **Seitenflächen**, die letztere **Grundfläche** der Pyramide. Die Strecken, in welchen die Seitenflächen sich schneiden, heissen **Seitenkanten**, diejenigen, in welchen die Seitenflächen von der Grundfläche geschnitten werden, **Grundkanten** der Pyramide. Der gemeinsame Schnittpunkt der Seitenkanten heisst **Spitze**, die von der Spitze auf die Grundfläche gefällte Senkrechte **Höhe** der Pyramide. Die Pyramide heisst $n$-**seitig**, wenn sie $n$ Seitenflächen enthält. — Die Grundfläche einer $n$-seitigen Pyramide ist ein $n$-Eck, während die Seitenflächen Dreiecke sind. Jede Pyramide hat ebensoviele Seitenkanten und Grundkanten als Seitenflächen. Das Tetraeder ist eine dreiseitige Pyramide, in welcher jede Seite als Grundfläche, jeder Eckpunkt als Spitze angesehen werden kann. Eine Pyramide heisst **regelmässig** oder **unregelmässig**, je nachdem ihre Grundfläche ein regelmässiges oder unregelmässiges $n$-Eck ist. Eine Pyramide heisst **gerade** oder **schief**, je nachdem der Fusspunkt ihrer Höhe von **allen** Eckpunkten der Grundfläche gleichweit entfernt ist oder nicht. (Kombination der beiden letzten Einteilungen.)

Fig. 28.




Verbindet man den Fusspunkt der Höhe ($T$, Fig. 28) mit den Eckpunkten der Grundfläche, so bilden diese Verbindungslinien mit den Seitenkanten und der Höhe rechtwinklige Dreiecke (z. B. $\overline{STB}$), welche die Pyramide in $n$ Tetraeder teilen. Ist die Pyramide gerade, so sind diese Dreiecke kongruent (T. II, 105), und es ist daher $TA = TB = TC, \ldots$; d. h.: der Fusspunkt der Höhe ist Mittelpunkt eines der Grundfläche umbeschriebenen Kreises. Man hat daher den Satz:

145. **Die Grundfläche einer geraden Pyramide ist ein Sehnenpolygon, dessen Umkreis den Fusspunkt der Höhe zum Mittelpunkt hat.** (Die Seitenflächen

einer geraden Pyramide sind gleichschenklige Dreiecke.)

Anm. Welches sind hiernach die Eigenschaften der geraden regelmässigen, geraden unregelmässigen, schiefen regelmässigen, schiefen unregelmässigen Pyramide?

Aus der Kongruenz der Dreiecke $\overline{SAT}$, $\overline{SBT}$ ... folgt ferner die Gleichheit der Seiten $SA$, $SB$ ... und der Winkel $SAT$, $SBT$, ... Da diese Winkel die Neigungswinkel der Kanten gegen die Grundfläche sind (Nr. 19), so hat man den Satz:

Die Seitenkanten einer geraden Pyramide sind einander gleich und bilden mit der Grundfläche gleiche Neigungswinkel. 146.

Aus Betrachtung der Figur 28 folgt ferner:

Unter allen Strecken, die man zwischen einem Punkte und einer Ebene ziehen kann, ist die Senkrechte die kürzeste (T. II, 108). 147.

Sind von einem Punkte nach einer Ebene (ausser der Senkrechten) beliebig viele gleichlange Strecken gezogen, so haben deren Fusspunkte vom Fusspunkte der Senkrechten gleichen Abstand (und umgekehrt) (T. II, 105). 148.

Sind von einem Punkte nach einer Ebene (ausser der Senkrechten) zwei ungleiche Strecken gezogen, so hat der Fusspunkt der längeren auch den grösseren Abstand vom Fusspunkte der Senkrechten (und umgekehrt) (T. II, 118). 149.

**46.** *Schnittebenen der Pyramide.* — Wie jedes Polygon, welches nur konkave Winkel enthält, durch eine Gerade in zwei Polygone, so wird auch jedes Polyeder, welches nur konkave Flächenwinkel enthält, durch eine Ebene in zwei Polyeder geteilt. Wird eine Pyramide durch eine Ebene geschnitten, so ist die Gestalt der Teile verschieden, je nachdem der Schnitt durch Spitze und Grundfläche, oder nur durch die Grundfläche, oder durch keine von beiden geführt wird.

1) Schnitt durch Spitze und Grundfläche. — Eine durch die Spitze der Pyramide gelegte Ebene schneidet die Grundfläche in einer Geraden, welche den Umfang des die Grundfläche bildenden Polygons in zwei Punkten schneidet. Die Verbindungsstrecken dieser Punkte mit der Spitze sind die Linien, in welchen zwei Seitenflächen der Pyramide von der Schnittebene geschnitten werden. Die Schnittfläche ist

hiernach ein Dreieck und die beiden Teile der Pyramide sind selbst Pyramiden. Also:

150. **Eine durch Spitze und Grundfläche einer Pyramide gelegte Ebene bildet ein Dreieck als Schnittfigur und teilt die Pyramide in zwei neue Pyramiden.**

2) **Schnitt durch die Grundfläche.** — Derselbe teilt die Pyramide in zwei Polyeder. Dasjenige von ihnen, welches die Spitze enthält, zerfällt durch einen Schnitt, welcher durch die Spitze und durch die Schnittlinie der Grundfläche geht, in zwei Pyramiden. Das andere kann hiernach als algebraische Summe dreier Pyramiden dargestellt werden.

3) **Schnitt, der weder Grundfläche noch Spitze trifft.** — Derselbe schneidet jede der Seitenflächen, und ist daher ein Polygon von gleicher Seitenzahl wie die Grundfläche.

Ist in Fig. 28 $\overline{ABCDE}$ die Grundfläche der Pyramide, und $\overline{A_1B_1C_1D_1E_1}$ die Schnittfigur, so gehen die Verbindungslinien je zweier homologer Ecken beider Polygone (z. B. $AA_1$) durch denselben Punkt $S$. Es müssen sich ferner die Verlängerungen je zweier homologer Seiten (z. B. $AB$ und $A_1B_1$) in Punkten schneiden, die den Ebenen beider Polygone gleichzeitig angehören, d. h. in Punkten, welche auf der Schnittlinie beider Ebenen liegen. Da also die beiden Polygone die Eigenschaft haben, dass die Verbindungslinien ihrer homologen Punkte alle durch einen endlich fernen Punkt gehen, und dass die Schnittpunkte ihrer homologen Seitenlinien alle auf einer endlich fernen Geraden liegen, so sind die beiden Polygone **kollinear**. (T. II, Nr. 107.)

Ist die Schnittebene der Grundfläche parallel, so rückt die Schnittlinie beider Ebenen in unendliche Entfernung, und die Kollinearität der beiden Polygone geht in die **Aehnlichkeit** über. (Dieser specielle Fall ist in Fig. 28 dargestellt.)

Anm. Die Aehnlichkeit der Polygone $\overline{ABCDE}$ und $\overline{A_1B_1C_1D_1E_1}$ in Fig. 28 folgt auch daraus, dass z. B. $A_1B_1 \parallel AB$ (89); also $\overline{SAB} \sim \overline{SA_1B_1}$; $\overline{SBC} \sim \overline{SB_1C_1}$ ist, u. s. w. Hieraus folgt: $AB : A_1B_1 = SB : SB_1 = BC : B_1C_1$ etc. Ferner folgt aus $AB \parallel A_1B_1$ und $BC \parallel B_1C_1$, dass $ABC = A_1B_1C_1$ ist, etc. Demnach sind die Polygone ähnlich, weil die Winkel und die Seitenverhältnisse des einen der Reihe nach gleich denen des andern sind.

Derjenige Teil der Pyramide, welcher die Spitze enthält, ist selbst eine Pyramide, der andere heisst **Pyramidenstumpf** und lässt sich als Differenz zweier Pyramiden darstellen. Demnach:

Eine Ecke, in welcher zwei Seiten einander gleich sind, heisst **gleichschenklig**. Sind alle drei Seiten gleich, so heisst sie **gleichseitig**.

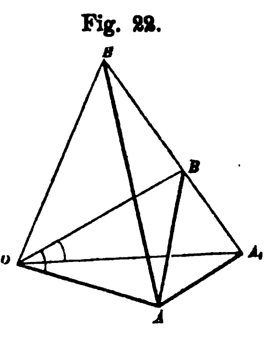
**Sind in einer Ecke zwei Seiten gleich, so halbiert die Halbierungsebene des von ihnen eingeschlossenen Winkels die dritte Seite und steht auf ihr senkrecht.** (Umkehrungssätze!) 116.

Ist in der Ecke $O(ABA_1)$ (Fig. 21) $BOA_1 > BOA$, so ist in den rechtwinkligen Dreiecken $\overline{BOA_1}$ und $\overline{BOA}$ die Seite $BA_1 > BA$ (T. II, 175); folglich in den rechtwinkligen Dreiecken $\overline{BCA_1}$ und $\overline{BCA}$ der Winkel $BAC > BA_1C$ (T. II, 118). Man hat also die Sätze:

**Der grösseren von zwei Seiten einer Ecke liegt der grössere Winkel gegenüber. — Dem grösseren von zwei Winkeln einer Ecke liegt die grössere Seite gegenüber.** 117.

Ist in der Ecke $O(BAA_1)$ (Fig. 22) $BOA = BOA_1$, $OA = OA_1$, ist ferner durch einen beliebigen Punkt $E$ auf der Verlängerung von $A_1B$ die Ebene $(EOA)$ gelegt, so ist $OBA \cong \overline{OBA_1}$ (T. II, 91), folglich $BA = BA_1$, ferner $(EB + BA =)\ EA_1 > EA$ (T. II, 109); daher ist in den Dreiecken $\overline{EOA_1}$ und $\overline{EOA}$ Winkel $EOA_1 > EOA$ (T. II, 123), oder, da $EOA_1 = EOB + BOA_1 = EOB + BOA$ ist, so ist in der Ecke $O(EBA)$

Fig. 22.




$$EOB + BOA > EOA;$$

d. h.: **In jeder Ecke ist die Summe zweier Seiten grösser als die dritte.** 118.

Aus der letzten Beziehung folgt:

$$EOA - EOB < BOA;$$

d. h.: **In jeder Ecke ist die Differenz zweier Seiten kleiner als die dritte.** 119.

Aus 118 folgt, dass die Drehung von $OA$ durch $OE$ nach $OB$ grösser ist, als die ebene Drehung von $OA$ nach $OB$. Daraus folgt weiter, dass eine Reihe von ebenen Drehungen, welche $OA$ durch Zwischenrichtungen hindurch bis $OB$ macht, grösser ist, als die direkte ebene Drehung von $OA$ nach $OB$. Und da hieran nichts geändert wird, wenn die Seite der Drehung sich

beständig ändert, d. h. wenn $OA$ eine beliebige Kegelfläche beschreibt, so folgt weiter:

120. **Unter allen Drehungen zwischen zwei sich schneidenden Geraden ist die ebene Drehung die kürzeste.** (Vgl. T. II, Nr. 73.)

Wenn, wie früher, die Seiten einer Ecke durch $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$, die Winkel ihrer Polarecke durch $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ bezeichnet werden, so ist nach 118

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{b} > \mathfrak{c};$$

daher, wenn man 110 benutzt:

$$2R - \alpha_1 + 2R - \beta_1 > 2R - \gamma_1$$

oder

$$\alpha_1 + \beta_1 - \gamma_1 < 2R;$$

121. d. h.: **In jeder Ecke ist die Summe zweier Winkel, vermindert um den dritten, kleiner als $2R$.**

Betrachten wir in Fig. 22 die Dreiecke $\overline{OAB}$, $\overline{OBE}$, $\overline{OEA}$, welche $O$ als gemeinsame Spitze haben, so ist die Summe aller ihrer Winkel $6R$; also, wenn wir die Summe der 3 Winkel an der Spitze $O$ mit $S_1$, die Summe der 6 Winkel an den Basislinien mit $S_2$ bezeichnen:

$$1)\quad S_1 + S_2 = 6R.$$

Nun ist nach 118 in jeder der drei Ecken, welche die Scheitel $E, B, A$ haben, die Summe zweier der eben genannten Winkel an den Basislinien grösser als der dritte, dem Dreieck $\overline{EBA}$ angehörige Winkel; daher, weil die Winkelsumme dieses Dreiecks $2R$ ist:

$$2)\quad S_2 > 2R.$$

Aus 1) und 2) folgt

$$3)\quad S_1 < 4R;$$

122. d. h.: **Die Summe der drei Seiten einer Ecke ist grösser als 0 und kleiner als $4R$.**

Anm. Aus 122 folgt: Die Summe der konkaven Winkel, welche die Schenkel eines Winkels mit einer aus seinem Scheitel gezogenen Strecke bilden, ist am grössten, wenn die Strecke in der Ebene des Winkels, aber ausserhalb, und am kleinsten, wenn sie in der Ebene des Winkels, aber innerhalb desselben liegt. — Die Ecke geht in eine Gerade über, wenn die Summe ihrer Seiten 0, und in eine Ebene, wenn die Summe ihrer Seiten $4R$ ist.

Aus $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \mathfrak{c} > 0$ folgt

$$2R - \alpha_1 + 2R - \beta_1 + 2R - \gamma_1 > 0,$$

oder

$$\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 < 6R.$$

Aus $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \mathfrak{c} < 4R$ folgt:

$$2R - \alpha_1 + 2R - \beta_1 + 2R - \gamma_1 < 4R,$$

oder $$\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 > 2R;$$

d. h.: Die Summe der drei Winkel einer Ecke ist 123.
grösser als $2R$ und kleiner als $6R$.

**37.** ***Die rechte Ecke und ihre Polarecke.*** — Sind die Seiten einer Ecke gleich $R$, so sind auch ihre Winkel gleich $R$ (52); also sind auch die Winkel und Seiten ihrer Polarecke gleich $R$; d. h.:

Die Polarecke einer rechten Ecke ist ebenfalls eine rechte Ecke. 124.

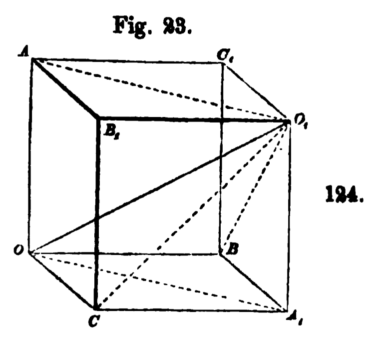


Fig. 23.

Anm. Die Vierecke $\overline{OAB_1C}$ u. s. w. in Fig. 20 gehen, wenn die Ecke $O$ eine rechte wird, in Rechtecke über. Vgl. Fig. 20 mit Fig. 23.

Verbindet man den Scheitel der rechten Ecke mit dem ihrer Polarecke und mit dem gegenüberliegenden Eckpunkte ($A_1$) eines der Rechtecke, welche ihre Seiten bilden, so ist $OA_1O_1 = R$; also

$$(1) \qquad OO_1^2 = OA_1^2 + O_1A_1^2;$$

ferner $OCA_1 = R$; also

$$(2) \qquad OA_1^2 = OC^2 + CA_1^2;$$

(2) in (1) eingesetzt giebt:

$$(3) \qquad OO_1^2 = OC^2 + CA_1^2 + O_1A_1^2,$$

oder, da $CA_1 = OB$ und $O_1A_1 = C_1B = AO$ ist:

$$(4) \qquad OO_1^2 = OA^2 + OB^2 + OC^2;$$

d. h.: Verbindet man den Scheitel einer rechten Ecke 125.
mit demjenigen ihrer Polarecke, so ist das Quadrat dieser Verbindungsstrecke gleich der Summe der Quadrate der drei Kanten der Ecke, die letzteren gerechnet bis zum Durchschnitt mit den Seiten der Polarecke. Anders ausgedrückt: Das Quadrat einer beliebigen aus dem Scheitel einer rechten Ecke gezogenen Strecke ist gleich der Summe der Quadrate ihrer Projektionen auf die Kanten der Ecke.

Aus Formel (4) folgt:

$$(5)\quad \left(\frac{OA}{OO_1}\right)^2 + \left(\frac{OB}{OO_1}\right)^2 + \left(\frac{OC}{OO_1}\right)^2 = 1.$$

Setzt man nun $AOO_1 = \alpha$, $BOO_1 = \beta$, $COO_1 = \gamma$, so ist

$$\frac{OA}{OO_1} = \cos\alpha; \quad \frac{OB}{OO_1} = \cos\beta; \quad \frac{OC}{OO_1} = \cos\gamma;$$

also folgt aus (5)

$$(6)\qquad \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1;$$

126. d. h.: **Die Quadratsumme der Cosinus derjenigen Winkel, welche eine Gerade mit den Kanten einer rechten Ecke bildet, ist 1.**

**38.** *Das Kugeldreieck.* — Ist aus dem Scheitel einer Ecke als Mittelpunkt eine Kugelfläche beschrieben (Fig. 18), so wird dieselbe von den Schenkelebenen der Ecke in Bogen geschnitten, die zu gleichen Kreislinien gehören (82), sich also wie die zugehörigen Centriwinkel, d. h. wie die Seiten der Ecke, verhalten. Man kann hiernach diese Bogen als Masse für die Seiten der Ecke betrachten und ebenso wie diese bezeichnen.

Der von den Bogen dreier Diametralkreise begrenzte Teil der Kugelfläche ($\overline{ABC}$) heisst ein Kugeldreieck, die Bogen selbst heissen Seiten des Dreiecks, die Winkel zwischen den in den Ecken des Dreiecks an die Seiten desselben gezogenen Tangenten heissen Winkel des Dreiecks.

Da diese Tangenten die in den Schenkelebenen auf ihren Axen errichteten Senkrechten sind, so sind die Winkel der Tangenten die Neigungswinkel dieser Schenkelebenen, d. h. sie sind den Winkeln der Ecke gleich.

Hiernach liefert jeder Satz über die dreiseitige Ecke einen Satz über das Kugeldreieck, wenn man darin „Ecke" durch „Kugeldreieck" ersetzt.

Anm. Wie lauten in dieser Form die Sätze 100—123? — Der Polarecke entspricht ein Polardreieck, welches man auf derselben Kugelfläche erhält, wenn man im Kugelmittelpunkte auf den Schenkelebenen der Ecke Senkrechten errichtet.

Rückt der Mittelpunkt der Kugelfläche auf der Verlängerung eines Radius $OA$, dessen Endpunkt $A$ fest bleibt, in unendliche Entfernung, so geht die Kugelfläche in eine Ebene über, welche in $A$ auf $OA$ senkrecht steht (96). Alle Diametralkreise verwandeln sich, da ihr gemeinsamer Mittelpunkt

in unendliche Entfernung gerückt ist, in gerade Linien dieser Ebene, und das Kugeldreieck geht daher in ein ebenes Dreieck über. Im allgemeinen liefert daher jeder Satz über das Kugeldreieck einen Satz über das ebene Dreieck. In diesem Umstande findet denn auch die Analogie zwischen den Sätzen über die dreiseitige Ecke und denen über das ebene Dreieck ihre Erklärung.

Anm. Bei der letzterwähnten Uebertragung gehen die Begriffe „Polardreieck“ und „Supplementseite“ verloren, und die Summe der Winkel des Dreiecks erhält eine feste Grösse. (Letzteres hat folgenden Grund: Alle Ecken mit paarweise parallelen Kanten sind kongruent, haben also dieselbe Winkelsumme. Jede Kante ist nicht nur der Richtung, sondern durch den Scheitel der zugehörigen Ecke auch der Lage nach bestimmt. Rücken diese Scheitel in unendliche Entfernung, so werden die drei Kanten jeder Ecke zu einander und zu denen der übrigen Ecken parallel, und die Lage jeder Kante wird unbestimmt, weil alle parallelen Geraden durch denselben unendlich fernen Punkt gehen. Demnach haben alle Ecken mit drei parallelen Kanten dieselbe Winkelsumme, welche Lage die Kanten auch gegen einander haben, und ebenso alle diesen Ecken entsprechenden ebenen Dreiecke.) — Von den beiden ersten Bedingungen des Satzes 106: $\mathfrak{b} > \mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} < 2R$ verschwindet daher die zweite, und die beiden letzten werden gleichfalls hinfällig, weil sie aus der Substitution $2R - \mathfrak{a}$ für $\mathfrak{a}$ stammen. Es gehen ferner die Sätze in Nr. 34 und 35 verloren, bis auf 113 und 114 (letzterer ohne Bedingung), weil durch zwei Winkel jetzt auch der dritte bekannt ist, also das Dreieck nicht nur durch drei Winkel, sondern noch durch eine Seite bestimmt ist. Es fallen ferner 121 und 122 weg (ersterer auch als selbstverständlich), und 123 wird durch den bekannten Satz von der Winkelsumme des Dreiecks ersetzt.

Die Sätze über das Kugeldreieck bilden die Grundlage zu einer Geometrie der Kugelfläche, bei welcher statt der geraden Linien der Ebene Diametralkreise, statt der Punkte und Kreislinien wieder Punkte und Kreislinien, statt der ebenen Figuren solche auf der Kugelfläche auftreten. Es fehlt der unendlich ferne Punkt und in Folge dessen der Begriff der Verschiebung; dagegen ist die Kugelfläche wie die Ebene ein freies Gebiet (vgl. T. II, Nr. 12).

Anm. Man suche Sätze der Geometrie der Kugelfläche, welche Sätzen der Geometrie der Ebene entsprechen.

Schneiden sich mehr als drei Ebenen in Geraden, welche durch denselben Punkt gehen, so entsteht die vielseitige Ecke.

### γ) Drei- (und mehr)malige Bewegung der Ebene.

**39.** *Vorbemerkungen.* — Unter den zahlreichen Beziehungen, welche zwischen vier im Raume gegebenen Ebenen stattfinden können, ist nur die eine bemerkenswert, dass je drei

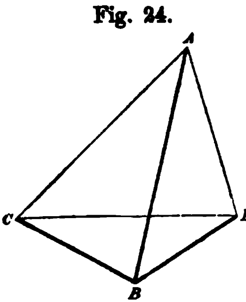
Ebenen eine Ecke bilden. Dies findet statt, wenn zu den drei Ebenen einer dreiseitigen Ecke eine vierte tritt, welche die drei übrigen in drei Seitenlinien eines Dreiecks schneidet. Wie das offene Ebenenstück zwischen den Schenkeln eines Winkels durch das Hinzutreten einer dritten Geraden sich zu einer Figur schliesst, so auch das offene Raumstück zwischen den Schenkelebenen einer Ecke durch das Hinzutreten jener vierten Ebene zu einem Körper.

Anm. Man stelle mit Hilfe von Fig. 16 die übrigen Beziehungen zwischen vier Ebenen des Raumes auf.

### a) Das Tetraeder.

**40.** *Definitionen.* — Vier Ebenen, die sich in vier Punkten schneiden, begrenzen vollständig einen Teil des Raumes, bilden also einen Körper, welcher Tetraeder heisst. Die vier Punkte heissen Eckpunkte des Tetraeders. Die zwischen je drei Punkten liegenden Dreiecke, welche die Grenzen des Tetraederraumes bilden, heissen Seiten(flächen), die zwischen je zwei Punkten liegenden Strecken, welche die Seiten der Dreiecke bilden, heissen Kanten des Tetraeders. An jedem Eckpunkte heisst diejenige Ecke, deren Schenkelebenen Seiten des Tetraeders sind (die also innerhalb des Tetraederraumes liegt) Ecke des Tetraeders. An jeder Kante heisst derjenige Raumwinkel, dessen Schenkelebenen Seiten des Tetraeders sind (der also innerhalb des Tetraederraumes liegt) Winkel des Tetraeders. Ein Tetraeder hat also vier Seiten, sechs Kanten, sechs Raumwinkel und vier Ecken. — In bezug auf eine Seite des Tetraeders heissen diejenigen drei Ecken, deren Scheitel die Eckpunkte dieser Seite sind, anliegende Ecken; die vierte heisst die der Seite gegenüberliegende Ecke. — In bezug auf eine Ecke heissen die drei Seiten, welche ihre Schenkelebenen bilden, die einschliessenden Seiten, die vierte heisst die der Ecke gegenüberliegende Seite. — Es liegen sich also im Tetraeder gegenseitig je eine Ecke und eine Seite gegenüber.

Fig. 24.




Sind $A$, $B$, $C$, $D$ die Eckpunkte des Tetraeders, so bezeichnet man das Tetraeder selbst durch $\overline{ABCD}$.

Die Bezeichnung der Seiten eines Tetraeders geschieht auch durch kleine deutsche Buchstaben,

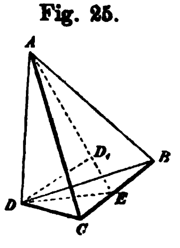
so dass jede Seite den der gegenüberliegenden Ecke entsprechenden Buchstaben erhält. Also: $\overline{BCD} = \mathfrak{a}$, $\overline{CDA} = \mathfrak{b}$, $\overline{DAB} = \mathfrak{c}$, $\overline{ABC} = \mathfrak{d}$. — Die sechs **Winkel** können entweder durch ihre Scheitellinien oder durch ihre Schenkelebenen bezeichnet werden. Also: $\overline{AB} = (\mathfrak{c}\mathfrak{d})$; $\overline{BC} = (\mathfrak{a}\mathfrak{d})$; $\overline{CA} = (\mathfrak{b}\mathfrak{d})$; $\overline{AD} = (\mathfrak{b}\mathfrak{c})$; $\overline{BD} = (\mathfrak{c}\mathfrak{a})$; $\overline{CD} = (\mathfrak{a}\mathfrak{b})$. — Die vier **Ecken** können entweder durch ihre Scheitel oder durch ihre Schenkelebenen bezeichnet werden. Also: $\overline{A} = (\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d})$; $\overline{B} = (\mathfrak{c}\mathfrak{d}\mathfrak{a})$; $\overline{C} = (\mathfrak{d}\mathfrak{a}\mathfrak{b})$; $\overline{D} = (\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c})$.

Anm. Welches sind hiernach z. B. die der Seite $\overline{ABC}$ anliegenden Ecken, oder die Seiten, welche die Ecke $\overline{A}$ einschliessen? Welche Kantenpaare sind windschief?

**41.** *Das rechteckige Tetraeder.* — Stehen drei Ebenen $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c})$ eines Tetraeders auf einander senkrecht, so bilden sie eine rechte Ecke, und das Tetraeder heisst ein **rechteckiges**.

Die drei rechtwinkligen Dreiecke, welche die Schenkelebenen der rechten Ecke bilden, heissen **Kathetenseiten**, die dieser Ecke gegenüberliegende Seite **Hypotenusenseite** des rechteckigen Tetraeders. Legt man durch eine Kante ($AD$) der rechten Ecke die Ebene $\overline{AED} \perp BC$, so ist $AE \perp BC$ und $DE \perp BC$ (50); also ist $AED$ der Neigungswinkel des Raumwinkels der Ebenen $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{a}$. Da $AD \perp DE$, so ist $\overline{ADE}$ rechtwinklig, also $AED$ ein spitzer Winkel. Hieraus folgt:

Fig. 25.




**Im rechteckigen Tetraeder sind die drei der Hypotenusenseite anliegenden Winkel spitz.** 127.

Bestimmt man den Inhalt der Dreiecke $\overline{ABC}$ und $\overline{DBC}$, so findet sich

$$\overline{ABC} = \frac{BC \cdot AE}{2}; \quad \overline{DBC} = \frac{BC \cdot DE}{2}.$$

Nun ist $$DE = AE \cdot \cos AED;$$

folglich $$\overline{DBC} = \overline{ABC} \cdot \cos AED;$$

d. h.: **Jede Kathetenseite eines rechteckigen Tetraeders ist gleich dem Produkt aus der Hypotenusenseite und dem Cosinus des zwischen ihnen liegenden Winkels.** 128.

Unter der **Projektion** einer geradlinigen Figur auf eine

Ebene versteht man die Figur zwischen den Projektionen ihrer Eckpunkte. Demnach kann man sagen:

129. Jede Kathetenseite eines rechteckigen Tetraeders ist die Projektion der Hypotenusenseite auf die durch die Kathetenseite bestimmte Ebene.

130. Jede Projektion einer geradlinigen Figur ist an Flächeninhalt gleich der Figur, multipliziert mit dem Cosinus des zwischen den Ebenen beider Figuren liegenden Winkels.

Fällt man $DD_1 \perp ABC$, so liegt $DD_1$ in der Ebene $ADE$ (55) und aus gleichem Grunde in den durch $DC \perp AB$ und durch $DB \perp AC$ gelegten Ebenen, ist also der Durchschnitt dieser Ebenen; d. h.:

131. Legt man durch die drei Kanten der rechten Ecke eines rechteckigen Tetraeders Ebenen senkrecht zu den Gegenkanten, so schneiden sich diese Ebenen in der Senkrechten, welche aus dem Scheitel der rechten Ecke auf die Gegenseite gefällt werden kann.

Da ferner aus der Aehnlichkeit der Dreiecke $\overline{ADD_1}$ und $\overline{EDD_1}$ folgt, dass $AED = ADD_1$ ist, so folgt weiter:

132. Die Winkel, welche die aus dem Scheitel der rechten Ecke eines rechteckigen Tetraeders auf die Gegenseite gefällte Senkrechte mit den Kanten der rechten Ecke bildet, sind gleich den an den Gegenkanten liegenden Winkeln des Tetraeders.

Setzt man $D_1DA = \alpha$, $D_1DB = \beta$, $D_1DC = \gamma$, so ist also (nach 132 und 128)

$$\overline{DAB} = \overline{ABC} \,.\, \cos\gamma; \quad \overline{DBC} = \overline{ABC} \,.\, \cos\alpha; \quad \overline{DCA} = \overline{ABC} \,.\, \cos\beta.$$

Addirt man diese Gleichungen, nachdem man sie ins Quadrat erhoben,*) so folgt:

$$\overline{DAB}^2 + \overline{DBC}^2 + \overline{DCA}^2 = \overline{ABC}^2 (\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma)$$

oder, mit Berücksichtigung von 126:

$$\overline{DAB}^2 + \overline{DBC}^2 + \overline{DCA}^2 = \overline{ABC}^2;$$

133. d. h.: Im rechteckigen Tetraeder ist das Quadrat der Hypotenusenseite gleich der Summe der Quadrate der Kathetenseiten.

---

*) Es wird hierbei angenommen, dass die vier Seiten des Tetraeders durch ein gemeinsames Mass gemessen seien, und dass $\overline{DAB}$ etc. die Maasszahlen bedeuten.

Eine durch die Pyramide gelegte Ebene, welche weder die Spitze noch die Grundfläche trifft, bildet als Schnittfigur ein der Grundfläche kollineares Polygon und teilt die Pyramide in eine Pyramide und einen Pyramidenstumpf. 151.

Eine durch die Pyramide parallel der Grundfläche gelegte Ebene bildet als Schnittfigur ein der Grundfläche ähnliches Polygon. 152.

Aus 152 folgt weiter: Alle durch die Spitze einer Pyramide innerhalb derselben gezogenen Geraden werden durch eine der Grundfläche parallele Schnittebene in demselben Verhältniss geteilt. — Zwei homologe Seiten der beiden Polygone verhalten sich wie die Abstände der Polygone von der Spitze. — Die Flächen beider Polygone verhalten sich wie die Quadrate ihrer Abstände von der Spitze. (T. II, 360.) 153.

Anm. Schnittfläche und Grundfläche der Pyramide heissen zusammen Grundflächen des Pyramidenstumpfes. Unter einem Pyramidenstumpf versteht man, wenn nichts anderes festgesetzt wird, denjenigen, dessen Grundflächen parallel sind. Was für Figuren sind alsdann die Seitenflächen?

Legt man Ebenen durch die Spitze einer Pyramide und durch alle aus einer Ecke der Grundfläche in derselben gezogenen Diagonalen, so zerfällt die Pyramide in $n-2$ Tetraeder. 154.

### c) Der Kegel.

**47.** *Definitionen und Eigenschaften des Kegels.* — Wenn die Grundfläche einer geraden oder schiefen Pyramide ein Sehnenpolygon ist, und dieses durch Vervielfältigung seiner Seitenzahl in eine Kreislinie übergeht (s. T. II, Nr. 162), so verschwinden die Seitenflächen der Pyramide, und die Seitenkanten bilden eine zusammenhängende Fläche. Diese Fläche kann auch dadurch entstanden gedacht werden, dass eine Seitenkante sich um die Spitze der Pyramide dreht, während ihr anderer Endpunkt beständig auf der Peripherie des Kreises bleibt, in welchen die Grundfläche der Pyramide überging. Die Fläche ist also eine Kegelfläche (Nr. 14 am Ende).

Anm. Auch die Gesammtheit der Seitenflächen einer gewöhnlichen Pyramide kann als Kegelfläche betrachtet werden. Inwiefern?

Eine Kegelfläche, deren Leitlinie eine in sich zurückkehrende (sich selbst nicht schneidende) Linie ist, schliesst sich durch das Hinzutreten einer Ebene zu einem Körper, welcher

Kegel genannt wird. — Ein Kegel ist also ein Körper, welcher begrenzt wird von einer Kegelfläche und einer Ebene, deren Schnittfigur eine in sich zurückkehrende, sich selbst nicht schneidende Linie ist. Die Kegelfläche, soweit sie den Kegel begrenzt, heisst Mantel, die ebene Schnittfigur Grundfläche des Kegels. Die Spitze der Kegelfläche heisst auch Spitze des Kegels, die von der Spitze auf die Grundfläche gefällte Senkrechte Höhe des Kegels; die Seitenlinien der Kegelfläche, von der Spitze bis zur Grundfläche gerechnet, heissen Seitenlinien des Kegels.

Ein Kegel, dessen Grundfläche ein Kreis ist, heisst gemeiner Kegel. Die Strecke, welche den Mittelpunkt dieses Kreises (Grundkreises) mit der Spitze verbindet, heisst Axe des Kegels.

Ein gemeiner Kegel heisst gerade oder schief, jenachdem seine Axe auf der Grundfläche senkrecht steht oder nicht. — Wie der Kegel im allgemeinen ein Specialfall der Pyramide, so ist der gerade Kegel ein Specialfall der geraden Pyramide (145). Daher folgt aus 146:

155. Die Seitenlinien eines geraden Kegels sind einander gleich und bilden mit der Grundfläche gleiche Neigungswinkel (Umkehrungen).

Anders ausgedrückt:

155a. Zwei oder mehrere Strecken, die von einem Punkte ausserhalb einer Ebene nach der Ebene gezogen sind, sind einander gleich, wenn ihre Fusspunkte gleichen Abstand vom Fusspunkte der von dem Punkte auf die Ebene gefällten Senkrechten haben (und umgekehrt).

Im Anschluss hieran folgt aus T. II, 108:

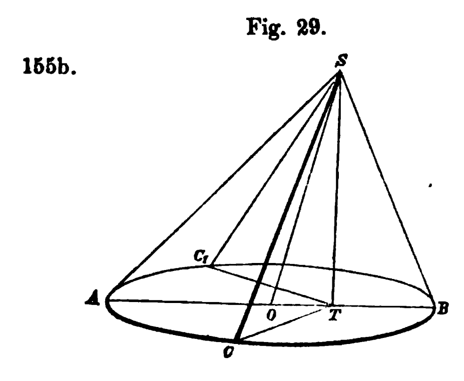


Fig. 29.

155b. Unter allen Strecken, die von einem Punkte ausserhalb einer Ebene nach der Ebene gezogen werden können, ist die Senkrechte die kürzeste.

Sind im schiefen Kegel (Fig. 29) zwei Seitenlinien $SC$ und $SC_1$ so gezogen, dass (wenn $T$ der Fusspunkt der Höhe ist) $TC = TC_1$ ist, so ist auch $SC = SC_1$ (148); d. h.:

Zwei Seitenlinien eines schiefen Kegels sind gleich 156.
(und bilden gleiche Neigungswinkel mit der Grundfläche), wenn ihre Fusspunkte vom Fusspunkte der Höhe gleichen Abstand haben (oder, wenn die nach ihren Fusspunkten gezogenen Radien des Grundkreises mit dem durch den Fusspunkt der Höhe gehenden Durchmesser gleiche Winkel bilden).

Da ferner unter allen aus *T* nach der Peripherie des Grundkreises gezogenen Strecken diejenige (*TA*), welche durch den Mittelpunkt geht, die längste, und diejenige (*TB*), deren Verlängerung durch den Mittelpunkt geht, die kürzeste ist (T. II, Aufgabe 230), so folgt aus 149:

Unter allen Seitenlinien eines schiefen Kegels ist 157.
diejenige die kürzeste, deren Fusspunkt auf dem durch den Fusspunkt der Höhe gehenden Radius liegt, und diejenige die längste, deren Fusspunkt auf der Verlängerung dieses Radius liegt.

Von zwei ungleichen Strecken, die von einem 157a.
Punkte ausserhalb einer Ebene nach der Ebene gezogen sind, ist diejenige die längere, deren Fusspunkt vom Fusspunkt der von dem Punkte auf die Ebene gefällten Senkrechten den grösseren Abstand hat (und umgekehrt).

Endlich folgt aus T. II, 118:

Unter allen Seitenlinien eines schiefen Kegels 158.
bildet die grösste den kleinsten, und die kleinste den grössten Neigungswinkel mit der Grundfläche.

**48.** *Schnittebenen des gemeinen Kegels.* — 1) Schnitt durch Spitze und Grundfläche. — Aus 150 folgt:

Eine durch Spitze und Grundfläche eines Kegels 159.
gelegte Ebene bildet ein Dreieck als Schnittfigur.

Die Kegelfläche wird von einer solchen Ebene (Sekantenebene) in zwei Seitenlinien geschnitten. Jede durch die Axe der Kegelfläche gehende Sekantenebene heisst Axenschnitt, derjenige Axenschnitt, welcher auf der Grundfläche senkrecht steht, Hauptschnitt. Aus 157 folgt hiernach:

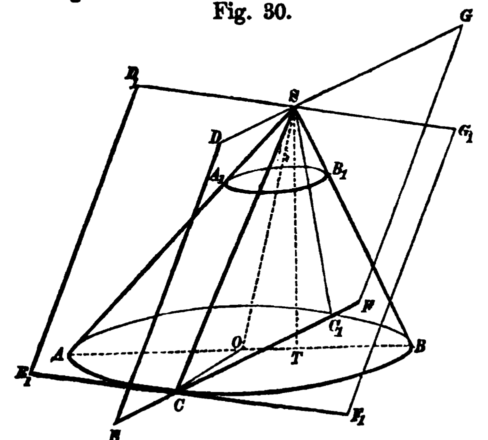
Der durch die Höhe eines schiefen Kegels gelegte 160.
Axenschnitt schneidet den Mantel des Kegels in der längsten und in der kürzesten Seitenlinie und steht auf der Grundfläche senkrecht (ist also der Hauptschnitt). — Im geraden Kegel ist jeder Axenschnitt Hauptschnitt.

Die Axenschnitte des geraden Kegels sind kongruente gleichschenklige Dreiecke mit gemeinsamer Höhe. Daher folgt aus T. II, 99, in Verbindung mit T. IV, 49:

160a. **Halbiert man in einem geraden Kegel den Winkel an der Spitze eines Axenschnittes, so steht die Halbierungslinie senkrecht auf der Grundfläche und geht durch den Mittelpunkt derselben.**

Anm. Umkehrungssätze hierzu. — Entstehung des geraden Kegels durch Drehung eines rechtwinkligen Dreiecks um eine Kathete. — Was für ein Körper entsteht durch Drehung eines beliebigen Dreiecks um eine seiner Seiten? — Welcher Axenschnitt des schiefen Kegels ist ein gleichschenkliges Dreieck?

Fig. 30.




Dreht eine Sekantenebene $\overline{DEFG}$ (Fig. 30) sich um eine ihrer Schnittlinien $SC$ soweit, bis die andere Schnittlinie $SC_1$ mit $SC$ zusammenfällt, wodurch $\overline{DEFG}$ in $\overline{D_1E_1F_1G_1}$ übergeht, so hat letztere Ebene mit der Kegelfläche nur zwei zusammenfallende, d. h. eine Gerade ($SC$) gemeinsam.

Eine Ebene, welche mit der Kegelfläche nur eine Gerade gemeinsam hat, heisst Tangentenebene. Man sagt, sie berühre die Kegelfläche in der gemeinsamen Geraden (Berührungslinie).

Die Schnittlinie $EF$ der Sekantenebene mit der Grundfläche des Kegels ist eine Sekante des Grundkreises. Fällt nun $SC_1$ mit $SC$ zusammen, so fällt auch $C_1$ auf $C$; d. h. die Sekante $EF$ geht über in eine Tangente $E_1F_1$, und man hat den Satz:

161. **Jede Tangentenebene eines gemeinen Kegels schneidet die Ebene des Grundkreises in einer Tangente des Grundkreises.** (Umkehrung.)

Anm. Hieraus folgt die Konstruktion der Tangentenebene in einer gegebenen Seitenlinie $SC$ der Kegelfläche. Man lege in $C$ die Tangente $E_1F_1$ an den Grundkreis, und lege die Ebene durch $SC$ und $E_1F_1$. Diese ist die gesuchte.

Ist der Kegel ein gerader, so ist $SO$ senkrecht zur Grundfläche; d. h.: $OC$ ist der Neigungsschenkel von $SC$. Dasselbe ist der Fall, wenn der Kegel schief ist, aber $SC$ mit $SA$ oder $SB$ zusammenfällt. Nun ist $OCE_1 = OCF_1 = R$. In allen drei Fällen ist also nach 65 $SCE_1 = SCF_1 = R$; d. h. es stehen $SC$ und $OC \perp \overline{E_1F_1}$; mithin steht $E_1F_1$ (nach 49) und die Tangentenebene $\overline{D_1E_1F_1G_1}$ (nach 52) auf dem Axenschnitt $\overline{SCO}$ senkrecht. Man hat also den Satz:

Im geraden Kegel stehen alle, im schiefen die 162.
beiden durch die längste und die kürzeste Seitenlinie gelegten Tangentenebenen auf dem durch die Berührungslinie gelegten Axenschnitte senkrecht. — Im geraden Kegel bilden alle Tangentenebenen gleiche Winkel mit der Grundfläche.

Unmittelbar einleuchtend ist der folgende Satz:

Legt man durch die Spitze eines Kegels und die 163.
Seiten eines dem Grundkreise einbeschriebenen (umbeschriebenen) $n$-Ecks Ebenen, so begrenzen dieselben eine dem Kegel einbeschriebene (umbeschriebene) $n$-seitige Pyramide.

Zwei an dieselbe Kegelfläche gelegte Tangentenebenen schneiden sich in einer Geraden, welche durch die Spitze der Kegelfläche geht. Da diese Gerade ausser durch die Spitze der Kegelfläche noch durch einen beliebigen ihrer Punkte bestimmt ist, so hat man den Satz:

Durch einen auf der konvexen Seite der Mantel- 164.
fläche eines gemeinen Kegels liegenden Punkt lassen sich zwei Tangentenebenen an die Kegelfläche legen.

Anm. Unter der Mantelfläche ist in diesem Satze die Kegelfläche in ihrer ganzen Ausdehnung zu verstehen. — Um aus einem gegebenen Punkte $D_1$ die beiden Tangentenebenen an eine Kegelfläche zu legen, legt man durch $D_1$ und die Spitze des Kegels $S$ (Fig. 30) eine Gerade, welche die Ebene der Grundfläche des Kegels in $S_1$ schneidet. Sind $S_1C$ und $S_1C_2$ die aus $S$ an den Grundkreis gelegten Tangenten, so sind $SS_1C$ und $SS_1C_2$ die gesuchten Tangentenebenen. — Durch eine Gerade, welche ausserhalb eines Kegels durch die Spitze desselben geht, können zwei, durch eine beliebige andere Gerade kann nur dann eine Tangentenebene gelegt werden, wenn sie die Mantelfläche in einem Punkte berührt. (Denn jede in einer Tangentenebene liegende Gerade hat mit der Berührungslinie, also auch mit der Mantelfläche, einen einzigen Punkt gemeinsam.)

2) Schnitt durch die Grundfläche. — Von der Gestalt der Schnittlinie in diesem und dem folgenden Falle wird später Nr. 137 die Rede sein. Der Kegel zerfällt durch den

eben angegebenen Schnitt in zwei Körper, deren Gestalt zu keiner besonderen Untersuchung Anlass giebt.

3) Schnitt, der weder Grundfläche noch Spitze trifft. — Derselbe schneidet die Mantelfläche in einer krummen Linie, welche mit dem Grundkreise kollinear ist (Nr. 46). Ist die Schnittebene der Grundfläche parallel, so ist die Schnittfigur dem Grundkreise ähnlich, also selbst ein Kreis. (Dieser specielle Fall ist in Fig. 30 dargestellt.)

Derjenige Teil des Kegels, welcher die Spitze enthält, ist selbst ein Kegel, der andere heisst Kegelstumpf und lässt sich als Differenz zweier Kegel darstellen. Demnach:

165. Eine durch den Kegel gelegte Ebene, welche weder die Spitze noch die Grundfläche trifft, bildet als Schnittfigur eine der Grundfigur kollineare Linie und teilt den Kegel in einen Kegel und einen Kegelstumpf.

166. Eine durch den Kegel parallel der Grundfläche gelegte Ebene bildet als Schnittfigur einen Kreis.

Da eine auf der Axe senkrechte Ebene (Normalschnitt) nur beim geraden Kegel eine Kreislinie als Schnittfigur liefert, so ist nur die Mantelfläche eines geraden Kegels eine gemeine Kegelfläche, nicht aber diejenige eines schiefen Kegels. Demnach sind die Ausdrücke „gemeiner Kegel“ und „gemeine Kegelfläche“ wohl zu unterscheiden.

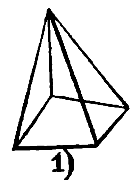
Anm. Welche Sätze folgen aus 153? — Unter einem Kegelstumpf versteht man, wenn nichts anderes festgesetzt wird, denjenigen, dessen Grundflächen parallel sind.

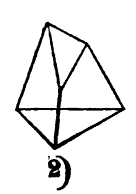
### d) Das Pentaeder.

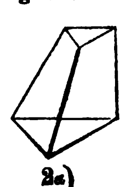
**49.** *Uebersicht.* — Sind im Raume fünf Ebenen gegeben, so sind unter den verschiedenen möglichen Fällen diejenigen erwähnenswert, in denen die Ebenen einen Körper begrenzen. Ein von fünf Ebenen begrenzter Körper heisst Pentaeder. — Die Pentaeder lassen sich einteilen nach der Zahl der Ebenen, welche durch eine Ecke gehen. Zunächst ist klar, dass nicht alle fünf Ebenen durch denselben Punkt gehen können; denn in diesem Falle entstände eine offene fünfseitige Ecke. 1) Vier Ebenen, welche durch denselben Punkt gehen, bilden eine vierseitige Ecke, welche, durch eine fünfte Ebene geschlossen, eine vierseitige Pyramide liefert. — 2) Drei Ebenen, welche durch denselben Punkt gehen, bilden eine dreiseitige Ecke, welche, durch eine vierte Ebene geschlossen, ein Tetraeder

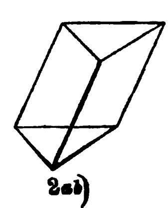
und durch den Schnitt mit einer fünften Ebene eine (beliebig) **abgestumpfte dreiseitige Pyramide** liefert. Durch jede Ecke derselben gehen drei Ebenen. Ihre Grundflächen sind kollineare Dreiecke (s. T. II, 107), ihre Seitenflächen unregelmässige Vierecke. — 2a) Sind die Grundflächen einander parallel, so entsteht ein **dreiseitiger Pyramidenstumpf** (im engeren Sinne). Seine Grundflächen sind ähnliche Dreiecke, seine Seitenflächen Trapeze. — 2b) Sind zwei Seitenkanten parallel, so ist auch die dritte mit ihnen parallel (89). Das Pentaeder heisst in diesem Falle **abgestumpftes dreiseitiges Prisma**. Seine Grundflächen sind affine Dreiecke, seine Seitenflächen Trapeze. — 2ab) Findet gleichzeitig Parallelität der Grundflächen und der Seitenkanten statt, so heisst der Körper **dreiseitiges Prisma**. Seine Grundflächen sind kongruente Dreiecke, seine Seitenflächen Parallelogramme. Das Prisma ist also ein specieller Fall des dreiseitigen Pyramidenstumpfes und des abgestumpften Prismas, und diese beiden sind specielle Fälle des Pentaeders.

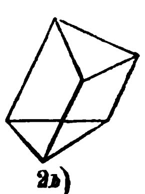
Fig. 31.












# B. Die Figur und ihre Bewegungen im Raume.

## 1) Lagen- und Richtungsänderung der Figur.

### α) Einmalige Bewegung der Figur.

### a) Bewegung des Dreiecks: Das dreiseitige Prisma.

**50.** *Definitionen und Eigenschaften des dreiseitigen Prismas.* — Ist ein Dreieck $\overline{ABC}$ durch einfache Verschiebung im Raume in $\overline{A_1B_1C_1}$ übergegangen, so ist zuerst

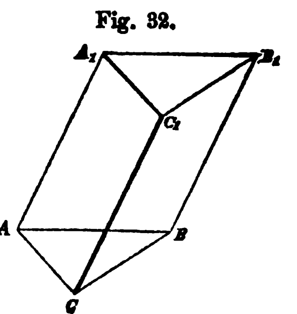
$$A_1B_1 \parallel AB, \quad B_1C_1 \parallel BC, \quad C_1A_1 \parallel CA;$$

und

$$A_1B_1 = AB, \quad B_1C_1 = BC, \quad C_1A_1 = CA.$$

Daher sind die Figuren $\overline{A_1B_1BA}$,

Fig. 32.



$\overline{B_1C_1CB}$, $\overline{C_1A_1AC}$ Parallelogramme, und es ist $AA_1 \# BB_1 \# CC_1$. Da ausserdem $\overline{ABC} \cong \overline{A_1B_1C_1}$, so ist der von dem Dreieck $\overline{ABC}$ beschriebene Körper ein dreiseitiges Prisma. Also:

167. **Aendert ein Dreieck seine Lage im Raume so, dass einer seiner Punkte eine gerade Strecke beschreibt, so ist der von dem Dreieck beschriebene Körper ein dreiseitiges Prisma.** Anders ausgedrückt: **Sind in einem Pentaeder zwei Grenzflächen kongruente Dreiecke in parallelen Ebenen, so ist es ein dreiseitiges Prisma.**

Ein dreiseitiges Prisma entsteht, wenn drei Ebenen sich in parallelen Geraden schneiden und von zwei parallelen Ebenen geschnitten werden. — Ein dreiseitiges Prisma ist ein Körper, begrenzt von zwei kongruenten Dreiecken in parallelen Ebenen und von drei Parallelogrammen. — Die beiden Dreiecke heissen Grundflächen, die drei Parallelogramme Seitenflächen des Prismas. Die Seiten der Dreiecke heissen Grundkanten, die gemeinsamen Seiten der Parallelogramme Seitenkanten des Prismas. — Ein dreiseitiges Prisma hat also 6 Ecken, 9 Kanten (3 Seitenkanten und 6 Grundkanten), 5 Flächen (3 Seitenflächen und 2 Grundflächen) und 9 Raumwinkel.

Anm. Wieviele und was für Ebenen und Kanten schneiden sich in jedem Eckpunkte des dreiseitigen Prismas?

Die Seitenkanten eines dreiseitigen Prismas sind gleich und parallel, ebenso je zwei Grundkanten, die in verschiedenen Grundflächen aber in derselben Seitenfläche liegen.

Je zwei gegenüberliegende Ecken einer Seitenfläche des dreiseitigen Prismas heissen Gegenpunkte desselben. Jeder Eckpunkt (z. B. $A_1$) hat also zwei Gegenpunkte ($B$ und $C$). Diejenige Kante ($BC$), welche zwischen den beiden Gegenpunkten ($B$ und $C$) eines Eckpunktes ($A_1$) liegt, heisst seine Gegenkante. Nur die Grundkanten sind Gegenkanten der Eckpunkte.

**51.** *Diagonalschnitte.* — Jede durch einen Eckpunkt und seine Gegenkante gelegte Ebene schneidet das Prisma in einen Dreieck, welches Diagonalschnitt genannt wird.

Anm. Man gebe, zuerst mit Hilfe der Fig. 32, dann ohne dieselbe, zu jedem Eckpunkte die Gegenpunkte und die Gegenkante an, und bestimme die Anzahl der Diagonalschnitte.

Da jeder Diagonalschnitt (z. B. $\overline{C_1AB}$, Fig. 33) ein Dreieck ist und ausserdem zwei Seitenflächen ($\overline{ACC_1A_1}$) und $\overline{BCC_1B_1}$)

in Dreiecke zerlegt, so ist von den beiden Körpern, in welche er das Prisma teilt, der eine ($\overline{C_1ABC}$) von vier Dreiecken, der andre ($\overline{C_1A_1B_1BA}$) von vier Dreiecken und einem Parallelogramme begrenzt. Man hat also den Satz:

Fig. 33.

Jeder Diagonalschnitt teilt das dreiseitige Prisma in ein Tetraeder und eine vierseitige Pyramide. 168.

Da ferner nach 154 diese vierseitige Pyramide durch den Diagonalschnitt $\overline{C_1A_1B}$ in zwei Tetraeder zerfällt, und die beiden Schnitte $\overline{C_1AB}$ und $\overline{BC_1A_1}$ durch die beiden Gegenecken $B$ und $C_1$ gelegt sind, so hat man den Satz:

Zwei durch ein Paar Gegenecken gelegte Diagonalschnitte teilen das dreiseitige Prisma in drei Tetraeder. 169.

Anm. Welches sind in Fig. 33 diese Tetraeder? — Welches ist die allen dreien gemeinsame Kante? — Durch wieviele Diagonalen der Seitenflächen geht jeder Diagonalschnitt, und wie können die drei Diagonalen in Fig. 33 konstruiert werden? — Welches Tetraeder enthält die untere, welches die obere, welches keine Grundfläche des Prismas? — Der Satz 169 entspricht dem Satze T. II, 131. Die zwischen den drei Tetraedern bestehende Beziehung, durch welche diese Analogie vervollständigt wird, ist Gegenstand eines späteren Satzes (219).

Fig. 33a.

Legt man durch einen Punkt ($C_1$) einer Tetraederkante ($BC_3$) zwei Ebenen ($C_1D_1B_1$ und $C_1C_2C$) parallel zu den der Kante gegenüberliegenden Seiten, und eine dritte Ebene ($C_1D_1C_2D_2$) durch zwei der von $C_1$ ausgehenden Schnittlinien ($C_1D_1$ und $C_1C_2$, oder $C_1C$ und $C_1B_1$), so zerfällt das Tetraeder in zwei dem ganzen ähnliche Tetraeder ($\overline{BB_1C_1D_1}$ und $\overline{C_1CC_2C_3}$) und zwei dreiseitige Prismen $\overline{B_1C_1D_1B_2C_2D_2}$ und $\overline{CC_1C_2DD_1D_2}$). (Fig. 33a.) Kurz:

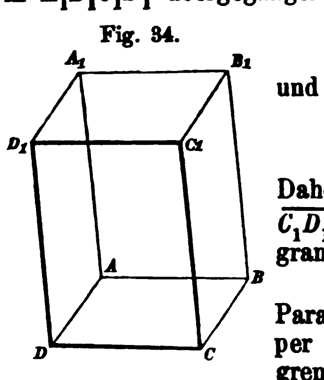
Jedes Tetraeder lässt sich durch drei Schnitte in zwei dem ganzen ähnliche Tetraeder und zwei dreiseitige Prismen zerlegen. 169a.

Anm. Analog lässt sich jedes Dreieck ($DB_2C_3$) durch zwei Geraden ($C_2D_2$ und $C_2C$) in zwei dem ganzen ähnliche Dreiecke und ein Parallelogramm zerlegen. Die Beziehung, welche zwischen den vier Körpern besteht, wenn $C_1$ die Mitte von $BC_3$ ist, und durch welche diese Analogie vervollständigt wird, ist Gegenstand eines späteren Satzes (219).

**b) Bewegung des Parallelogramms: Die Säule.**

**52.** *Definitionen, und Eigenschaften der Säule.* — Ist ein Parallelogramm $\overline{ABCD}$ durch einfache Verschiebung im Raume in $\overline{A_1B_1C_1D_1}$ übergegangen, so ist zuerst

Fig. 34.




$$A_1B_1 \parallel AB \parallel DC \parallel D_1C_1;$$
$$B_1C_1 \parallel BC \parallel AD \parallel A_1D_1$$

und

$$A_1B_1 = AB = DC = D_1C_1;$$
$$B_1C_1 = BC = AD = A_1D_1.$$

Daher sind die Figuren $\overline{A_1B_1BA}$, $\overline{B_1C_1CB}$, $\overline{C_1D_1DC}$, $\overline{D_1A_1AD}$ ebenfalls Parallelogramme, und es ist $AA_1 \# BB_1 \# CC_1 \# DD_1$.

Der durch die Verschiebung des Parallelogramms $\overline{ABCD}$ entstandene Körper ist demnach von sechs Ebenen begrenzt. Ein von sechs Ebenen begrenzter Körper heist **Hexaeder**. In dem gegenwärtigen speciellen Falle sind die Grenzfiguren des Körpers Parallelogramme. Ein von lauter Parallelogrammen begrenztes Hexaeder heisst **Säule** (Parallelepipedon). Also:

170. **Aendert ein Parallelogramm seine Lage im Raume so, dass einer seiner Punkte eine gerade Strecke beschreibt, so ist der von dem Parallelogramme beschriebene Körper eine Säule.** Anders ausgedrückt: **Sind in einem Hexaeder zwei Grenzflächen kongruente Parallelogramme in parallelen Ebenen, so ist es eine Säule.**

Eine Säule **entsteht**, wenn vier Ebenen sich in parallelen Geraden schneiden und von zwei parallelen Ebenen geschnitten werden. — Eine Säule **ist** ein Körper, begrenzt von zwei kongruenten Parallelogrammen in parallelen Ebenen und vier Parallelogrammen. Die ersteren Figuren heissen **Grundflächen**, die letzteren **Seitenflächen** der Säule. Die Seiten der Grundflächen heissen **Grundkanten**, die gemeinsamen Seiten der Seitenflächen **Seitenkanten** der Säule. Eine Säule

hat also 8 Ecken, 12 Kanten (4 Seitenkanten und 8 Grundkanten), 6 Flächen (4 Seitenflächen und 2 Grundflächen) und 12 Raumwinkel.

Anm. Wieviele und was für Ebenen und Kanten schneiden sich in jedem Eckpunkte der Säule?

Die Seitenkanten einer Säule sind gleich und parallel, ebenso je vier Grundkanten, die in zwei nicht anstossenden Seitenflächen liegen. 171.

Je zwei Eckpunkte der Säule, die nicht zusammen in derselben Grenzfläche liegen, heissen Gegenpunkte der Säule. Jeder Eckpunkt (z. B. $A_1$) hat also einen Gegenpunkt ($C$). — Je zwei parallele Kanten, die von zwei Gegenpunkten ausgehen, heissen Gegenkanten. Jede Kante (z. B. $A_1B_1$) hat also eine Gegenkante ($CD$). — Je zwei Flächen, in denen zwei Paar Gegenkanten liegen, heissen Gegenflächen. Jede Fläche (z. B. $A_1B_1C_1D_1$) hat also eine Gegenfläche ($ABCD$). — Je zwei Ecken, deren Scheitelpunkte Gegenpunkte sind, heissen Gegenecken, je zwei Raumwinkel, deren Scheitellinien Gegenkanten sind, Gegenwinkel.

Anm. Welches sind hiernach 1) die vier Paar Gegenpunkte, 2) die sechs Paar Gegenkanten, 3) die drei Paar Gegenflächen der Säule in Fig. 34?

**53.** *Eigenschaften der Gegenflächen, Gegenwinkel und Gegenecken.* — Da $DC \parallel AB$ und $DD_1 \parallel AA_1$, so ist auch die Ebene $DCC_1D_1 \parallel ABB_1A_1$. Dasselbe Resultat ergiebt sich für die Gegenflächen $BCC_1B_1$ und $ADD_1A_1$. Da auch die Grundflächen der Säule einander parallel sind, so kann man allgemein sagen:

Je zwei Gegenflächen einer Säule sind einander parallel. 172.

Aus 171 folgt, dass je zwei gegenüberliegende Seitenflächen einander kongruent sind. Da dasselbe auch für die Grundflächen der Säule gilt, so kann man allgemein sagen:

Je zwei Gegenflächen einer Säule sind einander kongruent. 173.

Nach 172 und 173 haben je zwei gegenüberliegende Seitenflächen dieselben Eigenschaften wie die Grundflächen. Daraus folgt:

In einer Säule kann jedes Paar Gegenflächen als Grundflächen angesehen werden. 174.

Eine Säule entsteht hiernach, wenn drei Paare paralleler Ebenen sich schneiden. Eine Säule ist ein Körper, begrenzt von drei Paar kongruenten (in parallelen Ebenen liegenden) Parallelogrammen.

Aus 172 folgt:

175. Je zwei Gegenwinkel einer Säule sind einander gleich.

Zwei Gegenecken einer Säule stimmen nach 175 in den Winkeln (oder nach 173 in den Seiten) überein, sind also, da die Aufeinanderfolge der Stücke in beiden die entgegengesetzte ist, symmetrisch, nach 112 (oder 104). Also:

176. Je zwei Gegenecken einer Säule sind symmetrisch.

Anm. Andrer Beweis dieses Satzes mittelst der Scheitelecke zu einer der beiden gegebenen Ecken und des Satzes 99. — Wieviele verschiedene Flächen, Kanten, Ecken und Raumwinkel kommen an einer Säule vor?

54. *Specielle Arten der Säule.* — Aus 171 folgt:

177. Sind in einer Säule die drei von einem Eckpunkt ausgehenden Kanten einander gleich, so sind alle Kanten gleich.

Die Grenzflächen der Säule sind in diesem Falle sämmtlich Rhomben. Eine Säule, deren Grenzflächen lauter Rhomben sind, heisst rhombische Säule (Rhomboëder).

Anm. Im allgemeineren Falle können ein Paar Gegenflächen Rhomben sein. Sind zwei Paar Gegenflächen Rhomben, so muss auch das dritte Paar von derselben Art sein. Warum?

Aus 173 folgt:

178. Ist eine Ecke einer Säule eine rechte, so sind sie alle rechte.

Die Grenzflächen der Säule sind in diesem Falle sämmtlich Rechtecke. Eine Säule, deren Grenzflächen lauter Rechtecke sind, heisst rechteckige Säule.

Anm. Im allgemeineren Falle können ein Paar oder zwei Paar Gegenflächen Rechtecke sein.

Die Grenzflächen einer Säule können endlich alle gleichzeitig Rhomben und Rechtecke, d. h. Quadrate sein. Eine Säule, deren Grenzflächen lauter Quadrate sind, heisst quadratische Säule (Würfel).

Anm. Im allgemeineren Falle können ein Paar oder zwei Paar Gegenflächen Quadrate sein. — Man kombiniere die in den letzten drei Anmerkungen erwähnten Fälle und bestimme Anzahl und Begrenzung der hierdurch entstehenden Arten von Säulen. — Alle Eigenschaften der Säule besitzen auch die rhombische und die rechteckige Säule. Der Würfel vereinigt die Eigenschaften der rhombischen und der rechteckigen Säule. — Analogie zwischen der Säule mit ihren speciellen Arten und dem Parallelogramm mit seinen speciellen Arten (T. II, 79). — Natürliches Vorkommen der verschiedenen Arten von Säulen in den Krystallgestalten.

55. *Diagonalschnitte, Axen und Diagonalaxen.* — Jede durch zwei Gegenkanten gelegte Ebene schneidet die Säule

in einem Parallelogramm (171), welches **Diagonalschnitt** genannt wird.

Anm. Wieviele Diagonalschnitte sind möglich? — Durch jede Seite und jede Diagonale einer Grenzfläche geht ein Diagonalschnitt. — Wieviele und welche Diagonalschnitte sind in Fig. 35 gezeichnet?

**Jeder Diagonalschnitt teilt die Säule in zwei** 179.
**dreiseitige Prismen.**

Anm. Satz 179 entspricht dem Satze T. II, 131. (S. Anm. zu Satz 169.)

Fig. 35.

**Zwei Diagonalschnitte tei-** 180.
**len die Säule, wenn sie durch zwei parallele Kanten** (z. B. $AA_1$ und $DD_1$) **gehen, in vier dreiseitige Prismen** (z. B. $\overline{A_1M_1DAMD}$), **und schneiden sich in der Verbindungsstrecke der Mitten** ($M$ und $M_1$) **zweier Gegenflächen.**

Die Verbindungsstrecke der Mitten zweier Gegenflächen heisst **Axe** der Säule.

Gehen die beiden Diagonalschnitte durch zwei sich schneidende Kanten (z. B. $AA_1$ und $AD$), so ist der zweite für jedes der beiden durch den ersten entstandenen Prismen ebenfalls Diagonalschnitt. Es folgt also aus 179 und 168:

**Zwei Diagonalschnitte teilen die Säule, wenn sie** 181.
**durch zwei sich schneidende Kanten** (z. B. $AA_1$ und $AD$) **gehen, in zwei Tetraeder und zwei vierseitige Prismen, und schneiden sich in der Verbindungsstrecke zweier Gegenpunkte** ($A$ und $C_1$).

Die Verbindungsstrecke zweier Gegenpunkte heisst **Diagonalaxe** der Säule.

Die Diagonalaxe $AC_1$ ist gleichzeitig Diagonale der Parallelogramme $\overline{AA_1C_1C}$ und $\overline{ADC_1B_1}$. Ihr Mittelpunkt $O$ liegt also (T. II, 133) auch in der Mitte der Strecken $A_1C$ und $B_1D$. Und da $B_1D$ Diagonale des Parallelogramms $\overline{DD_1B_1B}$ ist, so liegt $O$ auch in der Mitte von $D_1B$. Hieraus folgt:

**Die vier Diagonalaxen einer Säule schneiden sich** 182.
**in einem Punkte und halbieren sich gegenseitig.**

Der Schnittpunkt der Diagonalaxen heisst **Mittelpunkt** der Säule.

Da die Verbindungsstrecke der Mitten zweier Gegenseiten eines Parallelogramms den andern Seiten parallel ist, durch den Mittelpunkt des Parallelogramms geht und in demselben halbiert wird (T. II, 134), so folgt weiter:

183. Die drei Axen einer Säule schneiden sich im Mittelpunkte derselben, halbieren sich gegenseitig und sind den Kanten parallel.

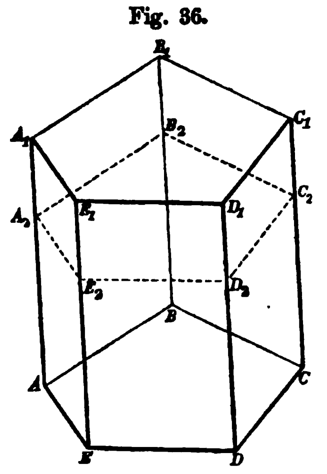
184. Die sechs Diagonalschnitte einer Säule schneiden sich im Mittelpunkte derselben.

Anm. In was für und wieviele Körper zerfällt die Säule durch alle Diagonalschnitte? — Man untersuche Winkel und Längenverhältnis der Axen bei den in Nr. 54 erwähnten speciellen Arten der Säule. Einteilung der Säulen hiernach. Anwendung auf die Krystallographie.

### c) Bewegung des Polygons: Das Prisma.

**56.** *Definitionen, und Eigenschaften des Prismas.* — Ist ein Polygon ($n$-Eck) $\overline{ABCDE}$.. durch einfache Verschiebung im Raume in $\overline{A_1B_1C_1D_1E_1}$.. übergegangen, so ist zuerst

Fig. 36.




$A_1B_1 \parallel AB$ etc.; und $A_1B_1 = AB$ etc. Daher sind die Figuren $\overline{A_1B_1AB}$ etc. Parallelogramme, und es ist $AA_1 \# BB_1$ etc.

Der durch die Verschiebung des Polygons $\overline{ABCDE}$.., entstandene Körper ist demnach von $n+2$ Ebenen begrenzt; und zwar sind $n$ Ebenen Parallelogramme, 2 Ebenen kongruente Polygone. — Ein von $n$ Parallelogrammen und 2 kongruenten Polygonen begrenzter Körper heisst Prisma. Also:

185. Aendert ein Polygon seine Lage im Raume so, dass einer seiner Punkte eine gerade Strecke beschreibt, so ist der von dem Polygon beschriebene Körper ein Prisma.

Ein Prisma entsteht, wenn $n$ Ebenen sich in parallelen Geraden schneiden, und von zwei parallelen Ebenen geschnitten werden. — Ein Prisma ist ein Körper, begrenzt von zwei kongruenten Polygonen in parallelen Ebenen und von $n$ Parallelogrammen. — Die beiden Polygone heissen Grundflächen,

die $n$ Parallelogramme **Seitenflächen** des Prismas. Die Seiten der Polygone heissen **Grundkanten**, die gemeinsamen Seiten der Parallelogramme **Seitenkanten** des Prismas. — Die Entfernung der beiden Grundflächen heisst **Höhe** des Prismas. Das Prisma heisst $n$-seitig, wenn es $n$ Seitenflächen enthält. — Ein $n$-seitiges Prisma hat also $2n$ Ecken, $3n$ Kanten ($n$ Seitenkanten und $2n$ Grundkanten), $n+2$ Flächen ($n$ Seitenflächen und 2 Grundflächen) und $3n$ Raumwinkel. — Das dreiseitige Prisma ist ein specieller Fall des allgemeinen Prismas. Die Säule ist ein vierseitiges Prisma, in welchem jedes Paar Gegenflächen als Grundflächen angesehen werden kann. — Ein Prisma heisst **regelmässig** oder **unregelmässig**, je nachdem seine Grundflächen regelmässige oder unregelmässige Polygone sind. Ein Prisma heisst **gerade** oder **schief**, je nachdem seine Seitenkanten auf den Grundflächen senkrecht stehen oder nicht. (Kombination der beiden letzten Einteilungen.)

Aus 50 folgt:

Die Seitenflächen eines geraden Prismas sind 186. Rechtecke.

Und aus 185:

Die Seitenkanten jedes Prismas sind gleich und 187. parallel, ebenso je zwei Grundkanten, die in verschiedenen Grundflächen aber in derselben Seitenfläche liegen.

**57.** *Pyramide und Prisma.* — Rückt die Spitze einer Pyramide auf einer die Ebene der Grundfläche schneidenden Geraden in unendliche Entfernung, so werden ihre Seitenkanten dieser Geraden parallel, und die Figur eines parallel zur Grundfläche geführten Schnittes ist der Grundfläche nicht nur ähnlich (152), sondern auch kongruent. Der durch die Schnittfläche gebildete Pyramidenstumpf verwandelt sich also in ein Prisma. — Ist die Gerade, auf welcher die Spitze der Pyramide sich bewegt, die Höhe, so verwandelt sich der Pyramidenstumpf in ein gerades Prisma. Man hat hiernach den Satz:

Jedes Prisma kann angesehen werden als ein 188. Pyramidenstumpf, dessen Seitenkanten parallel und dessen Grundflächen daher kongruent sind.

Anm. Das dreiseitige Prisma ist hiernach ein specieller Fall des Tetraeders. — Mittelst des Satzes 188 lassen sich aus Sätzen und Formeln, welche für den Pyramidenstumpf gelten, entsprechende für das Prisma ableiten.

**58.** *Schnittebenen des Prismas.* — Wird ein Prisma durch eine Ebene geschnitten, so ist die Gestalt der Teile verschie-

den, je nachdem der Schnitt durch beide, oder durch eine, oder durch keine der Grundflächen geführt wird.

1) Schnitt durch beide Grundflächen. — Ein durch beide Grundflächen des Prismas geführter Schnitt teilt dasselbe in zwei Polyeder. — Ist der Schnitt den Seitenkanten parallel, so sind auch seine beiden Schnittlinien mit den Seitenflächen gleich und parallel zu den Seitenkanten (20); der Schnitt ist also ein Parallelogramm, und die beiden Polyeder, in welche das Prisma zerfällt, sind wieder Prismen. Man hat also den Satz:

189. **Eine durch beide Grundflächen eines Prismas parallel den Seitenkanten gelegte Ebene bildet ein Parallelogramm als Schnittfigur und teilt das Prisma in zwei neue Prismen.**

2) Schnitt durch eine Grundfläche. — Derselbe teilt das Prisma in zwei Polyeder.

3) Schnitt, der keine Grundfläche trifft. — Derselbe schneidet jede der Seitenflächen, und ist daher ein Polygon von gleicher Seitenzahl wie die Grundflächen.

Ist in Fig. 36 $\overline{ABCDE}$ eine Grundfläche des Prismas und $\overline{A_2B_2C_2D_2E_2}$ die Schnittfigur, so gehen die Verbindungslinien je zweier homologer Ecken beider Polygone (z. B. $AA_2$) durch denselben unendlich fernen Punkt. Es müssen sich ferner die Verlängerungen je zweier homologer Seiten (z. B. $AB$ und $A_2B_2$) in Punkten schneiden, die den Ebenen beider Polygone gleichzeitig angehören, d. h. in Punkten, welche auf der Schnittlinie beider Ebenen liegen. Da also die beiden Polygone die Eigenschaft haben, dass die Verbindungslinien ihrer homologen Punkte alle durch einen unendlich fernen Punkt gehen, und dass die Schnittpunkte ihrer homologen Seitenlinien alle auf einer endlich fernen Geraden liegen, so sind die beiden Polygone **affin**. (T. II, Nr. 107.)

Ist die Schnittebene den Grundflächen parallel, so rückt die Schnittlinie beider Ebenen in unendliche Entfernung, und die Affinität der beiden Polygone geht in die **Kongruenz** über. (Dieser specielle Fall ist in Fig. 36 dargestellt.)

Anm. Die Kongruenz der beiden Polygone ist auch aus der Gleichheit aller Seiten und aller Winkel leicht zu beweisen.

Aus dem Voranstehenden folgen die Sätze:

190. **Eine durch das Prisma gelegte Ebene, welche keine der Grundflächen trifft, bildet als Schnittfigur ein der Grundfläche affines Polygon.**

Eine durch das Prisma parallel den Grundflächen gelegte Ebene bildet als Schnittfigur ein den Grundflächen kongruentes Polygon und teilt das Prisma in zwei neue Prismen. 191.

Legt man Ebenen durch eine Seitenkante eines Prismas und durch alle aus einem ihrer Endpunkte in einer Grundfläche gezogenen Diagonalen, so zerfällt das Prisma in $n-2$ dreiseitige Prismen. 192.

**d) Bewegung des Kreises: Der Cylinder.**

**59.** *Definitionen, und Eigenschaften des Cylinders.* — Wenn eine Grundfläche eines geraden oder schiefen Prismas ein Sehnenpolygon ist, und dieses durch Vervielfältigung seiner Seitenzahl in eine Kreislinie übergeht (s. T. II, Nr. 162), so verschwinden die Seitenflächen des Prismas, und die Seitenkanten bilden eine zusammenhängende Fläche. Diese Fläche kann auch dadurch entstanden gedacht werden, dass eine Seitenkante sich verschiebt, während ihr einer Endpunkt beständig auf der Peripherie des Kreises bleibt, in welchen die Grundfläche des Prismas überging. Die Fläche ist also eine Cylinderfläche (Nr. 15 am Ende).

Anm. Auch die Gesammtheit der Seitenflächen eines gewöhnlichen Prismas kann als Cylinderfläche betrachtet werden. Inwiefern?

Eine Cylinderfläche, deren Leitlinie eine in sich zurückkehrende (sich selbst nicht schneidende) Linie ist, schliesst sich durch das Hinzutreten zweier paralleler Ebenen zu einem Körper, welcher Cylinder genannt wird. — Ein Cylinder ist also ein Körper, welcher begrenzt wird von einer Cylinderfläche und zwei parallelen Ebenen, deren Schnittfiguren in sich selbst zurückkehrende, sich selbst nicht schneidende Linien sind. Die Cylinderfläche, soweit sie den Cylinder begrenzt, heisst Mantel, die ebenen Schnittfiguren Grundflächen des Cylinders. Die Entfernung der beiden Grundflächen heisst Höhe des Cylinders; die Seitenlinien der Cylinderfläche, soweit sie zwischen den Grundflächen liegen, heissen Seitenlinien des Cylinders.

Ein Cylinder, dessen Grundflächen Kreise sind, heisst gemeiner Cylinder. Die Strecke, welche die Mittelpunkte dieser Kreise (Grundkreise) verbindet, heisst Axe des Cylinders.

Ein gemeiner Cylinder heisst gerade oder schief, je nachdem seine Axe auf den Grundflächen senkrecht steht oder nicht. — Wie der Cylinder im allgemeinen ein Specialfall des

Prismas, so ist der gerade Cylinder ein Specialfall des geraden Prismas.

Wie das Prisma aus dem Polygon, so entsteht der gemeine Cylinder durch einfache Verschiebung eines Kreises im Raume. Man kann daher sagen:

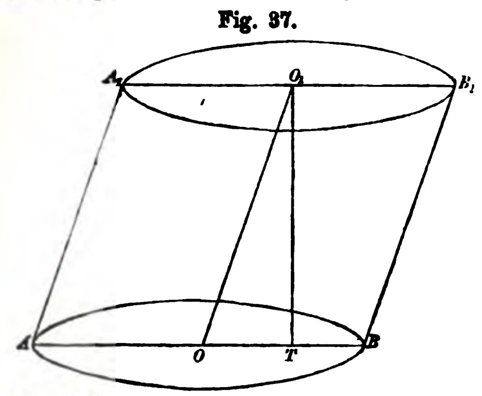
193. **Aendert ein Kreis seine Lage im Raume so, dass einer seiner Punkte eine gerade Strecke beschreibt, so ist der von dem Kreise beschriebene Körper ein gemeiner Cylinder.**

Aus 187 folgt:

194. **Die Seitenlinien eines Cylinders sind gleich und parallel.**

**60.** *Kegel und Cylinder.* — Rückt die Spitze eines Kegels auf einer die Ebene der Grundfläche schneidenden Geraden in unendliche Entfernung, so werden ihre Seitenlinien dieser Geraden parallel, und die Figur eines parallel zur Grundfläche geführten Schnittes ist der Grundfläche nicht nur ähnlich (166), sondern auch kongruent. Der durch die Schnittfläche gebildete Kegelstumpf verwandelt sich also in einen Cylinder. — Ist die Gerade, auf welcher die Spitze des Kegels sich bewegt, die Höhe, so verwandelt sich der Kegelstumpf in einen geraden Cylinder. Man hat hiernach den Satz:

Fig. 37.




195. **Jeder Cylinder kann angesehen werden als ein Kegelstumpf, dessen Seitenlinien parallel und dessen Grundflächen daher kongruent sind.**

Anm. Mittelst des Satzes 195 lassen sich aus Sätzen und Formeln, welche für den Kegelstumpf gelten, entsprechende für den Cylinder ableiten.

**61.** *Schnittebenen des gemeinen Cylinders.* — 1) **Schnitt durch beide Grundflächen.** — Nur die den Seitenlinien parallelen Schnitte sind beachtenswert. Aus 189 folgt:

196. **Eine durch beide Grundflächen eines Cylinders parallel den Seitenlinien gelegte Ebene bildet ein Parallelogramm als Schnittfigur.**

Die Cylinderfläche wird von einer solchen Ebene (Sekantenebene) in zwei Seitenlinien geschnitten. Jede durch die Axe der Cylinderfläche gehende Sekantenebene heisst Axenschnitt, derjenige Axenschnitt, welcher auf der Grundfläche senkrecht steht, Hauptschnitt. Da die Endpunkte der Axe $OO_1$ (Fig. 37) Mitten zweier gegenüberliegenden Seiten ($AB$ und $A_1B_1$) eines Axenschnittes sind, so ist auch $AO \mathbin{\#} A_1O_1$, folglich $OO_1 \mathbin{\#} AA_1$; d. h.:

Die Axe eines Cylinders ist gleich und parallel 197.
den Seitenlinien.

Der durch eine Höhe des schiefen Cylinders ge- 197a.
legte Axenschnitt steht auf der Grundfläche senkrecht (ist also der Hauptschnitt). — Im geraden Cylinder ist jeder Axenschnitt Hauptschnitt.

Anm. Was für Figuren sind die Axenschnitte eines geraden Cylinders? — Entstehung des geraden Cylinders durch Drehung eines Rechtecks um eine seiner Seiten. — Welcher Axenschnitt des schiefen Cylinders ist ein Rechteck?

Dreht eine Sekantenebene $\overline{DEFG}$ (Fig. 38) sich um eine ihrer Schnittlinien $HC$ soweit, bis die andere Schnittlinie $H_1C_1$ mit $HC$ zusammenfällt, wodurch $\overline{DEFG}$ in $\overline{D_1E_1F_1G_1}$ übergeht, so hat letztere Ebene mit der Cylinderfläche nur zwei zusammenfallende, d. h. eine Gerade ($HC$) gemeinsam.

Fig. 38.

Eine Ebene, welche mit der Cylinderfläche nur eine Gerade gemeinsam hat, heisst Tangentenebene. Man sagt, sie berühre die Cylinderfläche in der gemeinsamen Geraden (Berührungslinie).

Die Schnittlinie $EF$ der Sekantenebene mit einer Grundfläche des Cylinders ist eine Sekante des Grundkreises. Fällt nun $H_1C_1$ mit $HC$ zusammen, so fällt auch $C_1$ auf $C$; d. h. die Sekante $EF$ geht über in eine Tangente $E_1F_1$, und man hat den Satz:

198. **Jede Tangentenebene eines gemeinen Cylinders schneidet die Ebenen der Grundkreise in Tangenten der Grundkreise.** (Umkehrung.)

Anm. Hieraus folgt die **Konstruktion der Tangentenebene** in einer gegebenen Seitenlinie $HC$ der Cylinderfläche. Man lege in $C$ die Tangente $E_1F_1$ an den Grundkreis, und lege die Ebene durch $HC$ und $E_1F_1$. Diese ist die gesuchte.

Ist der Cylinder ein gerader, so ist $O_1O$, also (nach 197) auch $HC$ senkrecht zu den Grundflächen, also auch zur Tangente $E_1F_1$. — Fällt im schiefen Cylinder $HC$ mit einer der Seitenlinien des Hauptschnittes $A_1A$ (oder $B_1B$) zusammen, so ist $OA$ der Neigungsschenkel von $A_1A$. Nun ist $OCE_1 = OCF_1 = R$. In allen drei Fällen ist also nach 65 $HCE_1 = HCF_1 = R$; d. h.: es stehen $HC$ und $OC \perp E_1F_1$; mithin steht $E_1F_1$ (nach 49) und die Tangentenebene $\overline{D_1E_1F_1G_1}$ (nach 52) auf dem Axenschnitt $\overline{HCOO_1}$ senkrecht. Man hat also den Satz:

199. **Im geraden Cylinder stehen alle, im schiefen die beiden durch die Seitenlinien des Hauptschnittes gelegten Tangentenebenen auf dem durch die Berührungslinie gehenden Axenschnitte senkrecht. — Im geraden Cylinder stehen alle Tangentenebenen auf den Grundflächen senkrecht.**

Unmittelbar einleuchtend ist der folgende Satz:

200. **Legt man durch die Seiten eines dem Grundkreise einbeschriebenen (umbeschriebenen) $n$-Ecks Ebenen, welche der Axe parallel sind, so begrenzen dieselben ein dem Cylinder einbeschriebenes (umbeschriebenes) $n$-seitiges Prisma.**

Zwei an dieselbe Cylinderfläche gelegte Tangentenebenen schneiden sich in einer Geraden, welche der Axe parallel ist (20). Da diese Gerade ausser durch die Richtung der Axe noch durch einen beliebigen ihrer Punkte bestimmt ist, so hat man den Satz:

201. **Durch einen auf der konvexen Seite der Mantelfläche eines gemeinen Cylinders liegenden Punkt lassen sich zwei Tangentenebenen an die Cylinderfläche legen.**

Anm. Um aus einem gegebenen Punkte $D_1$ die **beiden Tangentenebenen an eine Cylinderfläche zu legen**, legt man durch $D_1$ die der Axe $O_1O$ (Fig. 88) parallele Gerade, welche die Ebene der Grundfläche des Kegels in $E_1$ schneidet. Sind dann $E_1C$ und $E_1C_2$ die aus $E_1$ an den Grundkreis gelegten Tangenten, so sind $D_1E_1C$ und $D_1E_1C_2$ die gesuchten Tangentenebenen. — Durch eine Gerade, welche ausserhalb

eines Cylinders der Axe desselben parallel ist, können zwei, durch eine beliebige andere Gerade kann nur dann eine Tangentenebene gelegt werden, wenn sie die Mantelfläche in einem Punkte berührt. (Denn jede in einer Tangentenebene liegende Gerade hat mit der Berührungslinie, also auch mit der Mantelfläche, einen einzigen Punkt gemeinsam.)

2) Schnitt durch eine Grundfläche. — Von der Gestalt der Schnittlinie in diesem und dem folgenden Falle wird später die Rede sein. Der Cylinder zerfällt durch den eben angegebenen Schnitt in zwei Körper, deren Gestalt zu keiner besonderen Untersuchung Anlass giebt.

3) Schnitt, der keine der Grundflächen trifft. — Derselbe schneidet die Mantelfläche in einer krummen Linie, welche mit den Grundkreisen affin ist (Nr. 58). Ist die Schnittebene der Grundfläche parallel, so ist die Schnittfigur dem Grundkreise kongruent. (Dieser specielle Fall ist in Fig. 38 dargestellt.)

Aus dem Voranstehenden folgen die Sätze:

Eine durch den Cylinder gelegte Ebene, welche keine der Grundflächen trifft, bildet als Schnittfigur eine der Grundfigur affine Linie. 202.

Eine durch den Cylinder parallel den Grundflächen gelegte Ebene bildet als Schnittfigur einen den Grundflächen kongruenten Kreis und teilt den Cylinder in zwei neue Cylinder. 203.

Da eine auf der Axe senkrechte Ebene (Normalschnitt) nur beim geraden Cylinder eine Kreislinie als Schnittfigur liefert, so ist nur die Mantelfläche eines geraden Cylinders eine gemeine Cylinderfläche, nicht aber diejenige eines schiefen Cylinders. Demnach sind die Ausdrücke „gemeiner Cylinder" und „gemeine Cylinderfläche" wohl zu unterscheiden.

### β) Mehrmalige Bewegung der Figur.

**62.** *Vorbemerkung.* — Nach T. II, Nr. 6 erlangt ein durch Bewegung eines Gebildes entstehendes neues Gebilde die Eigenschaft einer bestimmten Grösse durch die längere oder kürzere Dauer der Bewegung des erzeugenden Gebildes. Die Grösse des neuen Gebildes hängt also ab von der Grösse des erzeugenden Gebildes und von der Grösse seiner Bewegung. Hieraus folgt unmittelbar der allgemeine Satz:

Durch gleiche Bewegungen ($h_1$ und $h_2$) gleicher Gebilde ($a_1$ u. $a_2$) entstehen wieder gleiche Gebilde ($\mathfrak{a}_1$ u. $\mathfrak{a}_2$). 203a.

Anm. Da die in T. II, Nr. 6 besprochene Bewegung eine Vorwärtsbewegung, d. h. eine Verschiebung ist, so sind $h_1$ und $h_2$ parallele Strecken.

Und hieraus weiter:

203b. Machen zwei gleiche Gebilde ($a_1$ und $a_2$) ungleiche Bewegungen ($h_1$ und $h_2$), so verhalten sich (an Grösse) die entstehenden Gebilde ($\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$) wie die Bewegungen. $\frac{\mathfrak{a}_1}{\mathfrak{a}_2} = \frac{h_1}{h_2}$.

203c. Machen zwei ungleiche Gebilde ($a_1$ und $a_2$) gleiche Bewegungen ($h_1$ und $h_2$), so verhalten sich (an Grösse) die entstehenden Gebilde ($\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$) wie die erzeugenden. $\frac{\mathfrak{a}_1}{\mathfrak{a}_2} = \frac{a_1}{a_2}$.

Wenn zwei ungleiche Gebilde ($a_1$ und $a_2$) durch ungleiche Bewegungen ($h_1$ und $h_2$) zwei Gebilde ($\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$) hervorbringen, so nehmen wir noch ein drittes Gebilde ($\mathfrak{a}$) an, welches aus $a_1$ durch die Bewegung $h_2$ entsteht. Es entsteht also

$\mathfrak{a}_1$ aus $a_1$ durch die Bewegung $h_1$,
$\mathfrak{a}$ „ $a_1$ „ „ „ $h_2$,
$\mathfrak{a}_2$ „ $a_2$ „ „ „ $h_2$.

Dann ist nach 203b und 203c:

$$\frac{\mathfrak{a}_1}{\mathfrak{a}} = \frac{h_1}{h_2}; \quad \frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{a}_2} = \frac{a_1}{a_2};$$

folglich durch Multiplikation:

$$\frac{\mathfrak{a}_1}{\mathfrak{a}_2} = \frac{a_1}{a_2} \cdot \frac{h_1}{h_2};$$

203d. d. h.: Machen zwei ungleiche Gebilde ($a_1$ und $a_2$) ungleiche Bewegungen ($h_1$ und $h_2$), so ist das Grössenverhältnis der entstehenden Gebilde ($\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$) gleich dem Produkt aus den Grössenverhältnissen der erzeugenden Gebilde und der Bewegungen.

Anm. Von diesen Sätzen sind die Sätze T. II, 140, 143, 144, 147 specielle Fälle.

## Bewegung des Parallelogramms.

### 1. Die geometrischen Operationen mit Säulen.

**63.** *Addition.* — a) Stellt $ABCDEF$ (39) eine ebene Figur vor, in welcher zwischen den Parallelogrammen $ab$, $bc$, $ac$ die Beziehung besteht:

$$ab + bc = ac \text{ (vgl. T. II, Nr. 81),}$$

und geht diese Figur durch Verschiebung in $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$

über, so beschreibt jedes der drei Parallelogramme eine Säule, ($aba_1b_1 = \mathfrak{ab}$, $bcb_1c_1 = \mathfrak{bc}$, $aca_1c_1 = \mathfrak{ac}$), jedes der Dreiecke $\overline{ABC}$ und $\overline{DEF}$ ein dreiseitiges Prisma. Aus 203a folgt dann, dass die beiden Prismen gleiche Grösse haben. Subtrahiert man dann das linke Prisma von der Summe der Säulen $\overline{aba_1b_1}$ und $\overline{bcb_1c_1}$, und addiert das rechte Prisma hinzu, so erhält man die Säule $\overline{aca_1c_1}$. Es ist also

1) $\mathfrak{ab} + \mathfrak{bc} = \mathfrak{ac}$.

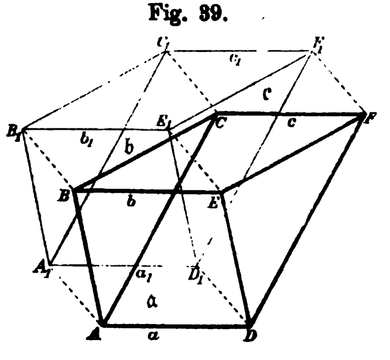


Fig. 39.

b) Stellt *ABCDEF* ein dreiseitiges Prisma vor, so hat man von der Summe der Säulen $\overline{aba_1b_1}$ und $\overline{bcb_1c_1}$ noch das hintere Prisma ($A_1B_1C_1D_1E_1F_1$) zu subtrahieren und das vordere (*ABCDEF*) zu addieren, um die Säule $\overline{aca_1c_1}$ zu erhalten. Die Formel 1) gilt also auch in diesem Falle.

In beiden Fällen entstehen die Säulen $\mathfrak{ab}$, $\mathfrak{bc}$ und $\mathfrak{ac}$ auch durch Verschiebung der Parallelogramme $\mathfrak{a}$ nach $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{b}$ nach $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{a}$ nach $\mathfrak{c}$. Aus Formel 1) ergiebt sich die Regel:

Soll man zwei Säulen mit kongruenter Grund- 204
fläche addieren, so legt man sie so *hinter* einander, dass ihre ersten Grundflächen zusammenfallen. Dann ist ihre Summe die Säule zwischen ihren anderen Grundflächen.

Anm. Addition mehrerer Säulen durch wiederholte Anwendung von 204.

**64.** *Subtraktion.* — Aus 1) folgt:

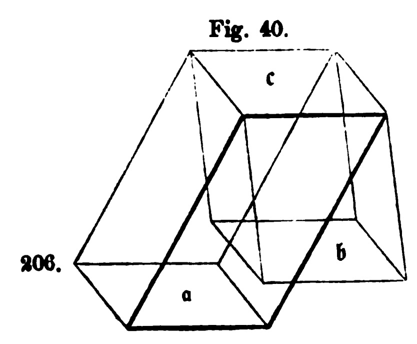
2) $\mathfrak{ac} - \mathfrak{bc} = \mathfrak{ab}$.

Demnach ist $\mathfrak{ab}$ die Differenz zwischen $\mathfrak{ac}$ und $\mathfrak{bc}$, und Fig. 39 liefert die Regel:

Soll man eine Säule von einer anderen mit kon- 205.
gruenter Grundfläche subtrahieren, so legt man sie so *in* einander, dass ihre ersten Grundflächen zusammenfallen. Dann ist ihre Differenz die Säule zwischen ihren anderen Grundflächen.

Sind die durch Subtraktion zu vereinigenden Säulen inhaltsgleich, so fallen [nach Formel 2)] auch ihre zweiten Grundflächen in dieselbe Ebene; d. h.: beide Säulen liegen zwischen

Fig. 40.

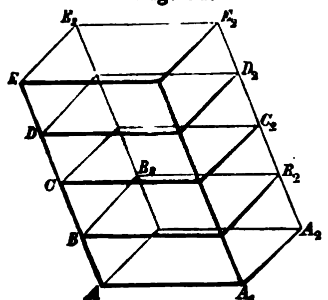



denselben parallelen Ebenen. Umgekehrt ist die Lage zwischen denselben parallelen Ebenen für Säulen mit gleichen*) Grundflächen ein Zeichen ihrer Inhaltsgleichheit. Da diese Säulen gleiche Höhe haben, so kann man auch sagen:

206. **Säulen mit gleicher Grundfläche und Höhe sind inhaltsgleich.**

**65.** ***Multiplikation.*** — Addiert man (nach 204) $n$ kongruente Säulen ($\overline{A..B_2} = \mathfrak{A}$), so entsteht eine Säule ($\overline{A..E_2} = \mathfrak{B}$), welche $n$-mal so gross ist als jede der gegebenen. Durch diese Konstruktion ist also die letztere ($\mathfrak{A}$) mit $n$ multipliziert, und man hat

Fig. 41.




$$3)\ n . \mathfrak{A} = \mathfrak{B}.$$

Da ferner $AE = n . AB$, so hat $\mathfrak{B}$ eine $n$-mal so grosse Seitenfläche als $\mathfrak{A}$, und, wenn man $\overline{A..A_2}$ als Grundfläche betrachtet, eine $n$-mal so grosse Höhe als $\mathfrak{A}$. Hieraus folgt (mit Berücksichtigung von 206) der Satz:

207. **Säulen mit gleicher Grundfläche verhalten sich wie ihre Höhen.**

Betrachtet man $\overline{A.E_3}$ als Grundfläche von $\mathfrak{B}$ und $\overline{A.B_3}$ als Grundfläche von $\mathfrak{A}$, so haben beide Säulen, da sie zwischen denselben parallelen Ebenen liegen, gleiche Höhe, und der vorige Satz lautet jetzt:

208. **Säulen mit gleicher Höhe verhalten sich wie ihre Grundflächen.**

---

*) Die Kongruenz der Grundflächen ist nur Bedingung für die Möglichkeit des Aufeinanderlegens derselben. Nach 203a ist aber die Gleichheit zweier durch Bewegung entstandenen Gebilde nicht von der Kongruenz, sondern nur von der Gleichheit der erzeugenden Gebilde abhängig. Man kann also z. B. die Säule *ac* (Fig. 40) durch eine andre mit gleicher Grundfläche ersetzen, entstanden durch gleiche Bewegung (also mit Seitenkanten, die denen der ersten gleich und parallel sind).

**66.** *Teilung.* — Aus 3) folgt:

$$4)\quad \frac{\mathfrak{B}}{n} = \mathfrak{A}.$$

Da die Strecke $AE$ durch die Punkte $B$, $C$, ... in ebensoviele gleiche Teile geteilt wird, wie die Säule $\overline{A\,..\,E_2}$ durch die Parallelogramme $\overline{B\,.\,B_2}$, $\overline{C\,.\,C_2}$, ..., so kann man eine gegebene Säule in $n$ gleiche Teile teilen, indem man eine Kante derselben in $n$ gleiche Teile zerlegt und durch die Teilpunkte parallele Ebenen zu den angrenzenden Seiten legt.

**67.** *Messung.* — Aus 3) folgt ferner:

$$5)\quad \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}} = n;$$

d. h.: Der Quotient zweier Säulen (also überhaupt zweier Polyeder) ist eine Zahl. 209.

Durch die Sätze 207 und 208 ist die Messung von Säulen mit gleicher Grundfläche oder Höhe auf die Messung von Strecken (s. T. II, Nr. 20) zurückgeführt; es bleiben also auch alle dort gemachten Bemerkungen über die Masszahl $n$ in Kraft.

Um zwei beliebige Säulen durch einander zu messen, nehmen wir an, eine Fläche $m^2$ sei in der Grundfläche der ersten $p$-mal, in der der zweiten $q$-mal enthalten, und eine Strecke $m_1$ in der Höhe der ersten $p_1$-mal, in der der zweiten $q_1$-mal. Dann verhalten sich die Grundflächen wie $\frac{p}{q}$, die Höhen wie $\frac{p_1}{q_1}$. — Legt man nun durch die Teilpunkte der Höhen parallele Ebenen zu den Grundflächen, so zerfällt die erste Säule in $p_1$ gleiche Teile ($\mathfrak{A}$), die zweite in $q_1$ gleiche Teile ($\mathfrak{B}$). Dann verhält sich nach 208

$$\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}} = \frac{p}{q};$$

also

$$\frac{p_1\mathfrak{A}}{q_1\mathfrak{B}} = \frac{pp_1}{qq_1};$$

d. h.: Säulen verhalten sich wie die Produkte aus den Masszahlen von Grundfläche und Höhe. 210.

Anm. 206 ist in 207 und 208, 207 und 208 sind in 210 als specielle Fälle enthalten.

Setzt man in 5) $\mathfrak{A} = 1$, so wird $\mathfrak{B} = n$, d. h. auch eine Zahl. Setzt man also irgend eine bestimmte Säule gleich 1,

so kann man alle Säulen (und Polyeder) als Zahlen darstellen. Weiteres hierüber s. in dem Abschnitt über rechnende Stereometrie.

## 2. Säule und dreiseitiges Prisma.

**68.** *Sätze.* — Ein Diagonalschnitt teilt die Säule in zwei dreiseitige Prismen (179). Da die Grundflächen dieser beiden Prismen einander kongruent sind (T. II, 131), und beide Prismen durch gleiche Bewegungen dieser Grundflächen entstehen, so folgt aus 203a:

211. Jeder Diagonalschnitt teilt eine Säule in zwei inhaltsgleiche dreiseitige Prismen.

212. Jedes dreiseitige Prisma ist halb so gross als eine Säule von doppelter Grundfläche und gleicher Höhe.

213. Dreiseitige Prismen mit gleicher Grundfläche und Höhe sind inhaltsgleich.

Haben zwei $n$-seitige Prismen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ gleiche Höhe und Grundfläche, so kann man die eine Grundfläche $\mathfrak{b}$ in eine der andern kongruente $\mathfrak{a}_1$ verwandeln, und erhält dadurch ein neues Prisma $\mathfrak{A}_1$, welches nach 203a mit $\mathfrak{B}$ inhaltsgleich ist. Dann kann man nach 192 die Prismen $A$ und $A_1$ durch Diagonalschnitte in dreiseitige Prismen zerlegen, von denen je zwei nach 213 inhaltsgleich sind. Es sind demnach auch die Prismen $A$ und $A_1$, folglich auch $A$ und $B$ inhaltsgleich, und man hat den Satz:

214. Prismen mit gleicher Grundfläche und Höhe sind inhaltsgleich.

Anm. Im Satze 203a war angenommen, dass die Bewegungen $h_1$ und $h_2$ gleiche und parallele Strecken bedeuteten. Nach 214 lässt sich diese Bedingung für Prismen dahin erweitern, dass $h_1$ und $h_2$ nur diejenigen Strecken zu sein brauchen, welche die Grösse der einfachen Verschiebung (T. II, Nr. 27) angeben. Sind diese Strecken gleich, so brauchen die von homologen Punkten der erzeugenden Figuren beschriebenen Strecken nicht gleich und parallel zu sein.

Auch die Sätze 207, 208, 210 gelten nun in Folge von 211 nicht nur für Säulen, sondern auch für dreiseitige Prismen, und in Folge von 192 für beliebige Prismen. Also:

215. Prismen mit gleicher Grundfläche verhalten sich wie ihre Höhen.

216. Prismen mit gleicher Höhe verhalten sich wie ihre Grundflächen.

217. Prismen verhalten sich wie die Produkte aus den Masszahlen von Grundfläche und Höhe.

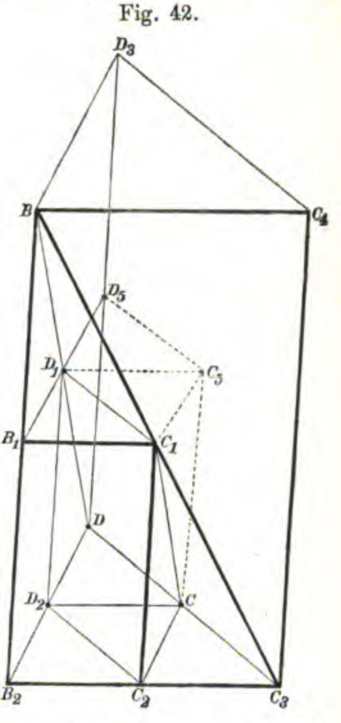
### 3. Dreiseitiges Prisma und Pyramide.

**69. *Sätze.*** — Schneidet man von zwei ähnlichen Polyedern $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}_1$ durch homologe Schnitte zwei ähnliche Polyeder $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{T}_1$ ab, so ist nach dem Begriff der Aehnlichkeit $\mathfrak{T}_1$ der ebensovielte Teil von $\mathfrak{P}_1$, wie $\mathfrak{T}$ von $\mathfrak{P}$; d. h. es ist 218.

$$\frac{\mathfrak{P}_1}{\mathfrak{T}_1} = \frac{\mathfrak{P}}{\mathfrak{T}}, \text{ oder } \frac{\mathfrak{P}_1}{\mathfrak{P}} = \frac{\mathfrak{T}_1}{\mathfrak{T}}.$$

Anm. Wie lautet der entsprechende Satz der ebenen Geometrie?

Fig. 42.




Es seien nun drei anstossende Kanten eines dreiseitigen Prismas $\mathfrak{P} = \overline{B_2 \ldots D_3 C_4}$ (Fig. 42) halbiert, so dass $B_2 B_1 = B_1 B$, $B_2 D_2 = D_2 D$, $B_2 C_2 = C_2 C_3$ ist; und es sei das ähnliche Prisma $\mathfrak{P}_1 = \overline{B_2 \ldots D_1 C_1}$ konstruiert. Dann ist die Grundfläche von $\mathfrak{P}_1$ ($B_2 D_2 C_2$) $\frac{1}{4}$ der Grundfläche von $\mathfrak{P}$ (T. II, 359), und die Höhe von $\mathfrak{P}_1$ $\frac{1}{2}$ der Höhe von $\mathfrak{P}$; also ist nach 217:

$$1)\quad \frac{\mathfrak{P}}{\mathfrak{P}_1} = \frac{8}{1}.$$

Schneidet man ferner von dem Prisma $\mathfrak{P}$ durch die Ebene $\overline{BDC_3}$ das Tetraeder $\mathfrak{T} = \overline{BB_2 C_3 D}$ ab, und von dem Prisma $\mathfrak{P}_1$ durch die homologe Ebene $\overline{B_1 D_2 C_2}$ das Tetraeder $\mathfrak{T}_1 = \overline{B_1 B_2 C_2 D_2}$ ($\cong \overline{BB_1 C_1 D_1}$), so ist nach 1) und 218

$$2)\quad \frac{\mathfrak{T}}{\mathfrak{T}_1} = \frac{8}{1}; \text{ oder } \mathfrak{T} = 8\,\mathfrak{T}_1.$$

Nun zerfällt das Tetraeder $\mathfrak{T}$ nach 169a in die beiden mit $\mathfrak{T}_1$ kongruenten Tetraeder $\overline{BB_1 D_1 C_1}$ und $\overline{C_1 C_2 C_3 C}$, und die beiden Prismen $\overline{B_2 \ldots D_1 C_1}$ ($= \mathfrak{P}_1$) und $\overline{C_1 \ldots DD_2}$. Ersteres ist die Hälfte der Säule $\overline{B_2 \ldots C_5}$ (212), letzteres die Hälfte der Säule $\overline{C_2 \ldots D_5}$. Da beide Säulen nach 206 inhaltsgleich sind, so ist auch

$$\overline{B_2 \ldots D_1 C_1} = \overline{C_1 \ldots D D_2} = \mathfrak{P}_1;$$

also 3) $\mathfrak{T} = 2\,\mathfrak{T}_1 + 2\,\mathfrak{P}_1.$

Setzt man 3) in 2) ein, so folgt:

$$2\,\mathfrak{T}_1 + 2\,\mathfrak{P}_1 = 8\,\mathfrak{T}_1;$$
$$2\,\mathfrak{P}_1 = 6\,\mathfrak{T}_1;$$
$$\mathfrak{P}_1 = 3\,\mathfrak{T}_1;$$

d. h.: Das dreiseitige Prisma $\mathfrak{P}_1$ ist dreimal so gross als das Tetraeder $\mathfrak{T}_1$, welches dieselbe Grundfläche und Höhe mit ihm hat. Mit Berücksichtigung von 214 kann man nun sagen:

219. **Jedes Tetraeder ist der dritte Teil eines dreiseitigen Prismas, welches mit ihm gleiche Grundfläche und Höhe hat.**

Anm. Ohne Formelrechnung lautet die Ableitung des Satzes so: Das grosse Prisma ist achtmal so gross als das kleine, also nach 218 auch das grosse Tetraeder achtmal so gross als das kleine, oder, nach Abzug der zwei kleinen kongruenten Tetraeder, der Rest sechsmal so gross als eins derselben. Da aber der Rest aus zwei inhaltsgleichen Prismen besteht, so ist jedes derselben dreimal so gross als das Tetraeder mit gleicher Grundfläche und Höhe. — Der Satz 219 entspricht dem geometrischen Satze T. II, 141. Jener folgte aber unmittelbar aus der Kongruenz der Dreiecke, in welche das Parallelogramm durch eine Diagonale zerfällt, während das dreiseitige Prisma sich nicht in kongruente Tetraeder zerlegen lässt. Offenbar lässt sich auch jener geometrische Satz, ohne die Kongruenz zu Hilfe zu nehmen, ebenso wie 219 ableiten. (Man führe dies aus!)

Aus 213 und 219 folgt:

220. **Tetraeder mit gleicher Grundfläche und Höhe sind inhaltsgleich.**

Aus 220 folgt, dass die drei Tetraeder, in welche nach 169 jedes dreiseitige Prisma geteilt werden kann, inhaltsgleich sind. Es ist nämlich, wenn man in jedem Tetraeder den ersten Buchstaben als Spitze betrachtet (s. Fig. 33):

$$\overline{C_1 ABC} = \overline{BA_1 B_1 C_1}, \text{ und } \overline{C_1 A_1 B_1 B} = \overline{C_1 A_1 AB}.$$

Satz 169 lautet daher vervollständigt:

221. **Zwei durch ein Paar Gegenecken gelegte Diagonalschnitte teilen das dreiseitige Prisma in 3 inhaltsgleiche Tetraeder.**

Anm. Der entsprechende geometrische Satz ist T. II, 131.

Aus 216 und 219 folgt:

Tetraeder mit gleicher Höhe verhalten sich wie ihre Grundflächen. Nach 154 kann jede $n$-seitige Pyramide in Tetraeder von gleicher Höhe zerlegt werden. Haben nun zwei $n$-seitige

Pyramiden $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{T}'$ gleiche Grundfläche und Höhe, und ist die erste in die Tetraeder $\mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2, \ldots$, die zweite in die Tetraeder $\mathfrak{T}_1', \mathfrak{T}_2', \ldots$ geteilt, so ist, wenn die Grundflächen durch $\mathfrak{a}$ bezeichnet werden, nach dem letzten Satze:

$$\mathfrak{T}_1 : \mathfrak{T}_2 : \mathfrak{T}_3 \ldots = \mathfrak{a}_1 : \mathfrak{a}_2 : \mathfrak{a}_3 \ldots; \quad \mathfrak{T}_1' : \mathfrak{T}_2' : \mathfrak{T}_3' \ldots = \mathfrak{a}_1' : \mathfrak{a}_2' : \mathfrak{a}_3' \ldots$$

$$\frac{\mathfrak{T}_1}{\mathfrak{T}_1'} = \frac{\mathfrak{a}_1}{\mathfrak{a}_1'}; \quad \frac{\mathfrak{T}_2}{\mathfrak{T}_2'} = \frac{\mathfrak{a}_2}{\mathfrak{a}_2'}; \quad \ldots \ldots;$$

folglich (T. I, 108):

$$\frac{\mathfrak{T}_1 + \mathfrak{T}_2 + \ldots}{\mathfrak{T}_1' + \mathfrak{T}_2' + \ldots} = \frac{\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2 + \ldots}{\mathfrak{a}_1' + \mathfrak{a}_2' + \ldots}.$$

Da nun $\quad \mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2 + \ldots = \mathfrak{a}_1' + \mathfrak{a}_2' + \ldots,$

so ist auch $\quad \mathfrak{T}_1 + \mathfrak{T}_2 + \ldots = \mathfrak{T}_1' + \mathfrak{T}_2' + \ldots;$

d. h.: Pyramiden mit gleicher Grundfläche und Höhe sind inhaltsgleich. 222.

Auch die Sätze 215, 216, 217 gelten nun in Folge von 219 nicht nur für dreiseitige Prismen, sondern auch für Tetraeder, und in Folge von 154 für beliebige Pyramiden. Also:

Pyramiden mit gleicher Grundfläche verhalten sich wie ihre Höhen. 223.

Pyramiden mit gleicher Höhe verhalten sich wie ihre Grundflächen. 224.

Pyramiden verhalten sich wie die Produkte aus den Masszahlen von Grundfläche und Höhe. 225.

Endlich folgt noch aus 219:

Jede Pyramide ist der dritte Teil eines Prismas, welches mit ihr gleiche Grundfläche und Höhe hat. 226.

**70.** *Rückblick.* — Die in Nr. 62—69 enthaltenen Sätze lassen mehrfache Analogieen zwischen Gebilden der Ebene und des Raumes erkennen. Erstens entspricht dem Parallelogramm die Säule, dem Dreieck einerseits das dreiseitige Prisma, andrerseits das Tetraeder. Zweitens aber entspricht dem Parallelogramm das allgemeine Prisma, und dem Dreieck die allgemeine Pyramide. — Ein vollkommnes Entsprechen findet statt zwischen Parallelogramm und Säule, sowie zwischen Dreieck und Tetraeder. Das dreiseitige Prisma steht zwischen beiden Körpern in der Mitte, indem es sowohl dem Parallelogramm wie dem Dreieck entspricht.

## 2) Seitenänderung der Figur.

### a) Bewegung des Polygons: Der Rotationskörper.

**71.** *Bewegung des rechtwinkligen Dreiecks: Der gerade Kegel.* — Macht ein rechtwinkliges Dreieck um eine seiner Katheten eine ganze Umdrehung, so beschreibt die andere Kathete die Grundfläche (42) und die Hypotenuse den Mantel eines geraden Kegels (Nr. 47). — Macht ein beliebiges Dreieck um eine seiner Seiten eine ganze Umdrehung, so entsteht ein Körper, welcher gleich der Differenz oder Summe zweier gerader Kegel ist, je nachdem an der Drehungsaxe ein stumpfer Winkel anliegt oder nicht.

Anm. Der Fall, dass die Drehungsaxe nicht mit einer Seite zusammenfällt, wird für Nr. 71—73 später behandelt (Nr. 120 und 121).

**72.** *Bewegung des Rechtecks: Der gerade Cylinder.* — Macht ein Rechteck um eine seiner Seiten eine ganze Umdrehung, so beschreibt die Gegenseite den Mantel (Nr. 59) und die beiden anderen Seiten die Grundflächen eines geraden Cylinders (42). — Macht ein beliebiges Parallelogramm eine ganze Umdrehung um eine seiner Seiten, so entsteht ein Körper, welcher gleich dem von der Gegenseite der Drehungsaxe beschriebenen Cylinder ($\mathfrak{A}$) ist, da er aus $\mathfrak{A}$ und zwei kongruenten Kegeln ($\mathfrak{B}$) in der Form $\mathfrak{A} + \mathfrak{B} - \mathfrak{B}$ zusammengesetzt ist.

**73.** *Bewegung eines Trapezes: Der gerade Kegelstumpf.* — Macht ein Trapez mit zwei rechten Winkeln eine ganze Umdrehung um die den rechten Winkeln anliegende Seite, so beschreibt die Gegenseite den Mantel (Nr. 48) und die beiden anderen Seiten die Grundflächen eines geraden Kegelstumpfes (42). — Da das rechtwinklige Dreieck und das Rechteck specielle Fälle des Trapezes sind (T. II, Nr. 78 und Nr. 110, letzte Anm.), so sind auch der gerade Kegel und der gerade Cylinder specielle Fälle des geraden Kegelstumpfes.

**74.** *Bewegung eines Polygons: Der Rotationskörper.* — Ist ein $n$-Eck gegeben, welches sich um eine in seiner Ebene liegende, seine Fläche nicht schneidende Axe drehen soll, so fällt man von seinen Ecken $A$, $B$, ... die Senkrechten $AA_1$, $BB_1$, ... auf die Axe (Fig. 43). Dadurch entstehen die Trapeze $\overline{ABA_1B_1}$, $\overline{BCB_1C_1}$, ... Nimmt man nun jede Seite des Polygons in derjenigen Richtung, in welcher sie beim Durchlaufen des ganzen Umfanges zurückgelegt wird, und betrachtet diejenigen Projektionen der Seiten, welche mit der Drehungsaxe

gleich gerichtet sind ($A_1B_1$, $B_1C_1$), als positiv, diejenigen mit entgegengesetzter Richtung ($C_1D_1$, $D_1E_1$, $E_1A_1$) als negativ, so sind die Flächen der Trapeze positiv oder negativ, je nachdem es ihre Höhen sind, und die Volumina der von den Trapezen beschriebenen Kegelstumpfe positiv oder negativ, je nachdem es die Flächen der erzeugenden Trapeze sind. Unter dieser Voraussetzung ist das Volumen des Rotationskörpers gleich der Summe der Volumina jener Kegelstumpfe. Also:

Fig. 48.

Jeder Körper, welcher durch Rotation eines Polygons um eine in seiner Ebene liegende, seine Fläche nicht schneidende Axe entsteht, lässt sich als Summe von Kegelstumpfen betrachten. 227.

Der Inhalt eines Trapezes, also auch des von ihm beschriebenen Kegelstumpfes, wird Null, wenn die in dem Trapez vorkommende Polygonseite auf der Axe senkrecht steht oder mit ihr zusammenfällt.

Wenn die Drehungsaxe die Fläche des Polygons schneidet, so teilt sie das Polygon in zwei Polygone, deren jedes für sich einen Rotationskörper beschreibt. Sind die beiden Polygone symmetrisch, so sind die beiden Rotationskörper kongruent. Specielle Fälle: Drehung eines regelmässigen Polygons von ungerader Seitenzahl um eine durch eine Ecke und seinen Mittelpunkt gehende Axe. Drehung eines regelmässigen Polygons, dessen Seitenzahl durch 2 oder 4 teilbar ist, um einen grossen oder kleinen Durchmesser.

Anm. Man untersuche die besonderen Formen von Kegelstumpfen, welche in den drei einzelnen Fällen auftreten.

### b) Bewegung des Halbkreises: Die Kugel.

**75.** *Entstehung der Kugel.* — Wenn eine Halbkreisfläche sich um ihren Durchmesser dreht, so beschreibt sie einen Körper, welcher Kugel heisst, wenn sie eine ganze Umdrehung macht, Kugelausschnitt (Sektor), wenn die Drehung diese Grösse nicht erreicht. — Die Kugel ist vollständig begrenzt durch die Kugelfläche, der Kugelausschnitt durch ein Kugelzweieck und zwei Halbkreisflächen (halbe Diametralkreise, siehe Nr. 22).

Durch ihre Drehung beschreibt die Halbkreisfläche einen Flächenwinkel (Centriwinkel des Sektors), welcher ebenso wie der Sektor selbst als Mass der Drehung betrachtet werden kann. Hieraus folgen die Sätze:

228. Zu gleichen Centriwinkeln in derselben Kugel gehören gleiche Sektoren (und umgekehrt). — Zu dem grösseren von zwei Centriwinkeln einer Kugel gehört der grössere Sektor (und umgekehrt).

Anm. Zwei in demselben Durchmesser sich schneidende halbe Diametralkreise einer Kugel teilen dieselbe in zwei Sektoren, von denen der eine einen konkaven, der andere den zu $4R$ ergänzenden konvexen Centriwinkel enthält.

Da alle Diametralkreise einer Kugel kongruent sind (80), so kann die Hälfte eines jeden derselben als das die Kugel erzeugende Gebilde angesehen werden. Aus 228 folgen daher nicht nur für die durch die angenommene Drehungsaxe gehenden, sondern für alle Diametralkreise die Sätze:

229. Jeder Diametralkreis halbiert die Kugel. — Zwei auf einander senkrecht stehende Diametralkreise teilen die Kugel in vier, drei auf einander senkrecht stehende Diametralkreise in acht gleiche Teile.

Wenn ein Kreissektor um einen der ihn begrenzenden Radien eine ganze Umdrehung macht, so beschreibt er einen Teil der Kugel, welcher Kugelkegel genannt werden mag. Derselbe ist vollständig begrenzt durch den Mantel eines geraden Kegels (Nr. 47) und durch einen Teil einer Kugelfläche.

Anm. Analog würde der Kreissektor „Kreisdreieck" zu nennen sein. — Jede aus dem Mittelpunkt einer Kugel als Spitze beschriebene gemeine Kegelfläche teilt die Kugel in zwei Kugelkegel. — Die Halbkugel kann als Kugelausschnitt mit gestrecktem Centriwinkel, oder als Kugelkegel mit gestrecktem Winkel an der Spitze der Kegelfläche angesehen werden.

Wir betrachten nun die Kugel der Reihe nach in Verbindung mit Punkt, Ebene und Körper.

76. *Kugel und Punkt.* — Ein Punkt kann auf oder ausserhalb der Kugelfläche liegen. Im zweiten Falle kann er wieder in oder ausserhalb der Kugel liegen. Verbindet man in jedem der hieraus folgenden 3 verschiedenen Fälle den Punkt mit dem Mittelpunkte der Kugel, so ergiebt sich unmittelbar der Satz:

230. Ein Punkt liegt in der Kugel, auf der Kugelfläche oder ausserhalb der Kugel, je nachdem seine Entfernung vom Mittelpunkte kleiner, gleichgross

oder grösser als der Radius der Kugel ist (und umgekehrt).

**77.** *Kugel und Ebene. — α) Sekantenebenen.* — Wenn eine Kugelfläche von einer Ebene geschnitten wird, so sind alle Punkte der Schnittlinie von dem Mittelpunkte der Kugel gleichweit entfernt (81), also auch gleichweit entfernt von dem Fusspunkte der vom Mittelpunkt auf die Ebene gefällten Senkrechten (155a). — Daher ist die Schnittlinie eine Kreislinie, welche jenen Fusspunkt zum Mittelpunkt hat (s. Fig. 15, S. 31), und man hat den Satz:

Eine Kugelfläche wird von jeder sie schneiden- 231.
den Ebene in einer Kreislinie geschnitten.

Eine Ebene, welche die Kugelfläche schneidet, heisst Sekantenebene. Jeder Schnittkreis der Kugel teilt dieselbe in zwei Körper, welche Kugelkappen genannt werden. Eine Kugelkappe ist vollständig begrenzt durch einen Teil der Kugelfläche und eine Kreisfläche. Durch den Grundkreis einer aus dem Kugelmittelpunkte beschriebenen Kegelfläche wird der eine Kugelkegel als Summe, der andere als Differenz einer Kugelkappe und eines Kegels dargestellt.

Anm. Die Halbkugel ist gleichzeitig Kugelkegel und Kugelkappe. Warum?

Ueberträgt man die Umkehrungssätze von 160a auf den aus dem Kugelmittelpunkte beschriebenen Kegel, so lauten dieselben:

Verbindet man den Kugelmittelpunkt mit dem 232
Mittelpunkte eines Schnittkreises, so steht die Verbindungslinie senkrecht auf dem Schnittkreise.

Fällt man vom Kugelmittelpunkte eine Senk- 233.
rechte auf einen Schnittkreis, so geht dieselbe durch den Mittelpunkt des Schnittkreises.

Errichtet man im Mittelpunkte eines Schnitt- 234.
kreises eine Senkrechte, so geht dieselbe durch den Kugelmittelpunkt.

Aus 155b folgt:

Der Abstand einer Sekantenebene vom Mittel- 234a.
punkte der Kugel ist kleiner als der Radius.

Und umgekehrt:

Eine Ebene schneidet die Kugel, wenn ihr Ab- 235.
stand vom Mittelpunkte kleiner als der Radius ist.

Gleiche Schnittkreise einer Kugel haben gleichen 236.
Abstand vom Mittelpunkte (T. II, 105).

237. **Der grössere von zwei Schnittkreisen einer Kugel hat den kleineren Abstand vom Mittelpunkte (und umgekehrt) (T. II, 173).**

Aus der Umkehrung von 237 folgt:

238. **Unter allen Schnittkreisen einer Kugel sind die Diametralkreise die grössten.**

78. *β*) *Tangentenebenen.* — Wenn eine Sekantenebene sich so verschiebt, dass ihr Abstand vom Mittelpunkte grösser wird, so wird der in ihr liegende Schnittkreis kleiner (237), und die Kreislinie, welche die Sekantenebene mit der Kugelfläche gemeinsam hat, geht endlich in einen Punkt über.

Eine Ebene, welche mit der Kugelfläche nur einen Punkt gemeinsam hat, heisst Tangentenebene derselben. Man sagt, sie berühre die Kugelfläche in dem gemeinsamen Punkte (Berührungspunkte).

Wie die Kreislinie selbst, so geht auch ihr Mittelpunkt in den Berührungspunkt über; d. h.: die Verbindungslinie des Kugelmittelpunktes mit dem Mittelpunkte des Schnittkreises ist ein Kugelradius. Und da diese Verbindungslinie beständig auf der Sekantenebene senkrecht steht (232), also ihren Abstand vom Kugelmittelpunkte angiebt, so folgt weiter:

239. **Der Abstand einer Tangentenebene vom Mittelpunkte der Kugel ist gleich dem Radius.**

Und umgekehrt:

240. **Eine Ebene berührt die Kugel in einem Punkte, wenn ihr Abstand vom Mittelpunkte gleich dem Radius ist.**

Anm. Hieraus folgt die Konstruktion der Tangentenebene in einem gegebenen Punkte $C$ der Kugelfläche. Man verbinde den Kugelmittelpunkt $O$ mit $C$ und lege durch $C$ die zu $OC$ senkrechte Ebene. Diese ist die gesuchte.

241. **Eine Ebene hat keinen Punkt mit der Kugelfläche gemeinsam, wenn ihr Abstand vom Mittelpunkte grösser ist als der Radius (155b, 230).**

Da die Tangentenebene nur ein specieller Fall der Sekantenebene ist, nämlich eine Sekantenebene, deren Schnittlinie in einen Punkt übergegangen ist, so liefert jeder Satz über eine Sekantenebene einen entsprechenden über eine Tangentenebene. Aus den Sätzen 232—234 folgt hiernach:

242. **Verbindet man den Kugelmittelpunkt mit dem Berührungspunkt einer Tangentenebene, so steht dieser Radius auf der Tangentenebene senkrecht,**

**Fällt man vom Kugelmittelpunkt auf eine Tangentenebene eine Senkrechte, so geht dieselbe durch den Berührungspunkt.** 243.

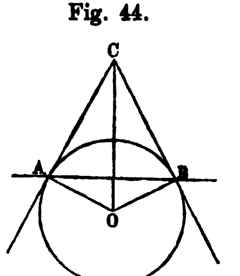
**Errichtet man auf einer Tangentenebene im Berührungspunkt eine Senkrechte, so geht dieselbe durch den Kugelmittelpunkt.** 244.

Zwei an dieselbe Kugelfläche gelegte Tangentenebenen schneiden sich in einer die Kugelfläche nicht schneidenden Geraden. Da dieselbe durch zwei ihrer Punkte vollkommen bestimmt ist, so hat man die Sätze:

**Durch eine die Kugelfläche nicht schneidende Gerade (oder durch zwei Punkte, deren Verbindungslinie die Kugelfläche nicht schneidet) lassen sich zwei Tangentenebenen an die Kugelfläche legen.** 245.

**Durch einen ausserhalb der Kugelfläche liegenden Punkt lassen sich an die Kugel beliebig viele Tangentenebenen legen, deren Berührungspunkte auf einer Kreislinie liegen.** 246.

Fig. 44.




Macht ein Kreis um die Verbindungslinie seines Mittelpunktes *O* mit dem Schnittpunkte *C* zweier Tangenten eine halbe Umdrehung (Fig. 44), so beschreibt der Kreis eine Kugel, die beiden Berührungspunkte *A* und *B* einen Kreis, und die beiden Tangenten *CA* und *CB* eine gemeine Kegelfläche, welche die Kugel in jener Kreislinie berührt. Also:

**An jede Kugel lässt sich ein Berührungskegel legen, dessen Spitze ein ausserhalb der Kugel gegebener Punkt ist, und dessen Tangentenebenen gleichzeitig Tangentenebenen der Kugel sind.** 247.

Rückt die Spitze des Kegels in unendliche Entfernung, so verwandelt sich die Kugelfläche in eine Cylinderfläche, und der letzte Satz erhält die Form:

**An jede Kugel lässt sich ein Berührungscylinder legen, dessen Axe einer gegebenen Geraden parallel ist, und dessen Tangentenebenen gleichzeitig Tangentenebenen der Kugel sind.** 248.

Anm. Der Berührungskreis zwischen Kugel und Cylinder ist Diametralkreis. — Was wird aus den beiden Tangentenebenen in 245, wenn die gegebene Gerade die Kugelfläche berührt? — Was wird aus dem Be-

rührungskegel in 247, wenn seine Spitze auf der Kugelfläche liegt? — Um durch eine gegebene Gerade an eine Kugelfläche die Tangentenebenen zu legen, lege man den auf der gegebenen Geraden senkrecht stehenden Diametralschnitt, welcher die gegebene Gerade in $C$ schneidet. Dann sind die Berührungspunkte der aus $C$ an den Diametralkreis gezogenen Tangenten $CA$ und $CB$ (Fig. 44) gleichzeitig die Berührungspunkte der gesuchten Tangentenebenen. (Warum?)

Aus Fig. 44 ist ferner ersichtlich:

249. Der Winkel zweier Tangentenebenen wird durch die Ebene halbiert, welche durch ihre Axe und den Kugelmittelpunkt gelegt ist.

250. Und umgekehrt: Die Halbierungsebene des Winkels zweier Ebenen geht durch den Mittelpunkt jeder die beiden Ebenen berührenden Kugeln.

Anm. Punkt und Ebene stehen der Kugelfläche gegenüber im Verhältnis der Reciprocität. Vgl. T. II, Nr. 93.

**79.** *Konstruktion einer Kugel aus gegebenen Bedingungen. — Vorbemerkung.* — Von einer Kugel ist die Grösse und Gestalt bestimmt, wenn man ihren Radius, und die Lage, wenn man ihren Mittelpunkt kennt. Zur Bestimmung des letzteren sind drei geometrische Oerter erforderlich, d. h. drei Flächen, welche einen Punkt gemeinsam haben. Man kann solche Oerter finden, wenn man die Bedingung stellt, dass die Kugelfläche durch gegebene Punkte gehen oder gegebene Ebenen berühren soll. (Andere Bedingungen lassen sich nach Analogie mit T. II, Nr. 106 aufstellen. S. Nr. 89.) Demnach sind Radius, Punkt der Kugelfläche und Tangentenebene die zur Bestimmung des Mittelpunktes einer Kugel dienenden Elemente.

Ist der Mittelpunkt einer Kugel bestimmt, so kennt man auch den Radius (wenn er nicht schon unter den gegebenen Elementen war); nämlich entweder als Verbindungsstrecke des Mittelpunktes mit einem gegebenen Punkte der Kugelfläche, oder als Senkrechte, die vom Mittelpunkte auf eine gegebene Tangentenebene gefällt wird.

Ist zur Konstruktion einer Kugel nur eine Bedingung gegeben, so kann jeder Punkt des Raumes Mittelpunkt einer Kugel werden, welche dieser Bedingung genügt. — Sind z ei Bedingungen gegeben, so existiert für den Mittelpunkt er Kugel eine Fläche als geometrischer Ort. Bezeichnet 1 m Punkte, durch welche die Kugelfläche gehen soll, durch $A$, $B$, ., Ebenen, welche sie berühren soll, durch $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, ..., den Ra s durch $r$, so sind folgende Zusammenstellungen von je zw n dieser Gebilde möglich: 1) $AB$, 2) $Ar$, 3) $A\mathfrak{a}$, 4) $\mathfrak{ab}$, 5) r.

Im dritten Fall ist zu unterscheiden, ob der Punkt $A$ auf der Ebene $\mathfrak{a}$ liegt oder nicht; im vierten, ob die Ebenen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ parallel sind oder sich schneiden.

**80.** *Sätze über den geometrischen Ort des Mittelpunktes einer Kugel.* — 1) Soll eine Kugelfläche *durch zwei gegebene Punkte gehen,* so ist der geometrische Ort ihres Mittelpunktes die auf der Verbindungsstrecke der Punkte in ihrer Mitte senkrecht konstruierte Ebene (73). 251.

2) Soll eine Kugelfläche *mit gegebenem Radius durch einen gegebenen Punkt gehen,* so ist der geometrische Ort ihres Mittelpunktes die mit dem Radius aus dem Punkte beschriebene Kugelfläche (81). 252.

3a) Soll eine Kugelfläche *eine gegebene Ebene in einem gegebenen Punkte berühren,* so ist der geometrische Ort ihres Mittelpunktes die auf der Ebene in dem Punkte errichtete Senkrechte.*) 253.

Anm. Liegt der Punkt nicht auf der Ebene, so ist der geometrische Ort weder eine Ebene, noch eine Kugelfläche, sondern eine andere krumme Fläche, die später betrachtet wird (Rotationsparaboloid).

4a) Soll eine Kugelfläche *zwei parallele Ebenen berühren,* so ist der geometrische Ort ihres Mittelpunktes die von beiden gleichweit entfernte parallele Ebene. 254.

Anm. Man beachte, dass durch $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ auch der Radius der Kugelfläche gegeben ist.

4b) Soll eine Kugelfläche *zwei sich schneidende Ebenen berühren,* so ist der geometrische Ort ihres Mittelpunktes das Ebenenpaar, welches die Winkel der Ebenen halbiert (76). 255.

5) Soll eine Kugelfläche *mit gegebenem Radius eine gegebene Ebene berühren,* so ist der geometrische Ort ihres Mittelpunktes das in der Entfernung des Radius zu der Ebene parallel gelegte Ebenenpaar. 256.

**81.** *Sätze von drei Flächen, die sich in derselben Linie schneiden.* — Sind zur Konstruktion einer Kugel drei Bedingungen gegeben, so liefern je zwei davon einen geometrischen Ort für den Mittelpunkt. Man erhält also drei geometrische Oerter. Da nun der Mittelpunkt gleichzeitig auf allen dreien liegen muss, so schneiden die drei Oerter sich stets in derselben Linie. Aus jeder derartigen Konstruktionsaufgabe geht

*) Diese Senkrechte ist als Ausartung der in der Anm. erwähnten Fläche anzusehen. Warum?

also ein Satz hervor, welcher aussagt, dass drei Flächen sich in derselben Linie schneiden. Am wichtigsten sind die Fälle *ABC* und abc.

Anm. Befindet sich unter den drei gegebenen Stücken eine Tangentenebene und der Berührungspunkt, so artet der eine geometrische Ort in eine Linie aus (258), und die Schnittlinie der drei geometrischen Oerter in einen Punkt. In diesem Falle ist also die Kugel bereits durch drei Stücke vollkommen bestimmt (Beispiel: a*Ar*). — Da die geometrischen Oerter zum Teil Ebenenpaare sind, so kann die Zahl der Schnittlinien 1, 2, 4 betragen.

Betrachtet man die Punkte *A*, *B*, *C* als Ecken eines Dreiecks, so erhält man den Satz:

257. Die in den Mitten der Seiten eines Dreiecks senkrecht errichteten Ebenen schneiden sich in *einer* Geraden.

Betrachtet man die Ebenen a, b, c als Seiten einer dreiseitigen Ecke, so folgen die Sätze:

258. Die Ebenen, welche die Winkel einer dreiseitigen Ecke halbieren, schneiden sich in *einer* Geraden.

259. Die Ebenen, welche zwei Aussenwinkel und den dritten Innenwinkel einer dreiseitigen Ecke halbieren, schneiden sich in *einer* Geraden.

Die Halbierungsebenen der Aussenwinkel einer dreiseitigen Ecke (abc) bilden eine neue dreiseitige Ecke ($a_1 b_1 c_1$), und stehen der Reihe nach auf den Halbierungsebenen der Innenwinkel senkrecht (Nr. 24; T. II, Anm. z. 122). Nennt man diese letzteren Ebenen die Höhenebenen der Ecke ($a_1 b_1 c_1$), so lautet der Satz 258:

260. Die Höhenebenen einer dreiseitigen Ecke schneiden sich in einer Geraden.

**82.** ***Sätze von vier Linien, die sich in demselben Punkte schneiden.*** — Sind zur Konstruktion einer Kugel vier Bedingungen gegeben, so liefern je drei derselben eine Linie als geometrischen Ort für den Mittelpunkt. Man erhält also vier geometrische Oerter. Da der Mittelpunkt auf allen gleichzeitig liegen muss, so gehen die vier Oerter stets durch denselben Punkt. Aus jeder derartigen Konstruktionsaufgabe geht also ein Satz hervor, welcher aussagt, dass vier Linien sich in demselben Punkte schneiden. Am wichtigsten sind die Fälle *ABCD* und abcd.

Betrachtet man die Punkte *A*, *B*, *C*, *D* als Eckpunkte eines Tetraeders, so erhält man den Satz:

261. Errichtet man auf jeder Seite eines Tetraeders

im Mittelpunkte des Umkreises die Senkrechte, so schneiden sich diese vier Senkrechten in *einem* Punkte (257, 74).

**Betrachtet man die Ebenen a, b, c, d als Seiten eines Tetraeders, so folgt der Satz:**

Konstruiert man für jede Ecke eines Tetraeders 262.
die Gerade, in welcher die Halbierungsebenen ihrer Winkel sich schneiden, so schneiden sich diese vier Geraden in *einem* Punkte (258).

Anm. Bezeichnet man die Erweiterungen der Tetraederseiten a, b, c, d über die Kanten hinaus mit a′, b′, c′, d′, ferner die Halbierungsebene des Winkels der Seiten a und b mit (ab), demnach die Halbierungsebene seines Nebenwinkels mit (a′b) oder (ab′), so enthält die folgende Zusammenstellung in jeder wagerechten Reihe drei Ebenen, welche sich in derselben Geraden, und jede Gruppe von vier unter einander stehenden wagerechten Reihen vier Geraden, welche sich in demselben Punkte schneiden. Solcher Punkte giebt es acht. Der erste liegt innerhalb des Tetraeders und ist der im Satze 262 erwähnte; die folgenden vier (2—5) liegen in den vier Räumen, welche mit dem Tetraeder eine Seite gemeinsam haben, und zwar erhält man dieselben aus (2) durch cirkuläre Vertauschung aller vier Buchstaben. Die letzten drei (6—8) liegen in drei von den Räumen, welche mit dem Tetraeder eine Kante gemeinsam haben, und zwar erhält man dieselben aus (6) durch cirkuläre Vertauschung dreier Buchstaben (z. B. b, c, d).

| (1) | | | (2—5) | | | (6—8) | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (ab) | (bc) | (ca) | (ab) | (bc) | (ca) | (ac) | (c′b) | (b′a) |
| (bc) | (cd) | (db) | (bc) | (c′d) | (d′b) | (bd) | (d′a) | (a′b) |
| (cd) | (da) | (ac) | (c′d) | (d′a) | (ac) | (ac) | (c′d) | (d′a) |
| (da) | (ab) | (bd) | (d′a) | (ab) | (b′d) | (bd) | (d′c) | (c′b) |

Sätze über Ebenen, die durch einen Punkt gehen. Bestimmung einer Kugel durch vier in einer Ebene liegende Punkte. Specieller Fall, wenn diese Punkte Ecken eines Sehnenvierecks sind.

**83.** *Kugel und Polyeder.* — Liegen die Ecken eines Polyeders auf einer Kugelfläche, so sagt man, das Polyeder sei der Kugel einbeschrieben, und die Kugel dem Polyeder umbeschrieben. Die Ecken des Polyeders sind vom Mittelpunkte der Kugel gleichweit entfernt. — In eine gegebene Kugel wird ein Polyeder beschrieben, indem man auf der Kugelfläche Punkte annimmt, und durch je drei benachbarte derselben eine Ebene legt (so dass auf der abgeschnittenen kleineren Kugelkappe keiner der gegebenen Punkte liegt. Doch können in derselben Ebene mehr als drei der gegebenen Punkte liegen). Damit um ein gegebenes Polyeder eine Kugel beschrieben werden könne, muss ein Punkt existieren, der von den Eckpunkten des Polyeders gleichweit entfernt ist,

Sind die Seitenflächen eines Polyeders Tangentenebenen einer Kugelfläche, so sagt man, das Polyeder sei der Kugel umbeschrieben. Die Kugel heisst dem Polyeder einbeschrieben, wenn sie innerhalb des Polyeders liegt, anbeschrieben, wenn ausserhalb. Beide Kugeln heissen zusammen Berührungskugeln. Die Seitenflächen des Polyeders sind vom Mittelpunkte einer solchen Kugel gleichweit entfernt. — Um eine gegebene Kugel wird ein Polyeder beschrieben, indem man in Punkten der Kugelfläche Tangentenebenen legt. Damit in oder an ein gegebenes Polyeder eine Kugel beschrieben werden könne, muss ein Punkt existieren, der von den Seitenflächen des Polyeders gleichweit entfernt ist.

**84.** Tetraeder. — Nach 261, 257 und 251 giebt es für jedes Tetraeder einen Punkt, der von seinen Eckpunkten, und nach 262 (nebst Anm.), 258 und 259, 255 acht Punkte (die Schnittpunkte dreier Ebenenpaare), die von seinen Seiten gleichweit entfernt sind. Man kann daher sagen:

263. Jedes Tetraeder hat eine umbeschriebene und acht Berührungskugeln.

Anm. Die Lage dieser Kugeln geht aus Anm. zu 262 hervor. Zu beachten ist, dass nur in drei von den sechs Räumen, welche an die Kanten des Tetraeders grenzen, Berührungskugeln existieren.

**85.** Homogene Polyeder. — Ein Polyeder heisst homogen, wenn alle seine Seitenflächen dieselbe Seitenzahl ($n$), und alle seine Ecken dieselbe Seitenzahl ($p$) haben.

Sei $m$ die Zahl der Seitenflächen eines homogenen Polyeders, so würde, da jede Seitenfläche $n$ Eckpunkte hat, die Zahl aller Eckpunkte $mn$ sein. Da aber jeder Eckpunkt zu $p$ Seitenflächen gehört, so fallen jedesmal $p$ von jenen $mn$ Eckpunkten in einen zusammen; mithin beträgt die Zahl der Eckpunkte des Polyeders nur $\frac{mn}{p}$.

Da ferner jede der $m$ Seitenflächen $n$ Kanten hat, so würde die Zahl aller Kanten $mn$ sein. Da aber jede Kante zu 2 Seitenflächen gehört, so fallen jedesmal 2 von jenen $mn$ Kanten in eine zusammen; mithin beträgt die Zahl der Kanten des Polyeders nur $\frac{mn}{2}$.

Bezeichnet man nun die Zahl der Eckpunkte, Seiten und Kanten eines homogenen Polyeders (wie in Satz 134) bezw. durch $e$, $s$ und $k$, so ist

$$e = \frac{mn}{p}; \quad s = m; \quad k = \frac{mn}{2},$$

folglich nach 134:

$$\frac{mn}{p} + m = \frac{mn}{2} + 2,$$

woraus folgt:

$$m = \frac{4p}{2n - (n-2)p};$$

d. h.: In einem homogenen Polyeder, welches $p$-seitige 264.
Ecken, und $n$-seitige Flächen enthält, ist die Zahl aller Flächen $\frac{4p}{2n-(n-2)p}$.

Wir untersuchen nun die einzelnen Fälle des homogenen Polyeders, wobei zu beachten ist, dass $p$ niemals kleiner als 3 sein kann.

Erster Fall: $n = 3$. Das Polyeder ist von lauter Dreiecken begrenzt. — Aus Formel 264 folgt: $m = \frac{4p}{6-p}$.

| | |
|---|---|
| Wenn | $p = 3, 4, 5,$ |
| so ist | $m = 4, 8, 20.$ |

Da, wenn $p = 6$ ist, $m$ den Wert $\infty$ hat, so giebt es hiernach nur drei Arten homogener Polyeder, die von Dreiecken begrenzt sind, nämlich mit vier Flächen (Tetraeder), mit acht Flächen (Oktaeder), und mit zwanzig Flächen (Ikosaeder).

Zweiter Fall: $n = 4$. Das Polyeder ist von lauter Vierecken begrenzt. — Aus Formel 264 folgt: $m = \frac{4p}{8-2p} = \frac{2p}{4-p}$.

| | |
|---|---|
| Wenn | $p = 3,$ |
| so ist | $m = 6.$ |

Andre Fälle sind offenbar nicht möglich. Es giebt hiernach nur eine Art homogener Polyeder, die von Vierecken begrenzt ist, nämlich mit sechs Flächen (Hexaeder).

Dritter Fall: $n = 5$. Das Polyeder ist von lauter Fünfecken begrenzt. — Aus Formel 264 folgt: $m = \frac{4p}{10-3p}$.

| | |
|---|---|
| Wenn | $p = 3,$ |
| so ist | $m = 12.$ |

Andre Fälle sind offenbar nicht möglich. Es giebt hiernach nur eine Art homogener Polyeder, die von Fünfecken begrenzt ist, nämlich mit zwölf Flächen (Dodekaeder).

Für $n = 6$ erhält man $m = \frac{4p}{12 - 4p} = \frac{p}{3 - p}$. In diesem Falle (und ebenso, wenn $n$ noch grössere Werte hat) erhält man also keinen ganzen positiven Wert mehr für $m$. Man hat also den Satz:

265. Es giebt nur fünf Arten homogener Polyeder, nämlich das Tetraeder, Oktaeder, Ikosaeder, Hexaeder und Dodekaeder.

Die Zahl aller Eckpunkte, Seiten und Kanten beträgt im

| | Ecken | Seiten | Kanten |
|---|---|---|---|
| Tetraeder | 4 | 4 | 6 |
| Hexaeder | 8 | 6 | 12 |
| Oktaeder | 6 | 8 | 12 |
| Dodokaeder | 20 | 12 | 30 |
| Ikosaeder | 12 | 20 | 30 |

Anm. Inwiefern entspricht hiernach das Dodekaeder dem Ikosaeder, das Hexaeder dem Oktaeder, das Tetraeder sich selbst?

266. Verbindet man einen Punkt im Innern eines homogenen Polyeders mit seinen sämmtlichen Eckpunkten, so teilen die entstehenden Dreiecksflächen das Polyeder in $m$ $n$-seitige Pyramiden.

**86.** *Teilung der Kugelfläche in regelmässige Polygone.* — Die Fläche einer Kugel kann durch drei Systeme von Diametralkreisen in kongruente regelmässige Kugelpolygone zerlegt werden.*)

Erstes System. Zwei Diametralkreise schneiden sich in zwei Punkten $P$ und $P_1$ unter Winkeln von $\left(\frac{360^0}{2 . 2} =\right) 90^0$. — Teilt man zwei benachbarte der vier von $P$ ausgehenden Halbkreise ($\widehat{PP_1}$) in zwei gleiche Teile (so dass $\widehat{PA} = \widehat{AP_1}$ und

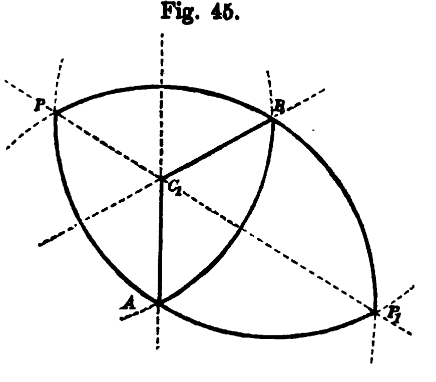
*) Zur Anfertigung von Modellen für diese Diametralkreise sind Gummibälle (von 5—6 cm Durchmesser) besonders brauchbar.

$\widehat{PB} = \widehat{BP_1}$), und legt den Diametralkreis durch das Punktepaar $AB$, so teilen diese drei Diametralkreise die Kugelfläche in acht kongruente regelmässige Kugeldreiecke (wie $\overline{PAB}$). (97)

Anm. Wie heissen diese Kugeldreiecke, wenn die Gegenpunkte von $P$, $A$, $B$ bezw. mit $P_1$, $A_1$, $B_1$ bezeichnet werden?

Zweites System. Drei Diametralkreise schneiden sich in zwei Punkten $P$ und $P_1$ unter Winkeln von $\left(\frac{360^0}{3.2} =\right) 60^0$. — Teilt man drei nicht benachbarte der sechs von $P$ ausgehenden Halbkreise ($\widehat{PP_1}$) so, dass die grösseren Abschnitte ($PA$, $PB$, $PC$) gleich der Seite, und die kleineren ($AP_1$, $BP_1$, $CP_1$) gleich $\frac{2}{3}$ der Höhe eines regelmässigen Kugeldreiecks sind, (Fig. 45) und legt noch drei Diametralkreise durch die Punktepaare $AB$, $BC$, $CA$, so teilen diese sechs Diametralkreise die Kugelfläche in vier kongruente regelmässige Kugeldreiecke (wie $PAB$).*)

Fig. 45.




Anm. Diese vier Dreiecke sind $\overline{PAB}$, $\overline{PBC}$, $\overline{PCA}$, $\overline{ABC}$. Die sechs Diametralkreise bilden gleichzeitig die Mittellinien der vier Dreiecke, und zwar ist der Mittelpunkt jedes Dreiecks der Gegenpunkt desjenigen der vier Punkte $P$, $A$, $B$, $C$, welcher nicht Eckpunkt des Dreiecks ist. Es ist ferner $PA_1 = PB_1 = PC_1 = P_1A = P_1B = P_1C$, und $PA = PB = PC = P_1A_1 = P_1B_1 = P_1C_1$. Jedes der vier Dreiecke besteht aus sechs Kugeldreiecken, deren gemeinsame Ecken die Punkte $A_1$, $B_1$, $C_1$, $P_1$ sind.

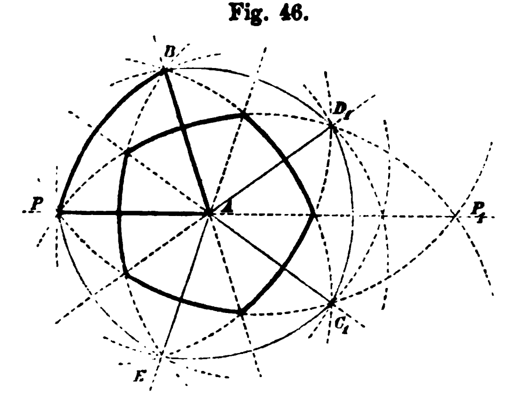
Dieselben sechs Diametralkreise teilen die Kugelfläche ausserdem in sechs kongruente regelmässige Kugelvierecke (wie $\overline{C_1AP_1B}$).

Anm. Diese sechs Vierecke sind $\overline{C_1AP_1B}$, $\overline{CA_1PB_1}$; $\overline{CA_1P_1B}$, $\overline{C_1APB_1}$; $\overline{CAP_1B_1}$, $\overline{C_1A_1PB}$. Die sechs Diametralkreise bilden gleichzeitig die Diagonalen der sechs Vierecke, und zwar sind die Mittelpunkte der Vierecke diejenigen Punkte, in denen nur zwei Diametralkreise sich schneiden. Jedes der sechs Vierecke besteht aus vier Kugeldreiecken, deren gemeinsame Ecken die Mittelpunkte der Kugelvierecke sind.

*) Der Beweis für die Richtigkeit des Satzes ist am Modell zu führen.

**Drittes System.** Fünf Diametralkreise schneiden sich in zwei Punkten $P$ und $P_1$ unter Winkeln von $\left(\frac{360^0}{5.2}=\right)$ 36°. — Teilt man fünf nicht benachbarte der zehn von $P$ ausgehenden Halbkreise ($\widehat{PP_1}$) so, dass die kleineren Abschnitte ($PA, PB, .. PE$) gleich der Seite, und die grösseren ($AP_1$, $BP_1$, .. $EP_1$) gleich der doppelten Höhe eines regelmässigen Kugeldreiecks sind (Fig. 46), und legt noch fünf Diametralkreise durch die Punktepaare $AB$, $BC$, $CD$, $DE$, $EA$, und fünf Diametralkreise durch die Punktepaare $AC$, $BD$, $CE$, $DA$, $EB$, so teilen diese fünfzehn Diametralkreise die Kugelfläche in zwanzig kongruente regelmässige Kugeldreiecke (wie $\overline{PAB}$).*)

Fig. 46.




Anm. Diese zwanzig Dreiecke sind:
$\overline{PAB}$, $\overline{PBC}$, $\overline{PCD}$, $\overline{PDE}$, $\overline{PEA}$; $\overline{P_1A_1B_1}$, $\overline{P_1B_1C_1}$, $\overline{P_1C_1D_1}$, $\overline{P_1D_1E_1}$, $\overline{P_1E_1A_1}$; $\overline{ABD_1}$, $\overline{BCE_1}$, $\overline{CDA_1}$, $\overline{DEB_1}$, $\overline{EAC_1}$; $\overline{A_1B_1D}$, $\overline{B_1C_1E}$, $\overline{C_1D_1A}$, $\overline{D_1E_1B}$, $\overline{E_1A_1C}$.
Die fünfzehn Diametralkreise bilden gleichzeitig die Mittellinien der zwanzig Dreiecke, und zwar sind die Mittelpunkte der Dreiecke diejenigen Punkte, in denen drei Diametralkreise sich schneiden. Jedes der zwanzig Dreiecke besteht aus sechs Kugeldreiecken, deren gemeinsame Ecken die Mittelpunkte der ersteren Dreiecke sind.

Dieselben fünfzehn Diametralkreise teilen die Kugelfläche ausserdem in zwölf kongruente regelmässige Kugelfünfecke. Die Ecken eines jeden derselben sind die Mittelpunkte von fünf Kugeldreiecken der vorigen Art, die eine Ecke (z. B. $A$) gemeinsam haben. Man kann demnach diese zwölf Kugelfünfecke durch ihre Mittelpunkte (z. B. $\bar{A}$) bezeichnen.

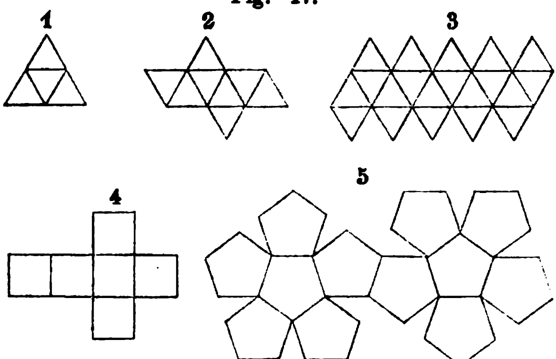
Anm. Diese zwölf Fünfecke sind also: $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$, $\bar{D}$, $\bar{E}$, $\bar{P}$; $\bar{A}_1$, $\bar{B}_1$, $\bar{C}_1$, $\bar{D}_1$, $\bar{E}_1$, $\bar{P}_1$. Die fünfzehn Diametralkreise bilden gleichzeitig die Mittellinien der zwölf Fünfecke, und zwar sind die Mittelpunkte der Fünfecke die Punkte, nach welchen die Fünfecke benannt sind. Jedes der zwölf Fünfecke besteht aus zehn Kugeldreiecken, deren gemeinsame Ecken die Mittelpunkte der Fünfecke sind.

*) S. die Fussnote auf voriger Seite.

**87. Regelmässige Polyeder.** — Ein homogenes Polyeder heisst regelmässig, wenn alle seine Seiten kongruente regelmässige Polygone sind.

267. Teilt man die Fläche einer Kugel (auf eine der in der vorigen Nr. beschriebenen Arten) in kongruente Kugelpolygone und konstruiert zu allen Seiten dieser Polygone die zugehörigen Sehnen, so sind diese Sehnen die Kanten eines Polyeders, welches von lauter kongruenten (regelmässigen, ebenen) Polygonen begrenzt und der Kugel einbeschrieben ist. (Nach T. II, 162 haben die Dreiecke gleiche Seiten, die Vierecke gleiche Seiten und Diagonalen, während die Fünfecke gleiche Seiten haben und Grundflächen gerader Pyramiden sind. Hieraus folgt die Regelmässigkeit und Kongruenz aller dieser Polygone. Dass die Vier- und Fünfecke ebene Figuren sind, folgt aus dem Satze, dass man in und um jedes regelmässige Kugelpolygon einen Kreis beschreiben kann.) Das Polyeder ist also ein regelmässiges. — Aus 265 folgt:

Fig. 47.




268. Es giebt nur fünf regelmässige Polyeder, nämlich das regelmässige Tetraeder, Oktaeder, Ikosaeder, Hexaeder (Würfel) und Dodekaeder.*)

Da die den Seitenflächen eines regelmässigen Polyeders umbeschriebenen Kreislinien kongruent sind, also (nach 236) gleichen Abstand vom Kugelmittelpunkte haben, so ist letzterer gleichzeitig Mittelpunkt einer dem Polyeder einbeschriebenen Kugel, und man hat den Satz:

---

*) Fig. 47 enthält die Netze dieser Körper, und die am Ende des Buches befindlichen Tafeln ihre stereoskopischen Bilder. Letztere können auch ohne Stereoskop in einer Entfernung von 20 cm betrachtet werden, wobei längs des trennenden Striches senkrecht zur Ebene des Bildes ein Blatt Papier (oder auch nur die Hand) zu halten ist.

269. In jedes regelmässige Polyeder kann eine Kugel beschrieben werden.

Hiernach liegen die Mittelpunkte der Seitenflächen eines regelmässigen Polyeders auf einer Kugelfläche. Man erhält diese Mittelpunkte, wenn man die Mitten der Seitenflächen der regelmässigen Kugelpolygone, welche eine Kugelfläche bedecken, mit dem Kugelmittelpunkte verbindet. Diese Linien schneiden die dem zugehörigen regelmässigen Polyeder einbeschriebene Kugelfläche in den verlangten Punkten. Da diese Mittelpunkte auf der inneren Kugelfläche ebenso gleichmässig verteilt liegen, wie die Eckpunkte auf der äusseren, so folgt, dass auch jene Mittelpunkte Eckpunkte eines regelmässigen Polyeders sind, und zwar erhält man aus Nr. 86 die Sätze:

270. Die Mitten der Seiten eines regelmässigen Tetraeders sind die Eckpunkte eines regelmässigen Tetraeders. (Hugel I, 6.*)

Die Mitten der Seiten eines regelmässigen Oktaeders sind die Eckpunkte eines regelmässigen Hexaeders (und umgekehrt). (Hugel II, 8; III, 8.)

Die Mitten der Seiten eines regelmässigen Ikosaeders sind die Eckpunkte eines regelmässigen Dodekaeders (und umgekehrt). (Hugel IV, 7; V, 8.)

Ferner:

271. Legt man durch die Eckpunkte der regelmässigen Kugelpolygone, welche eine Kugelfläche bedecken, Tangentenebenen, so entsteht ein der Kugel umbeschriebenes regelmässiges Polyeder.

Da, wie sich leicht zeigen lässt, die Eckpunkte dieses Polyeders gleichen Abstand vom Mittelpunkte der einbeschriebenen Kugel haben, so hat man schliesslich den Satz:

272. Um jedes regelmässige Polyeder kann eine Kugel beschrieben werden.

Auch die Mitten der Kanten eines regelmässigen Polyeders haben gleichen Abstand vom Kugelmittelpunkte, liegen also auf einer dritten Kugelfläche, welche die Seiten des Polyeders in ihren einbeschriebenen Kreisen schneidet.

Der Radius der einem regelmässigen Polyeder umbeschriebenen Kugel heisst grosser Radius, der der einbeschriebenen Kugel kleiner Radius, der Radius derjenigen Kugel-

*) Die regulären und halbregulären Polyeder, von Th. Hugel. Neustadt a. d. H. 1876. (Stereoskopische Bilder.)

fläche, welche durch die Mitten der Kanten geht, mittlerer Radius des Polyeders, der gemeinsame Mittelpunkt aller drei Kugeln Mittelpunkt des Polyeders.

Die Ebenen, welche durch je eine Kante und den Mittelpunkt eines regelmässigen Polyeders von *n* Seiten gehen, teilen dasselbe in *n* kongruente regelmässige Pyramiden (*Bestimmungspyramiden*). 278.

Anm. Welche anderen Teilungen des Polyeders lassen sich nach Analogie von T. II, 212 ausführen? — Was ist über analoge Sätze zu T. II, 214, 216—19 zu bemerken? — Welche Beziehungen bestehen zwischen den Radien der drei zu einem regelmässigen Polyeder gehörigen Kugeln?

Aus dem regelmässigen Ikosaeder und Dodekaeder entstehen durch Verlängerung der Kanten (oder Erweiterung der Ebenen) die regelmässigen Sternpolyeder, welche auf den am Schluss des Buches befindlichen Tafeln in stereoskopischen Bildern (Nr. 6—10) dargestellt sind, nämlich:

1) Das konkave Stern-Ikosaeder (Nr. 6) durch beiderseitige Verlängerung aller Kanten des Ikosaeders. Ueber jeder Fläche des letzteren erhebt sich eine regelmässige dreiseitige Pyramide. Der Körper hat 20 Eckpunkte und 60 Flächen (je drei in einem Eckpunkte sich schneidend), von denen je fünf in einer Ebene liegen.

2) Das konvexe Stern-Dodekaeder (Nr. 7) entsteht aus dem vorigen Körper, wenn jeder Eckpunkt des letzteren mit den drei benachbarten Eckpunkten verbunden wird. Diese Strecken bilden zusammen die Kanten eines regelmässigen Dodekaeders. Je fünf derselben, die in einer Ebene liegen, bilden mit einer Ecke des Ikosaeders als Spitze eine regelmässige fünfseitige Pyramide. Aus dem Dodekaeder ist unter jeder seiner Seiten eine solche Pyramide ausgeschnitten. Der Körper hat 20 Eckpunkte und 60 Flächen (je sechs in einem Eckpunkte sich schneidend), von denen je drei in einer Ebene liegen.

3) Das konkave Stern-Dodekaeder (Nr. 8) entsteht aus dem Dodekaeder ebenso wie 1) aus dem Ikosaeder. Ueber jeder Fläche des Dodekaeders erhebt sich eine regelmässige fünfseitige Pyramide. Der Körper hat 12 Eckpunkte und 60 Flächen (je fünf in einem Eckpunkte sich schneidend), von denen je fünf in einer Ebene liegen.

4) Das konvexe Stern-Ikosaeder (Nr. 9) entsteht aus dem vorigen Körper, wenn jeder Eckpunkt des letzteren mit den fünf benachbarten Eckpunkten verbunden wird. Diese

Strecken bilden zusammen die Kanten eines regelmässigen Ikosaeders. Je drei derselben, die in einer Ebene liegen, bilden mit einer Ecke des Dodekaeders als Spitze eine regelmässige dreiseitige Pyramide. Aus dem Ikosaeder ist unter jeder seiner Seiten eine solche Pyramide ausgeschnitten. Der Körper hat 12 Eckpunkte und 60 Flächen (je zehn in einem Eckpunkte sich schneidend), von denen je fünf in einer Ebene liegen.

5) Das konkav-konvexe Stern-Dodekaeder entsteht aus 3), indem unter jeder Seite dieses Körpers nochmals eine dreiseitige Pyramide ausgeschnitten wird. Der Körper hat demnach 180 Flächen (je zehn in einem Eckpunkte sich schneidend), von denen je 9 in einer Ebene liegen.

Das konkav-konvexe Stern-Ikosaeder würde aus 1) ebenso entstehen, wie 5) aus 3). Indessen müsste unter jeder Seite von 1) dieselbe dreiseitige Pyramide ausgeschnitten werden, welcher diese Seite angehört. Es würde also nichts Körperliches übrig bleiben; der Körper existiert daher als solcher nicht; seine Kanten aber fallen mit denen von 1) zusammen.

**88.** Zwei Kugelflächen. — Wenn zwei in einer Ebene liegende Kreislinien sich um ihre Centrallinie drehen, so entstehen zwei Kugelflächen. Die Centrallinie der ersteren, welche auch die beiden Kugelmittelpunkte verbindet, heisst auch Centrallinie der Kugeln. Aus den verschiedenen Beziehungen der beiden Kreislinien (s. T. II, Nr. 104) gehen ebensoviele Beziehungen der beiden Kugelflächen hervor. Im allgemeinen haben zwei Kugelflächen eine gemeinsame Kreislinie (wie sogleich gezeigt werden wird), die sich jedoch in einen Punkt zusammenziehen, oder ganz verschwinden kann.

Eine gemeinsame Kreislinie. — Wenn zwei sich schneidende Kreislinien eine halbe Umdrehung um ihre Centrallinie machen, so beschreibt ihre gemeinsame Sekante eine Ebene (42), und ihre beiden Schnittpunkte zusammen eine Kreislinie. Diese ist also auch den beiden Kugelflächen gemeinsam. — Aus T. II, 229 folgt nun:

274. Die Centrallinie zweier sich schneidender Kugelflächen ist kleiner als die Summe und grösser als die Differenz der Radien (und umgekehrt).

Ferner aus T. II, 230:

275. Die Centrallinie zweier sich schneidender Kugelflächen steht senkrecht auf der gemeinsamen Sekante-

ebene und geht durch den Mittelpunkt der gemeinsamen Kreislinie.

Ein gemeinsamer Punkt. — Wenn zwei sich (von aussen oder innen) berührende Kreislinien eine halbe Umdrehung um ihre Centrallinie machen, so ändert der Berührungspunkt (T. II, 233) seine Lage nicht. Es haben dann auch die beiden Kugelflächen nur diesen einen Punkt gemeinsam. — Aus T. II, 231 und 232 folgt nun:

Die Centrallinie zweier sich von aussen (innen) 276.
berührender Kugelflächen ist gleich der Summe (Differenz) der Radien (und umgekehrt).

Ferner aus T. II, 233:

Die Centrallinie zweier sich berührender Kugel- 277.
flächen steht senkrecht auf der gemeinsamen Tangentenebene und geht durch den Berührungspunkt.

Kein gemeinsamer Punkt. — Wenn zwei ausser oder in einander liegende Kreislinien eine halbe Umdrehung um ihre Centrallinie machen, so entstehen zwei ausser oder in einander liegende Kugelflächen, welche keinen Punkt gemeinsam haben. Aus T. II, 234 und 235 folgt dann:

Die Centrallinie zweier ausser (in) einander lie- 278.
gender Kugelflächen ist grösser als die Summe (kleiner als die Differenz) der Radien.

Ist insbesondere die Centrallinie gleich Null, so haben die beiden Kugeln denselben Mittelpunkt und heissen konzentrisch.

**89.** *Sätze über den geometrischen Ort des Mittelpunktes einer Kugel.* — 6) (Fortsetzung zu 256.) Durch analoge Betrachtungen wie in T. II, Nr. 106 erhält man leicht die Sätze:

Soll eine Kugelfläche *eine gegebene Kugelfläche in einem* 279.
*gegebenen Punkte berühren,* so ist der geometrische Ort ihres Mittelpunktes die durch den Punkt und den Mittelpunkt gehende Gerade.

7) Soll eine Kugelfläche *mit gegebenem Radius eine* 280.
*gegebene Kugelfläche berühren,* so ist der geometrische Ort ihres Mittelpunktes die mit der Summe oder Differenz der beiden Radien aus dem gegebenen Mittelpunkte beschriebene Kugelfläche.

Anm. Die in T. II, Nr. 107—140 behandelten projektivischen Beziehungen lassen sich auch auf räumliche Gebilde ausdehnen. Es kann indes dieser Gegenstand hier nur angedeutet werden. Im übrigen giebt die Art und Weise, wie in der Stereometrie der bewegten Gebilde Beziehungen der ebenen Geometrie auf räumliche Gebilde ausgedehnt worden sind, genügenden Anhalt zur Ausfüllung dieser Lücke.

# Rechnende Stereometrie.

**90.** *Vorbemerkung.* — Wie der Umfang eines Polygons als Summe seiner Seiten, so kann auch die Oberfläche eines Polyeders als Summe seiner Seiten dargestellt und berechnet werden. Es werden daher im folgenden nur die Mantelflächen des Cylinders, des Kegels und der Kugel eine besondere Berechnung erfordern. Dagegen ist der räumliche Inhalt (Körperraum, Volumen) eines Körpers ebenso zum Gegenstande einer neuen Betrachtung zu machen, wie in der Geometrie der Flächenraum einer Figur. Wie der letztere als Produkt zweier Strecken, so wird der erstere als Produkt dreier Strecken erscheinen. Im übrigen gelten die in T. II, Nr. 141 gemachten Bemerkungen auch hier.

## 1) Der Körperraum als Streckenprodukt.

**91.** *Masseinheit.* — Wie zwei ebene Figuren, so kann man auch zwei Körper (Körperräume) durch einander messen, indem man bestimmt, wie oft der eine in dem anderen enthalten ist. An dem Körper, welchen man als Mass benutzen will, ist Grösse und Gestalt beliebig. Es ist jedoch allgemein üblich, den Würfel als Massfigur zu nehmen, dessen Seiten als Quadrate das Flächenmass darstellen.

Nur ein Körper, die rechteckige Säule, lässt sich direkt durch den Würfel messen, d. h. in Würfel zerlegen; die Messung der übrigen Körper wird durch Rechnung bewerkstelligt.

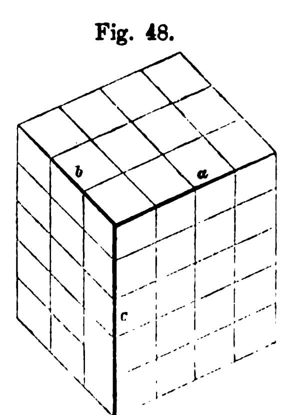
**92.** *Die rechteckige Säule.* — Es sei $m$ das gemeinsame Mass dreier anstossender Kanten ($a$, $b$, $c$) einer rechteckigen Säule, und $p$-mal in $a$, $q$-mal in $b$, $r$-mal in $c$ enthalten, so dass

$$a = pm, \quad b = qm, \quad c = rm$$

ist. Teilt man dann $a$ in $p$, $b$ in $q$, $c$ in $r$ gleiche Teile, und legt durch die Teilpunkte jeder Kante parallele Ebenen zur

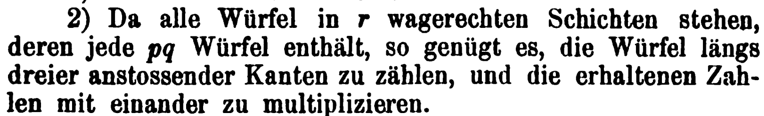
Ebene der beiden andern Kanten, so zerfällt die rechteckige Säule in kongruente Würfel ($M$). — Setzt man $m = 1$, so geben die Zahlen $p$, $q$, $r$ die Länge der Kanten $a$, $b$, $c$ an, und jeder der erhaltenen Würfel hat die Längeneinheit als Kante. Setzt man auch $M = 1$, so ist das Volumen der rechteckigen Säule durch die Zahl ausgedrückt, welche angiebt, in wieviel Würfel die rechteckige Säule zerfällt.

Fig. 48.




Es kommt jetzt darauf an, diese Zahl zu bestimmen. Dazu bieten sich der Reihe nach drei Methoden.

1) Man zählt alle Würfel einzeln.



2) Da alle Würfel in $r$ wagerechten Schichten stehen, deren jede $pq$ Würfel enthält, so genügt es, die Würfel längs dreier anstossender Kanten zu zählen, und die erhaltenen Zahlen mit einander zu multiplizieren.

3) Da jede dieser drei Reihen Würfel soviel Würfel enthält, wie die entsprechende Kante Längeneinheiten, so genügt es, statt der Würfel die Längeneinheiten der Kanten $a$, $b$ und $c$ zu zählen ($a$, $b$ und $c$ durch $m$ zu messen), und die erhaltenen Zahlen mit einander zu multiplizieren.

Die Anzahl der Würfel ist nach jeder dieser Zählungen $pqr$.

Anm. Zur wirklichen Ausmessung einer solchen rechteckigen Säule (z. B. eines Zimmers) durch eine der beiden ersten Methoden würde man ein wirkliches Körpermass (etwa einen hölzernen Würfel) gebrauchen. Die dritte Methode erfordert nur ein Längenmass zur Messung der Strecken $a$, $b$ und $c$, und zeigt, wie die Körpermessung durch Längenmessungen und eine Rechnung ersetzt werden kann.

Man versteht nun unter dem *Produkte dreier Strecken*, die durch eine Längeneinheit gemessen sind, das mit dem Produkte ihrer Masszahlen multiplizierte Volumen des Würfels, dessen Seite die Längeneinheit ist.

Aus dieser Erklärung und der vorher gegebenen Bestimmung des Volumens der rechteckigen Säule folgt unmittelbar der Satz:

Das Volumen einer rechteckigen Säule ist gleich 281.
dem Produkte dreier anstossender Kanten.

Sind die drei Strecken eines solchen Produktes einander gleich, so geht das Produkt in die arithmetische dritte Potenz der einen Strecke über, und aus 281 folgt:

282. **Das Volumen eines Würfels ist gleich der (arithmetischen) dritten Potenz einer Kante.**

Anm. Welcher Satz kann zwischen 281 u. 282 eingeschaltet werden?

**93.** *Die Säule.* — Eine beliebige Säule ist nach 206 einer rechteckigen Säule mit gleicher Grundfläche und Höhe gleich. Sind $a$, $b$ und $c$ drei anstossende Kanten dieser rechteckigen Säule, so ist die Grundfläche der gegebenen Säule gleich $ab$, die Höhe gleich $c$; also folgt aus 281:

283. **Das Volumen einer Säule ist gleich dem Produkte aus Grundfläche und Höhe.**

**94.** *Das Prisma.* — Nach 211 zerfällt jede Säule durch eine Diagonalebene in zwei inhaltsgleiche dreiseitige Prismen, welche die halbe Grundfläche und die gleiche Höhe der Säule haben. Ist nun $\mathfrak{a}$ die Grundfläche und $h_1$ die Höhe der Säule, so ist ihr Volumen nach 283 gleich $\mathfrak{a}h_1$; folglich das des dreiseitigen Prismas gleich $\frac{\mathfrak{a}h_1}{2}$ oder $\frac{\mathfrak{a}}{2} \cdot h_1$. Da nun $\frac{\mathfrak{a}}{2}$ die Grundfläche dieses Prismas ist, so folgt:

284. **Das Volumen eines dreiseitigen Prismas ist gleich dem Produkte aus Grundfläche und Höhe.**

Nach 192 lässt sich jedes Prisma durch Diagonalebenen in dreiseitige Prismen von gleicher Höhe zerlegen. Ist $\mathfrak{a}$ die Grundfläche des ganzen Prismas, $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2$ .. die Grundflächen seiner Teile, und $h$ die gemeinsame Höhe aller Prismen, so sind die einzelnen Volumina nach 284: $\mathfrak{a}_1 h, \mathfrak{a}_2 h, \mathfrak{a}_3 h, \ldots$; folglich das Gesamtvolumen

$$\mathfrak{V} = \mathfrak{a}_1 h + \mathfrak{a}_2 h + \mathfrak{a}_3 h + \ldots = (\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2 + \mathfrak{a}_3 + \ldots) h,$$

oder, da $\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2 + \mathfrak{a}_3 + \ldots = \mathfrak{a}$

ist, $\mathfrak{V} = \mathfrak{a}h$;

285. d. h.: **Das Volumen eines Prismas ist gleich dem Produkte aus Grundfläche und Höhe.**

**95.** *Die Pyramide.* — Aus 219 und 284 folgt:

286. **Das Volumen einer dreiseitigen Pyramide ist gleich dem dritten Teile des Produkts aus Grundfläche und Höhe.**

Nach 154 lässt sich jede Pyramide durch Schnittebenen in dreiseitige Pyramiden von gleicher Höhe zerlegen. Ist $\mathfrak{a}$ die Grundfläche der ganzen Pyramide, $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2 \ldots$ die Grundflächen ihrer Teile, und $h$ die gemeinsame Höhe aller Pyramiden, so

sind die einzelnen Volumina nach 286: $\frac{\mathfrak{a}_1 h}{3}, \frac{\mathfrak{a}_2 h}{3}, \frac{\mathfrak{a}_3 h}{3}, \ldots;$ folglich das Gesamtvolumen

$$\mathfrak{V} = \frac{\mathfrak{a}_1 h}{3} + \frac{\mathfrak{a}_2 h}{3} + \frac{\mathfrak{a}_3 h}{3} + \ldots = (\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2 + \mathfrak{a}_3 + \ldots)\frac{h}{3},$$

oder, da $\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2 + \mathfrak{a}_3 + \ldots = \mathfrak{a}$

ist, $$\mathfrak{V} = \frac{\mathfrak{a} h}{3};$$

d. h.: Das Volumen einer Pyramide ist gleich dem dritten Teile des Produktes aus Grundfläche und Höhe. 287.

**96.** *Der Pyramidenstumpf.* — Ist von einer Pyramide, deren Grundfläche $\mathfrak{a}$, deren Höhe $h + h_1$ ist, durch eine zu $\mathfrak{a}$ parallele Ebene eine Pyramide abgeschnitten, deren Grundfläche $\mathfrak{a}_1$, Höhe $h_1$ ist, so ist das Volumen des übrig bleibenden Pyramidenstumpfes (nach 287):

$$\mathfrak{V} = \frac{\mathfrak{a}(h + h_1)}{3} - \frac{\mathfrak{a}_1 h_1}{3} = \frac{\mathfrak{a} h}{3} + \frac{h_1(\mathfrak{a} - \mathfrak{a}_1)}{3}.$$

Nun ist

$$\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{a}_1} = \frac{(h + h_1)^2}{h_1^2}, \text{ oder } \frac{\sqrt{\mathfrak{a}}}{\sqrt{\mathfrak{a}_1}} = \frac{h + h_1}{h_1},$$

oder:

$$\frac{\sqrt{\mathfrak{a}} - \sqrt{\mathfrak{a}_1}}{\sqrt{\mathfrak{a}_1}} = \frac{h}{h_1},$$

oder, beiderseits mit $\sqrt{\mathfrak{a}} + \sqrt{\mathfrak{a}_1}$ multipliziert:

$$\frac{\mathfrak{a} - \mathfrak{a}_1}{\sqrt{\mathfrak{a}_1}} = \frac{h(\sqrt{\mathfrak{a}} + \sqrt{\mathfrak{a}_1})}{h_1}, \text{ oder } (\mathfrak{a} - \mathfrak{a}_1)h_1 = h(\sqrt{\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1} + \mathfrak{a}_1);$$

also, wenn man diesen Wert oben einsetzt:

$$\mathfrak{V} = \frac{\mathfrak{a} h}{3} + \frac{h(\sqrt{\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1} + \mathfrak{a}_1)}{3} = \frac{h}{3}(\mathfrak{a} + \sqrt{\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1} + \mathfrak{a}_1);$$

d h., da $h$ die Höhe des Pyramidenstumpfes ist:

Das Volumen eines Pyramidenstumpfes ist gleich dem dritten Teile des Produktes aus seiner Höhe und der Summe seiner Grundflächen und des geometrischen Mittels derselben. 288.

Anm. Setzt man in der letzten Formel $\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{a}$, so verwandelt sich der Pyramidenstumpf in ein Prisma, und die Formel für sein Volumen in $\mathfrak{V} = \mathfrak{a} h$, übereinstimmend mit 285.

**97.** *Polyeder.* — Sind $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ .. die Seiten eines Polyeders, welches einer Kugel mit dem Radius $\varrho$ umbeschrieben ist, so zerfällt dasselbe, wenn man durch den Mittelpunkt der Kugel und seine Kanten Ebenen legt, in Pyramiden, deren Grundflächen $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ .. sind, deren Höhen alle gleich $\varrho$ sind. Demnach ist das Volumen des Polyeders

$$\mathfrak{V} = \frac{\mathfrak{a}\varrho}{3} + \frac{\mathfrak{b}\varrho}{3} + \ldots = \frac{\varrho(\mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \ldots)}{3},$$

oder, wenn $\frac{\mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \ldots}{3} = \mathfrak{p}$ gesetzt wird:

$$\mathfrak{V} = \mathfrak{p}\varrho;$$

289. d. h.: **Das Volumen eines der Kugel umbeschriebenen Polyeders ist gleich dem dritten Teile des Produktes aus Oberfläche und Radius.**

Anm. Andere Polyeder müssen, wenn ihr Volumen berechnet werden soll, in Pyramiden zerlegt werden. — Welche Sätze über die Vergleichung der Volumina zweier Körper lassen sich analog zu T. II, Nr. 148 und 149 aufstellen? — Führt eine geometrische oder stereometrische Aufgabe auf eine **rein kubische Gleichung** $x^3 = abc + a_1 b_1 c_1$, so kann man dieselbe durch die geometrische Konstruktion $a_1 b_1 = ay$ auf die Form $x^3 = a(bc + yc_1)$, und durch $bc + yc_1 = z^2$ auf die Form $x^3 = az^2$ bringen. Die in dieser Gleichung liegende Aufgabe: „Eine rechteckige Säule in einen Würfel zu verwandeln“ ist jedoch durch elementare Konstruktion nicht lösbar, folglich ebensowenig der specielle Fall obiger Gleichung $x^3 = a^3 + b^3$, welcher durch die Annahmen $a = b = c$, $a_1 = b_1 = c_1$ daraus hervorgeht (und der Fall $x^3 = 2a^3$, welcher das **delische Problem** genannt wird). Die **gemischt-kubische Gleichung** $y^3 + 3p^2y = 2q^3$ (s. T. I, Nr. 109 nnd 110) würde die zur Konstruktion ungeeignete Lösung $y = \sqrt[3]{q^3 + \sqrt{q^6 + p^6}} + \sqrt[3]{q^3 - \sqrt{q^6 + p^6}}$ ergeben.

## 2) Die regelmässigen Poly~~gone~~eder.

**98.** *Flächenwinkel.* — Allgemeine Formel. — Von einem regelmässigen Polyeder sei eine Ecke $A$ (Fig. 49) durch eine Ebene so abgeschnitten, dass auf den von $A$ ausgehenden Kanten gleiche Stücke (z. B. $AB$, $AC$, $AB_1$) abgeschnitten werden. Dann ist, wenn in der Ecke $A$ $p$ Flächen zusammentreffen, der Eckpunkt $A$ die Spitze einer geraden $p$-seitigen Pyramide. Der Fusspunkt $A_1$ der Höhe dieser Pyramide ist (nach 1[illegible]5) der Mittelpunkt des der Grundfläche umbeschriebenen Kreises; und $\overline{A_1BC}$ ein Bestimmungsdreieck des die Grundfläche bil-

denden regelmässigen $p$-Ecks. — Es ist ferner $BAC (= \alpha)$ der Winkel eines der regelmässigen $n$-Ecke, welche das Polyeder begrenzen, und $BA_1C$ $(= \alpha_1)$ der Centriwinkel des regelmässigen $p$-Ecks.

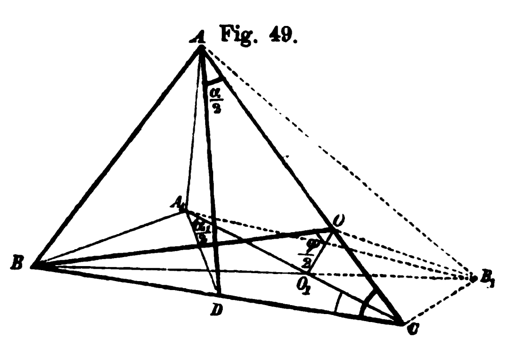


Fig. 49.

Demnach

$$1) \qquad \alpha = \frac{2n-4}{n} R; \quad \alpha_1 = \frac{4}{p} R.$$

Verbindet man $D$, die Mitte von $BC$, mit $A$ und $A_1$, so zerfallen die gleichschenkligen Dreiecke $\overline{ABC}$ und $\overline{A_1BC}$ in rechtwinklige, und es ist

$$2) \qquad CAD = \frac{\alpha}{2}; \quad CA_1D = \frac{\alpha_1}{2}.$$

Da endlich die Ebene $\overline{ACA_1}$ den Winkel $\varphi$ der beiden in $AC$ sich schneidenden Seitenflächen der Pyramide $\overline{ABC}$ und $\overline{AB_1C}$ (die zugleich Flächen des Polyeders sind) halbiert, so ist, wenn man $BO \perp AC$ und $OO_1 \perp AC$ konstruiert,

$$3) \qquad BOO_1 = \frac{\varphi}{2}.$$

Verbindet man nun $B_1$ mit $O$, so ist $\overline{BOC} \cong \overline{B_1OC}$, also $BO = B_1O$, d. h.: $OO_1 \perp BB_1$ (als Halbierungslinie des Winkels an der Spitze im gleichschenkligen Dreieck $\overline{BOB_1}$).

Nun ist in dem rechtwinkligen Dreieck $\overline{BOO_1}$

$$4) \qquad \sin \frac{\varphi}{2} = \frac{BO_1}{BO}.$$

Ferner im rechtwinkligen Dreieck $\overline{BO_1C}$:

$$BO_1 = BC \,.\, \sin BCA_1 = BC \,.\, \cos DA_1C = BC \,.\, \cos \frac{\alpha_1}{2},$$

und im rechtwinkligen Dreieck $\overline{BOC}$:

$$BO = BC \,.\, \sin BCA = BC \,.\, \cos DAC = BC \,.\, \cos \frac{\alpha}{2}.$$

Setzt man diese Werte in 4) ein, so folgt:

$$\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{\cos\frac{\alpha_1}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}},$$

oder mit Rücksicht auf 1)

$$5) \qquad \sin\frac{\varphi}{2} = \frac{\cos\frac{2}{p}R}{\sin\frac{2}{n}R}.$$

Tetraeder. — $n=3$, $p=3$; $\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{1}{2} : \frac{1}{2}\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$; $tg\,\frac{\varphi}{2} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{1}{2}}$;*) also $\frac{\varphi}{2} = 35^0\,16'$; $\varphi = 70^0\,32'$.

Anm. Durch einige Umformungen findet man aus 5) $\cos\varphi = \frac{1}{3}$, was auch direkt aus geometrischer Betrachtung folgt.

Oktaeder. — $n=3$, $p=4$; $\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{2} : \frac{1}{2}\sqrt{3} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$; $tg\,\frac{\varphi}{2} = \sqrt{2}$; also $\frac{\varphi}{2} = 54^0\,44'$; $\varphi = 109^0\,28'$.

Ikosaeder. — $n=3$, $p=5$; $\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$**) $: \frac{1}{2}\sqrt{3} = \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{3}}$; $tg\,\frac{\varphi}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{\sqrt{6-2\sqrt{5}}}$; also $\frac{\varphi}{2} = 69^0\,5{,}7'$; $\varphi = 138^0\,11{,}4'$.

Hexaeder. — $n=4$, $p=3$; $\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$; $tg\,\frac{\varphi}{2} = 1$; also $\frac{\varphi}{2} = 45^0$; $\varphi = 90^0$.

---

*) Wird $\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{p}{q}$ gesetzt, so ist $tg\,\frac{\varphi}{2} = \frac{p}{\sqrt{q^2-p^2}}$ (T. III, S. ).

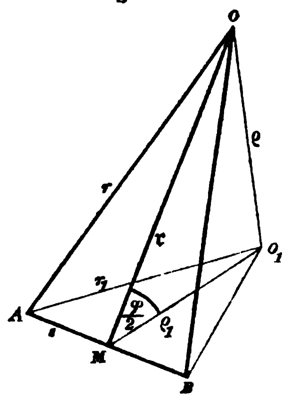
**) Aus T. III, 17 folgt $\sin 18^0 = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$; $\sin^2 18^0 = \frac{3-\sqrt{5}}{8}$; $\cos^2 18^0 = \frac{5+\sqrt{5}}{8}$; $\cos 36^0 = \cos^2 18^0 - \sin^2 18^0$.

**Dodekaeder.** — $n=5$, $p=3$; $\sin\frac{\varphi}{2}=\frac{1}{2}:\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}(5-\sqrt{5})}}$; $tg\frac{\varphi}{2}=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}(3-\sqrt{5})}}$; also $\frac{\varphi}{2}=58^0\,17'$; $\varphi=116^0\,34'$.

Anm. Durch einige Umformungen findet man aus 5) $\cos\varphi=-\frac{1}{5}\sqrt{5}$.

**99.** *Radien der zugehörigen Kugeln.* — Allgemeine Formeln. — Es sei in Fig. 50 $O$ die Spitze, $OO_1$ die Höhe der Bestimmungspyramide eines regelmässigen Polyeders, und $\overline{ABO_1}$ ein Bestimmungsdreieck der Grundfläche dieser Pyramide (der Seite des Polyeders). Dann sind $OA=r$, $OM=\mathfrak{r}$, $OO_1=\varrho$ der Reihe nach die Radien der Kugeln, welche durch die Eckpunkte, Mitten der Kanten und Mitten der Seiten des Polyeders gehen; ferner $O_1A=r_1$ und $O_1M=\varrho_1$ die Radien der Kreise, welche der Seite des Polyeders um- und einbeschrieben sind; endlich ist $AB=s$ eine Kante und $OMO_1=\frac{\varphi}{2}$ der halbe Flächenwinkel des Polyeders. Nun ist

Fig. 50.




$$r^2=r_1{}^2+\varrho^2;\quad \varrho=\varrho_1\,tg\frac{\varphi}{2};\quad \varrho_1{}^2=r_1{}^2-\frac{s^2}{4};$$

folglich durch Elimination von $\varrho$ und $\varrho_1$:

$$1)\qquad r^2=r_1{}^2+\left(r_1{}^2-\frac{s^2}{4}\right)tg^2\frac{\varphi}{2}.$$

Ferner $\quad 2)\quad \varrho^2=\left(r_1{}^2-\frac{s^2}{4}\right)tg^2\frac{\varphi}{2}\;(=r^2-r_1{}^2).$

Endlich $\quad \mathfrak{r}^2=\varrho^2+\varrho_1{}^2=\left(r_1{}^2-\frac{s^2}{4}\right)\left(1+tg^2\frac{\varphi}{2}\right)$

oder $\quad 3)\quad \mathfrak{r}^2=\frac{r_1{}^2-\frac{s^2}{4}}{\cos^2\frac{\varphi}{2}}\left(=\varrho^2+r_1{}^2-\frac{s^2}{4}\right).$

Für die von Dreiecken begrenzten Polyeder ist (T. III, Nr. 161)

$$s = r_1\sqrt{3};\quad r_1^2 = \frac{s^2}{3};$$

also:

$$1)\ r^2 = \frac{s^2}{3}\left(1 + \frac{1}{4}\,tg^2\frac{\varphi}{2}\right);\quad 2)\ \varrho^2 = r^2 - \frac{s^2}{3};\quad 3)\ \mathfrak{r}^2 = \varrho^2 + \frac{s^2}{12}.$$

Tetraeder. — $tg\frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{1}{2}};\quad r^2 = \frac{3s^2}{8};\quad r = \frac{s}{4}\sqrt{6};$

$$\varrho^2 = \frac{s^2}{24};\quad \varrho = \frac{s}{12}\sqrt{6};$$

$$\mathfrak{r}^2 = \frac{s^2}{8}\quad \mathfrak{r} = \frac{s}{4}\sqrt{2}.$$

Oktaeder. — $tg\frac{\varphi}{2} = \sqrt{2};\quad r^2 = \frac{s^2}{2};\quad r = \frac{s}{2}\sqrt{2};$

$$\varrho^2 = \frac{s^2}{6};\quad \varrho = \frac{s}{6}\sqrt{6};$$

$$\mathfrak{r}^2 = \frac{s^2}{4};\quad \mathfrak{r} = \frac{s}{2}.$$

Ikosaeder. — $tg\frac{\varphi}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{\sqrt{6-2\sqrt{5}}};$

$$tg^2\frac{\varphi}{2} = \frac{7+3\sqrt{5}}{2};$$

$$r^2 = \frac{s^2(5+\sqrt{5})}{8};\quad r = \frac{s}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}};$$

$$\varrho^2 = \frac{s^2}{24}(7+3\sqrt{5});\quad \varrho = \frac{s}{12}\sqrt{42+18\sqrt{5}};\text{*)}$$

$$\mathfrak{r}^2 = \frac{s^2}{8}(3+\sqrt{5});\quad \mathfrak{r} = \frac{s}{4}\sqrt{6+2\sqrt{5}}.$$

---

*) Mittelst T. I, 120a lässt sich der Wert $\varrho = \frac{s\sqrt{6}}{12}\sqrt{7+3\sqrt{5}}$ [illegible]ch auf die Form $\varrho = \frac{s\sqrt{3}}{12}(3+\sqrt{5})$ bringen, da nach jener Formel $\sqrt{7+\sqrt{4}}$[illegible]$5$ $= \sqrt{7+\sqrt{7^2-2^2}} = \frac{3+\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$ ist. Eine gleiche Vereinfachung gestattet [illegible]er [illegible]usdruck für $\mathfrak{r}$.

Für das von Vierecken begrenzte Polyeder ist

$$s = r_1\sqrt{2};\quad r_1^2 = \frac{s^2}{2};$$

also:

$$1)\ r^2 = \frac{s^2}{2}\left(1 + \frac{1}{2}\,tg^2\frac{\varphi}{2}\right);\quad 2)\ \varrho^2 = r^2 - \frac{s^2}{2};\quad 3)\ \mathfrak{r}^2 = \varrho^2 + \frac{s^2}{4}.$$

Hexaeder. — $tg\frac{\varphi}{2} = 1;\quad r^2 = \frac{3s^2}{4};\quad r = \frac{s}{2}\sqrt{3};$

$$\varrho^2 = \frac{s^2}{4};\quad \varrho = \frac{s}{2};$$

$$\mathfrak{r}^2 = \frac{s^2}{2};\quad \mathfrak{r} = \frac{s}{2}\sqrt{2}.$$

Für das von Fünfecken begrenzte Polyeder ist

$$s = r_1\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}};\quad r_1^2 = \frac{s^2(5+\sqrt{5})}{10};$$

also:

$$1)\ r^2 = \frac{s^2}{10}\left[5+\sqrt{5} + \frac{(5+2\sqrt{5})}{2}\,tg^2\frac{\varphi}{2}\right];\quad 2)\ \varrho^2 = r^2 - \frac{s^2(5+\sqrt{5})}{10};$$

$$3)\ \mathfrak{r}^2 = \varrho^2 + \frac{s^2(5+2\sqrt{5})}{20}.$$

Dodekaeder. — $tg\frac{\varphi}{2} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}(3-\sqrt{5})}};$

$$tg^2\frac{\varphi}{2} = \frac{3+\sqrt{5}}{2};$$

$$r^2 = \frac{3s^2(3+\sqrt{5})}{8};\qquad r = \frac{s}{4}\sqrt{18+6\sqrt{5}};$$

$$\varrho^2 = \frac{s^2}{40}(25+11\sqrt{5});\quad \varrho = \frac{s}{20}\sqrt{250+110\sqrt{5}};$$

$$\mathfrak{r}^2 = \frac{s^2}{8}(7+3\sqrt{5});\qquad \mathfrak{r} = \frac{s}{4}\sqrt{14+6\sqrt{5}}.$$

Anm. Man drücke umgekehrt die Kante $s$ jedes Polyeders durch ie Radien der zugehörigen Kugeln aus.

**100.** *Oberfläche.* — Allgemeine Formel. — Sei $m$ die Zahl der $n$-Ecke, welche ein regelmässiges Polyeder begrenzen,

so ist die Fläche des Bestimmungsdreiecks $\overline{AO_1B}$ eines dieser $n$-Ecke $\frac{s\varrho_1}{2}$; mithin die Gesamt-Oberfläche des Polyeders

$$f^2 = \frac{mns\varrho_1}{2}.$$

Für die von Dreiecken begrenzten Polyeder ist (nach voriger Nr.)

$$n = 3;\quad \varrho_1 = \sqrt{r_1^2 - \frac{s^2}{4}} = \frac{s}{6}\sqrt{3},$$

also

$$f^2 = \frac{ms^2}{4}\sqrt{3}.$$

Tetraeder. — $f^2 = s^2\sqrt{3}.$

Oktaeder. — $f^2 = 2s^2\sqrt{3}.$

Ikosaeder. — $f^2 = 5s^2\sqrt{3}.$

Für das von Vierecken begrenzte Polyeder ist

$$n = 4;\quad \varrho_1 = \sqrt{r_1^2 - \frac{s^2}{4}} = \frac{s}{2};$$

also

$$f^2 = ms^2.$$

Hexaeder. — $f^2 = 6s^2.$

Für das von Fünfecken begrenzte Polyeder ist

$$n = 5;\quad \varrho_1 = \sqrt{r_1^2 - \frac{s^2}{4}} = \frac{s}{10}\sqrt{25 + 10\sqrt{5}};$$

also

$$f^2 = \frac{ms^2}{4}\sqrt{25 + 10\sqrt{5}}.$$

Dodekaeder. — $f^2 = 3s^2\sqrt{25 + 10\sqrt{5}}.$

**101.** ***Volumen.*** — Nach 289 ist das Volumen eines regelmässigen Polyeders gleich $\frac{f^2\varrho}{3}$.

Tetraeder. — $f^2 = s^2\sqrt{3},\quad \varrho = \frac{s}{12}\sqrt{6}$; also

$$\mathfrak{V} = \frac{s^3}{12}\sqrt{2}.$$

Oktaeder. — $f^2 = 2s^2\sqrt{3},\quad \varrho = \frac{s}{6}\sqrt{6}$; also

$$\mathfrak{V} = \frac{s^3}{3}\sqrt{2}.$$

**Ikosaeder.** — $f^2 = 5s^2\sqrt{3}$, $\varrho = \frac{s}{12}\sqrt{3}(3+\sqrt{5})$; also

$$\mathfrak{V} = \frac{5s^3}{12}(3+\sqrt{5}).$$

**Hexaeder.** — $f^2 = 6s^2$, $\varrho = \frac{s}{2}$; also

$$\mathfrak{V} = s^3.$$

**Dodekaeder.** —

$$f^2 = 3s^2\sqrt{25+10\sqrt{5}};\quad \varrho = \frac{s}{20}\sqrt{250+110\sqrt{5}};\ \text{also}$$

$$\mathfrak{V} = \frac{s^3}{4}\sqrt{470+210\sqrt{5}}.\text{*)}$$

## 3) Krummflächige Körper.

### a) Der Cylinder.**)

**102.** *Oberfläche des Mantels. Der gerade Cylinder.* — Der gerade Cylinder ist nach Nr. 59 ein specieller Fall des geraden Prismas. Ist die Höhe des letzteren gleich $h$, seine Grundkanten gleich $a, b, c\ldots$, so ist die Oberfläche seiner Seitenflächen gleich $ah + bh + ch + \ldots = (a+b+c+\ldots)h$; d. h. gleich dem Produkt aus dem Umfang der Grundfläche und der Höhe. Hieraus folgt der Satz:

Die Mantelfläche eines geraden Cylinders ist 290.
gleich dem Produkt aus dem Umfang seiner Grundfläche und seiner Höhe.

Ist der Cylinder von einer gemeinen Cylinderfläche begrenzt, so ist der Umfang seiner Grundfläche gleich $2r\pi$, und die Mantelfläche wird durch die Formel ausgedrückt

$$f^2 = 2r\pi h. \tag{291.}$$

Anm. Die Mantelfläche eines geraden Cylinders ist also gleich einem Rechteck, dessen Seiten der Umfang seiner Grundfläche und seine Höhe sind.

Durchschneidet man die Mantelfläche mittelst einer Seitenlinie, so lässt sich der Mantel, ohne die Grösse seiner Oberfläche zu verändern, in

---

*) Mittelst T. I, 120a lässt sich der Wert $\mathfrak{V} = \frac{s^3\sqrt{10}}{4}\sqrt{47+21\sqrt{5}}$ nach auf die Form $\mathfrak{V} = \frac{s^3}{4}(15+7\sqrt{5})$ bringen, da nach jener Formel $\sqrt{47+21\sqrt{5}} = \sqrt{47+\sqrt{47^2-2^2}}$ ist.

**) Es ist im folgenden stets von Cylindern mit parallelen Grundflächen die Rede.

ein ebenes Rechteck aufrollen, dessen Grundlinie gleich dem Umfang der Grundfläche, dessen Höhe gleich der Höhe des Cylinders ist. Auch diese Betrachtung liefert den Satz 290.

Wendet man dasselbe Verfahren auf die Mantelfläche eines schiefen Cylinders an, so erhält man eine von zwei parallelen gleichlangen geraden Strecken ($AB$ und $A_1B_1$) und zwei kongruenten krummen Linien begrenzte Figur, welche mit dem Rechteck $\overline{ABB_1A_1}$ gleiche Fläche hat. Da $AB$ die Seitenlinie des Cylinders, und $AA_1$ gleich dem Umfange eines Normalschnittes ist, so hat man den Satz:

292. Die Mantelfläche eines schiefen Cylinders ist gleich dem Produkt aus dem Umfange seines Normalschnittes und seiner Seitenlinie.

Da beim schiefen Cylinder Grundfläche und Normalschnitt nicht gleichzeitig Kreise sein können, so kann die Mantelfläche des gemeinen schiefen Cylinders nicht elementar berechnet werden.

**103.** *Volumen.* — Aus 285 folgt:

293. Das Volumen jedes Cylinders ist gleich dem Produkte aus Grundfläche und Höhe.

Beim gemeinen Cylinder ist der Inhalt der Grundfläche gleich $r^2\pi$, und sein Volumen wird daher durch die Formel ausgedrückt:

294. $$\mathfrak{V} = r^2\pi h.$$

### b) Der Kegel.*)

**104.** *Oberfläche des Mantels. Der gerade Kegel.* — Der gerade Kegel ist nach Nr. 47 ein specieller Fall der geraden Pyramide. Ist die Höhe einer Seitenfläche der letzteren gleich $h$, ihre Grundkanten gleich $a, b, c, \ldots$, so ist die Oberfläche ihrer Seitenflächen gleich $\frac{ah}{2}+\frac{bh}{2}+\frac{ch}{2}+\ldots=(a+b+c+\ldots)\frac{h}{2}$; d. h. gleich dem halben Produkte aus dem Umfang der Grundfläche und der Höhe der Seitenflächen. Da die letztere beim Uebergang in den Kegel sich in die Seitenlinie des letzteren verwandelt, so hat man den Satz:

295. Die Mantelfläche eines geraden Kegels ist gleich dem halben Produkt aus dem Umfang des Grundkreises und der Seitenlinie.

In Formel ausgedrückt:

296. $$\mathfrak{f}^2 = r\pi s.$$

Anm. Die Mantelfläche eines geraden Kegels ist also gleich einem Dreieck, dessen Grundlinie der Umfang des Grundkreises, dessen Höhe die Seitenlinie ist.

Durchschneidet man die Mantelfläche mittelst einer Seitenlinie, so lässt sich der Mantel, ohne die Grösse seiner Oberfläche zu verändern in

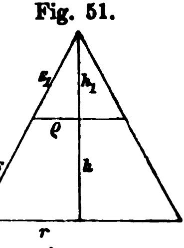
---

*) Es ist im folgenden stets vom gemeinen Kegel die Rede.

einen ebenen Kreissektor aufrollen, dessen Bogen gleich dem Umfang des Grundkreises, dessen Radius gleich der Seitenlinie ist. Auch diese Betrachtung liefert den Satz 295 (nach T. II, 374).

Wendet man dasselbe Verfahren auf die Mantelfläche eines schiefen Kegels an, so erhält man eine von zwei sich schneidenden gleichlangen geraden Strecken (*OA* und *OB*) und einer krummen Linie begrenzte Figur, deren Fläche sich weder durch Stücke des Kegels ausdrücken noch elementar berechnen lässt.

Fig. 51.




**105.** *Der gerade Kegelstumpf.* — Die Mantelfläche eines geraden Kegelstumpfes ist gleich der Differenz der Mantelflächen zweier gerader Kegel. Wenn $s$, $r$, $\varrho$ der Reihe nach die Seitenlinie und die Radien der Grundkreise des Kegelstumpfes bedeuten, $s_1$ die Seitenlinie des Ergänzungskegels (Fig. 51), so ist hiernach die Mantelfläche des Kegelstumpfes

$$f^2 = r\pi(s + s_1) - \varrho\pi s_1 = r\pi s + \pi s_1(r - \varrho).$$

Nun ist $$\frac{s + s_1}{s_1} = \frac{r}{\varrho}, \text{ oder } \frac{s}{s_1} = \frac{r - \varrho}{\varrho}$$

oder $$s_1(r - \varrho) = \varrho s,$$

also, wenn man diesen Wert oben einsetzt:

$$f^2 = r\pi s + \varrho\pi s = (r + \varrho)\pi s; \qquad 297.$$

d. h.: Die Mantelfläche eines geraden Kegelstumpfes ist gleich dem Produkt aus dem arithmetischen Mittel der Peripherieen seiner Grundkreise und der Seitenlinie. 298.

Anm. Mit welchem Kegel hat hiernach der Kegelstumpf gleiche Mantelfläche? — Aufrollung der Mantelfläche analog wie in voriger Nr. Für $\varrho = r$ geht 297 in 291 über, für $\varrho = 0$ in 296.

**106.** *Volumen. — Der gemeine Kegel.* — Aus 287 folgt:

Das Volumen jedes Kegels ist gleich dem dritten Teile des Produktes aus Grundfläche und Höhe. 299.

Beim gemeinen Kegel ist der Inhalt der Grundfläche gleich $r^2\pi$, und sein Volumen wird daher durch die Formel ausgedrückt:

$$\mathfrak{V} = \frac{r^2\pi h}{3}. \qquad 300.$$

**107.** *Der gemeine Kegelstumpf.* — Aus 288 folgt:

Das Volumen jedes Kegelstumpfes ist gleich dem dritten Teile des Produktes aus seiner Höhe und der Summe seiner Grundflächen und des geometrischen Mittels derselben. 301.

Beim gemeinen Kegelstumpf sind die Grundflächen gleich $r^2\pi$ und $\varrho^2\pi$, ihr geometrisches Mittel gleich $\sqrt{r^2\pi \cdot \varrho^2\pi} = r\varrho\pi$; sein Volumen wird daher durch die Formel ausgedrückt:

302. $$\mathfrak{V} = \frac{h\pi}{3}(r^2 + r\varrho + \varrho^2).$$

Anm. Mit welchem Kegel hat hiernach der Kegelstumpf gleiches Volumen? — Für $\varrho = r$ geht 302 in 294 über, für $\varrho = 0$ in 300. — Zwischen $s$, $h$, $r$, $\varrho$ besteht die Formel $s^2 = h^2 + (r - \varrho)^2$. —

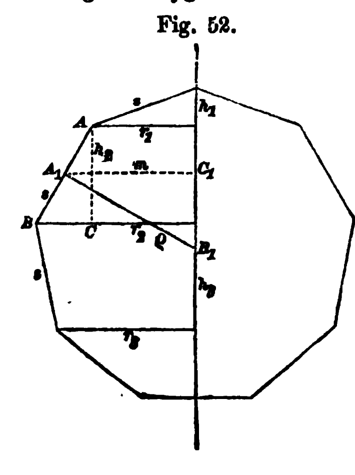
### c) Rotationskörper.

**108.** *Vorbemerkung.* — Nach Nr. 74 lässt sich jeder durch Umdrehung eines Polygons entstehende Rotationskörper als Summe von Kegelstumpfen (bezw. Kegeln und Cylindern) darstellen. Es kann daher auch Oberfläche und Volumen eines solchen Körpers mit Hilfe der in Nr. 102—107 gegebenen Formeln gefunden werden. — Wir betrachten im folgenden nur solche Körper, welche durch Umdrehung eines regelmässigen Polygons entstehen, weil für diese Körper noch besonders einfache Formeln abgeleitet werden können. — Es sind dabei zwei Hauptfälle zu unterscheiden: 1) Rotation um eine durch den Mittelpunkt und eine Ecke gehende Axe, 2) Rotation um eine die Figur nicht schneidende Axe.

#### I. Rotation um eine durch den Mittelpunkt und eine Ecke gehende Axe.

**109.** *Oberfläche des Rotationskörpers.* — Macht ein regelmässiges Polygon eine halbe Umdrehung um eine durch den Mittelpunkt und eine Ecke gehende Axe, so besteht die Oberfläche des Rotationskörpers im allgemeinen aus den Mantelflächen von Kegelstumpfen.

Fig. 52.




Anm. Hierzu treten, wenn die Seitenzahl des Polygons $4n$ ist, zwei Kegelflächen, von denen eine, wenn die Seitenzahl $2n+1$ ist, in eine ebene Kreisfläche übergeht (Fig. 52), und zu welchen, wenn die Seitenzahl $2n \cdot 2$ ist, noch eine Cylinderfläche tritt. [illegible] jedoch alle diese Flächen als speci[illegible] Fälle der Mantelfläche des Kegelstum[illegible] angesehen werden können, so gen[illegible] es, die letztere allein zu betrachten.

Sei $AB = s$ eine Seite [illegible] Polygons und $r_1$ und $r_2$ die [illegible]

ihren Endpunkten auf die Drehungsaxe gefällten Senkrechten, so ist die von $s$ beschriebene Kegelstumpffläche (nach 297)

$$f_2{}^2 = (r_1 + r_2)\pi s,$$

oder, wenn $A_1C_1 = m$ die Mittellinie des aus $r_1$, $s$, $r_2$ gebildeten Trapezes, also $m = \frac{r_1 + r_2}{2}$ ist,

$$f_2{}^2 = 2m\pi s.$$

Ist ferner $A_1B_1 = \varrho$ der kleine Radius des Polygons, und $AC = h_2$ die Höhe des Trapezes, so folgt aus der Aehnlichkeit der Dreiecke $\overline{ABC}$ und $\overline{A_1B_1C_1}$:

$$\frac{s}{h_2} = \frac{\varrho}{m}, \text{ oder } ms = \varrho h_2.$$

Dies oben eingesetzt, giebt:

$$f_2{}^2 = 2\varrho\pi h_2. \qquad 303.$$

Die Oberfläche des ganzen Rotationskörpers ist hiernach

$$f^2 = 2\varrho\pi(h_1 + h_2 + \ldots .).$$

Anm. Die Formel 303 kann für den Kegel direkt ebenso wie für den Kegelstumpf abgeleitet werden. Für den Cylinder stimmt sie mit 291 überein.

Ist $r$ der grosse Radius des Polygons, so ist bei gerader Seitenzahl desselben

$$h_1 + h_2 + \ldots = 2r,$$

also

$$f^2 = 4r\varrho\pi. \qquad 304.$$

Bei ungerader Seitenzahl ist

$$h_1 + h_2 + \ldots = r + \varrho,$$

also zunächst $f^2 = 2\varrho\pi(r + \varrho)$. Hierzu tritt noch die Fläche des ebenen Kreises, die als Mantelfläche eines Kegels mit der Höhe 0 in der Formel nicht mitbegriffen ist, mit dem Werte $\frac{s^2}{4}\pi$, so dass im ganzen

$$f^2 = \left[2\varrho(r + \varrho) + \frac{s^2}{4}\right]\pi \qquad 305.$$

ist.

Anm. Dreht sich ein regelmässiges Polygon von gerader Seitenzahl um seinen kleinen (statt um seinen grossen) Durchmesser, so ist in 303 $h_2 = 2\varrho$ zu setzen und $2 \cdot \frac{s^2}{4}\pi = \frac{s^2}{2}\pi$ zu addieren. Man erhält also

$$f^2 = \left(4\varrho^2 + \frac{s^2}{2}\right)\pi. \qquad 3'$$

**110.** *Oberfläche der Kugel.* — Geht das regelmässige Polygon durch unendliche Verdoppelung seiner Seitenzahl in einen Kreis über, so verwandelt sich der von ihm beschriebene Rotationskörper in eine Kugel, und da in diesem Falle $\varrho = r$ ist, so folgt für die Oberfläche der Kugel aus 304 der Ausdruck

307. $$f^2 = 4r^2\pi.$$

Anm. Die Oberfläche der Kugel ist also, da $4r^2\pi = 2r\pi \cdot 2r$ ist, nach 291 gleich der Mantelfläche des der Kugel umbeschriebenen geraden Cylinders. — Da die Kugelfläche nicht durch Bewegung einer Geraden entstanden ist, so lässt sie sich auch nicht in eine Ebene aufrollen.

Aus 307 folgt noch der Satz:

308. Bei der Halbkugel ist die krumme Fläche doppelt so gross als die ebene.

**111.** *Kugelzone und Kugelkappe.* — Betrachtet man nur eine Kegelstumpffläche des Rotationskörpers, so geht dieselbe bei unendlicher Verdoppelung der Seitenzahl in eine Kugelzone (oder, wenn es eine der Kegelflächen war, in eine Kugelkappe) über, und man erhält für die krumme Oberfläche der Kugelzone oder Kugelkappe aus 303 den Ausdruck

309. $$f^2 = 2r\pi h,$$

worin $r$ den Kugelradius, $h$ die Höhe der Zone oder Kappe bedeutet. — Aus 309 folgt:

310. Zonen und Kappen derselben Kugel haben bei gleicher Höhe auch gleiche Oberfläche.

**112.** *Kugelzweieck.* — Ist $\alpha$ der Centriwinkel eines Kugelzweiecks, so ist nach 83

311. $$\frac{f^2}{4r^2\pi} = \frac{\alpha}{4R}, \text{ oder } f^2 = r^2\pi \cdot \frac{\alpha}{R}.$$

**113.** *Kugeldreieck.* — Es seien $\alpha$, $\beta$ und $\gamma$ die Winkel eines Kugeldreiecks. Vervollständigt man die Seiten desselben zu grössten Kreisen, so entstehen (entsprechend den drei Nebenecken der zu dem Kugeldreieck gehörigen Ecke) drei Nebendreiecke, welche mit dem gegebenen Dreieck der Reihe nach Kugelzweiecke mit den Centriwinkeln $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ bilden. Sind nun $f^2$, $f_1^2$, $f_2^2$, $f_3^2$ der Reihe nach die Oberflächen des g gebenen Dreiecks und seiner Nebendreiecke, und setzt man zu Abkürzung

$$1)\quad \frac{r^2\pi}{R} = z^2,$$

so folgt aus 311:

$$2)\quad f^2 + f_1^2 = \alpha z^2,\ f^2 + f_2^2 = \beta z^2,\ f^2 + f_3^2 = \gamma z^2;$$

folglich durch Addition:

$$3) \quad 3f^2 + f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 = (\alpha + \beta + \gamma) z^2.$$

Setzt man nun für eins der Nebendreiecke, z. B. $f_3^2$ das mit ihm symmetrische Scheiteldreieck (99), so sieht man, dass die vier Dreiecke zusammen die Fläche einer Halbkugel bilden. Es ist also

$$4) \quad f^2 + f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 = 2r^2\pi = 2Rz^2 \text{ [nach 1)]},$$

und, wenn man diesen Wert in 3) einsetzt:

$$2f^2 + 2Rz^2 = (\alpha + \beta + \gamma) z^2,$$

oder

$$f^2 = \frac{(\alpha+\beta+\gamma-2R)z^2}{2} = \frac{(\alpha+\beta+\gamma-2R)r^2\pi}{2R}. \quad 312.$$

Anm. Die Grösse $\alpha + \beta + \gamma - 2R$ heisst der sphärische Excess des Kugeldreiecks. — Berechnung der Oberfläche eines Kugelpolygons durch Zerlegung in Dreiecke. Specieller Fall des regelmässigen Polygons, insbesondere der zu den Seiten eines regelmässigen Polyeders gehörigen regelmässigen Polygone.

Schreibt man 312 in der Form $\frac{f^2}{r^2\pi} = \frac{(\alpha + \beta + \gamma - 2R)}{2R}$, so wird für $r = \infty$ die linke Seite gleich Null; also muss auch $\alpha + \beta + \gamma = 2R$ sein; d. h.: für das ebene Dreieck gilt der bekannte Satz der Winkelsumme, für den hierdurch ein neuer Beweis erbracht ist.

Das Volumen eines Rotationskörpers, welcher durch die oben vorausgesetzte Rotation entstanden ist, lässt sich nicht durch eine einfache Formel ausdrücken. Das Volumen der Kugel wird von einem anderen Gesichtspunkte aus gefunden.

**114.** *Volumen der Kugel.* — Von einem der Kugel umbeschriebenen Polyeder kann man durch Tangentenebenen Pyramiden abschneiden, und so das Volumen des Polyeders beständig verringern. Denkt man sich dieses Verfahren ins Unendliche fortgesetzt, so nähert sich das Volumen des Polyeders dem der Kugel als Grenze; mithin gilt der Satz 289 auch für die Kugel, und liefert die Formel

$$\mathfrak{B} = \frac{4r^2\pi \, . \, r}{3},$$

oder

$$\mathfrak{B} = \frac{4}{3} r^3\pi. \quad 313.$$

**115.** *Kugelkegel.* — Betrachtet man nur einen Teil der Oberfläche des Polyeders und legt durch die Grenzkanten dieses Teils und den Kugelmittelpunkt Ebenen, so begrenzen dieselben einen aus Pyramiden bestehenden Körper, dessen Volumen ebenfalls gleich dem dritten Teile des Produktes aus der Summe der Grundflächen und dem Kugelradius ist. Das

oben beschriebene Verfahren liefert dann einen Kugelkegel. Ist die krumme Fläche desselben eine Kugelkappe, so ist sein Volumen nach 289 und 309:

314. $$\mathfrak{V} = 2r\pi h \cdot \frac{r}{3} = \frac{2}{3} r^2 \pi h.$$

Hierin ist $h$ die Höhe der zu dem Kugelkegel gehörigen Kappe.

Ist $\alpha$ der Centriwinkel des Kugelkegels, so ist die Höhe des Kegels, welcher die Kugelkappe zum Kugelkegel ergänzt,

$$r - h = r \cdot \cos \frac{\alpha}{2},$$

woraus folgt

$$h = r\left(1 - \cos \frac{\alpha}{2}\right) = 2r \cdot \sin^2 \frac{\alpha}{4} \quad \text{(T. III, 43).}$$

Setzt man diesen Wert in 314 ein, so folgt:

$$\mathfrak{V} = \frac{4}{3} r^3 \pi \cdot \sin^2 \frac{\alpha}{4}.$$

315. Anm. Für $h = 2r$ geht 314, und für $\alpha = 4R$ geht 315 in 313 über.

**116.** *Kugelkappe.* — Ihr Volumen ist die Differenz zwischen dem eines Kugelkegels (314) und dem eines Kegels, in welchem die Höhe gleich $(r - h)$, der Radius der Grundfläche gleich $\sqrt{r^2 - (r-h)^2} = \sqrt{(2r-h)h}$ ist. Das Volumen des Kegels ist also (300) $\frac{(2r-h)h(r-h)\pi}{3}$, und das der Kugelkappe

$$\mathfrak{V} = \frac{2r^2\pi h}{3} - \frac{(2r-h)h(r-h)\pi}{3} = \frac{h\pi}{3}\left[2r^2 - (2r-h)(r-h)\right]$$

oder

$$\mathfrak{V} = \frac{1}{3}\pi h^2 (3r - h).$$

316. Hat die Grundfläche der Kugelkappe den Radius $\varrho$, so ist

$$\varrho^2 + (r-h)^2 = r^2,$$

316a. woraus folgt: $$r = \frac{\varrho^2 + h^2}{2h}.$$

Setzt man diesen Wert in 316 ein, so folgt:

317. $$\mathfrak{V} = \frac{1}{6}\pi h (3\varrho^2 + h^2).$$

Anm. Für $h = 2r$ geht 316 in 313, für $\varrho = h = r$ geht 317 in das Volumen der Halbkugel über.

**117.** *Kugelzone.* — Ihr Volumen ist die Differenz zwischen der ganzen Kugel und der Summe der beiden Kugelkappen, welche sie zur ganzen Kugel ergänzen. Ist $h$ die Höhe der Kugelzone, und $k$ die Höhe der einen Kugelkappe, so ist $k_1 = 2r - h - k$ die Höhe der andern Kugelkappe, und

$$\mathfrak{V} = \frac{4}{3} r^3\pi - \frac{1}{3}\pi k^2(3r-k) - \frac{1}{3}\pi k_1{}^2(3r-k_1)$$
$$= \frac{\pi}{3}\left[4r^3 - 3r(k^2+k_1{}^2) + (k^3+k_1{}^3)\right].$$

Nun ist

$$k^2 + k_1{}^2 = (k+k_1)^2 - 2kk_1,$$
$$k^3 + k_1{}^3 = (k+k_1)^3 - 3kk_1(k+k_1);$$

also

$$\mathfrak{V} = \frac{\pi}{3}\left[4r^3 - 3r(k+k_1)^2 + 6rkk_1 + (k+k_1)^3 - 3kk_1(k+k_1)\right]$$
$$= \frac{\pi}{3}\left[4r^3 + (k+k_1)^2(k+k_1-3r) + 3kk_1\big(2r-(k+k_1)\big)\right],$$

oder, da $k + k_1 = 2r - h$ ist:

$$\mathfrak{V} = \frac{\pi}{3}\left[4r^3 - (2r-h)^2(r+h) + 3kk_1h\right],$$

oder $$\mathfrak{V} = \frac{\pi}{3}\left[h^2(3r-h) + 3kk_1h\right] = \frac{1}{3}\pi h^2(3r-h) + \pi hkk_1. \qquad 318.$$

Anm. Das Volumen einer Kugelzone ist also um die Grösse $\pi hkk_1$ grösser als dasjenige der gleichhohen Kugelkappe (316).

Sind $\varrho$ und $\varrho_1$ die Radien der Grundflächen der Kugelzone, so ist zunächst (316a)

$$\varrho^2 = 2rk - k^2, \quad \varrho_1{}^2 = 2rk_1 - k_1{}^2;$$

also
$$\varrho^2 + \varrho_1{}^2 = 2r(k+k_1) - (k^2+k_1{}^2)$$
$$= 2r(k+k_1) - (k+k_1)^2 + 2kk_1$$
$$= (k+k_1)[2r-(k+k_1)] + 2kk_1$$
$$= (k+k_1)h + 2kk_1 = (2r-h)h + 2kk_1.$$

Ferner
$$\frac{3(\varrho^2+\varrho_1{}^2)+h^2}{2} = (3r-h)h + 3kk_1.$$

Setzt man diesen Wert in 318 ein, so folgt:

$$\mathfrak{V} = \frac{1}{6}\pi h[3(\varrho^2+\varrho_1{}^2)+h^2]. \qquad 319.$$

Anm. Für $k$ oder $k_1 = 0$ geht 318 in 316, für $\varrho_1 = 0$ geht 319 in 317 über.

**118.** *Kugelzweieck.* — Nach Nr. 115 ist das Volumen eines von einem Kugelzweieck begrenzten Ausschnittes gleich dem dritten Teile des Produktes aus seiner Oberfläche und dem Kugelradius, also nach 311

320. $$\mathfrak{V} = r^2\pi \cdot \frac{\alpha}{R} \cdot \frac{r}{3} = \frac{1}{3} r^3\pi \cdot \frac{\alpha}{R}.$$

Anm. Für $\alpha = 4R$ geht 320 in 313 über.

**119.** *Kugeldreieck.* — Analog wie in voriger Nr. ist das Volumen eines von einem Kugeldreieck begrenzten Ausschnittes nach 312

321. $$\mathfrak{V} = (\alpha + \beta + \gamma - 2R)\frac{r^2\pi}{2R} \cdot \frac{r}{3} = \frac{1}{3} r^3\pi \cdot \frac{\alpha+\beta+\gamma-2R}{2R}.$$

Anm. Ist $\gamma = 2R$, so geht das Kugeldreieck in ein Zweieck über. Dann ist $\beta = \alpha$, und 321 geht in 320 über. Durch welche Annahmen geht also 321 in 313 über?

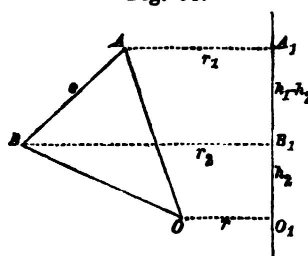
### 2. Rotation um eine die Figur nicht schneidende Axe.

**120.** *Oberfläche des Rotationskörpers.* — Macht ein regelmässiges Polygon eine ganze Umdrehung um eine seine Fläche nicht schneidende Axe, so besteht die Oberfläche des Rotationskörpers im allgemeinen aus den Mantelflächen von Kegelstumpfen.

Anm. Ist eine Seite des Polygons der Axe parallel, so beschreibt sie eine Cylinderfläche; steht sie auf der Axe senkrecht, einen durch die Differenz zweier Kreisflächen gebildeten ebenen Ring.

Sei $AB = s$ eine Seite des Polygons und $r_1$ und $r_2$ die aus ihren Endpunkten auf die Drehungsaxe gefällten Senkrechten, so ist die von $s$ beschriebene Kegelstumpffläche (nach 297)

Fig. 53.




$$f_2{}^2 = (r_1 + r_2)\pi s.$$

Ebenso für die folgenden Polygonseiten

$$f_3{}^2 = (r_2 + r_3)\pi s$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$f_1{}^2 = (r_n + r_1)\pi s;$$

also die Gesamtoberfläche des Rotationskörpers

$$f^2 = 2\pi s\,(r_1 + r_2 + \ldots + r_n).$$

Wenn nun der Abstand des Mittelpunktes ($O$) des Polygons von der Drehungsaxe mit $r$ bezeichnet wird, so ist

$$r_1 + r_2 + \ldots + r_n = nr,\text{*)}$$

mithin

$$f^2 = 2nr\pi s.$$ 322.

Da $ns$ der Umfang des rotirenden Polygons und $2r\pi$ die von seinem Mittelpunkte beschriebene Kreislinie ist, so drückt die letzte Formel den Satz aus:

323. Dreht sich ein regelmässiges Polygon um eine seine Fläche nicht schneidende Axe, so ist die Oberfläche des Rotationskörpers gleich dem Produkte aus dem Umfange des Polygons und der von seinem Mittelpunkte beschriebenen Kreislinie.

Anm. Dieser Satz gilt auch für jede Drehung des Polygons, die nicht gleich $4R$ ist; denn die Oberfläche des Rotationskörpers ist dem vom Mittelpunkte des Polygons beschriebenen Bogen proportional. Rückt in diesem letzteren Falle die Drehungsaxe in unendliche Entfernung, so verwandelt sich die Drehung in eine Verschiebung längs einer zur Ebene des Polygons senkrechten Geraden; der Rotationskörper verwandelt sich in ein gerades regelmässiges Prisma, und die Formel 322, in welcher man $2r\pi$ durch $h$ zu ersetzen hat, geht über in $f^2 = ns \,.\, h = n \,.\, sh$, und drückt, wie man sieht, die Summe der Seitenflächen dieses Prismas aus.

Geht das rotierende Polygon in einen Kreis über, dessen Radius $\varrho$ ist, so erhält man für die Oberfläche des durch Rotation eines Kreises um eine seine Fläche nicht schneidende Axe entstehenden Körpers die Formel

$$f^2 = 4r\varrho\pi^2.$$ 324.

Anm. Der im letzten Falle entstehende Körper hat die Gestalt eines Ringes mit kreisförmigem Querschnitt. Die ihn begrenzende krumme Fläche hat die Eigenschaft, dass sie nicht durch jede in sich zurückkehrende Linie, die auf ihrer Oberfläche gezogen wird, in zwei getrennte Teile zerfällt. Hierzu sind z. B. zwei Querschnitte nötig. Aus diesem Grunde nennt man die Fläche **zweifach zusammenhängend**. Welches wird hiernach das Merkmal einer einfach (oder mehrfach) zusammenhängenden Fläche sein? — Uebertragung dieses Begriffes auf Linien. — Die Fläche hat die weitere Eigenschaft, dass sie von einer Geraden in 0, 2 oder 4 Punkten geschnitten wird. Man suche weitere Eigenschaften der Fläche.

---

*) Bezeichnet man die Mittellinien der durch $AB$, $BC$, .. gebildeten Trapeze der Reihe nach mit $m_1$, $m_2$, ..., so ist $r_1 + r_2 = 2m_1$, $r_2 + r_3 = 2m_2$, ... $r_n + r_1 = 2m_n$; also durch Addition $2(r_1 + r_2 + \ldots + r_n) = 2(m_1 + m_2 + \ldots + m_n)$; d. h.: Beschreibt man in ein regelmässiges $n$-Eck durch Verbindung der Mitten je zweier benachbarter Seiten ein neues regelmässiges $n$-Eck, so ist die Summe der Abstände der Ecken von einer beliebigen Geraden für beide Polygone dieselbe. Denkt man sich die Konstruktion ins Unendliche fortgesetzt, so nähert sich das Polygon dem Punkt $O$ als Grenze, und die Summe der Abstände dem Werte $nr$, welcher, da die Summe der Abstände unverändert bleibt, dieser Summe gleich sein muss. — Einfacher lässt sich die Formel ableiten, wenn $n$ eine gerade Zahl ist.

**121.** *Volumen des Rotationskörpers.* — Das Volumen des durch die in Nr. 120 vorausgesetzte Rotation entstehenden Körpers ist gleich der Summe der Volumina, welche durch Rotation der einzelnen Bestimmungsdreiecke des Polygons entstehen. Nun ist in Fig. 53 das Bestimmungsdreieck $\overline{AOB}$ gleich der algebraischen Summe dreier Trapeze, nämlich

$$\overline{AOB} = \overline{AA_1B_1B} + \overline{BB_1O_1O} - \overline{AA_1O_1O},$$

mithin auch das Volumen $\mathfrak{B}_1$ des durch Rotation von $\overline{AOB}$ entstehenden Körpers gleich der algebraischen Summe der Volumina der durch Rotation jener Trapeze entstehenden Kegelstumpfe. Es ist also nach 302

$$\mathfrak{B}_1 = \frac{\pi}{3}\left[(h_1 - h_2)(r_1^2 + r_1r_2 + r_2^2) + h_2(r^2 + rr_2 + r_2^2) - h_1(r^2 + rr_1 + r_1^2)\right]$$

$$= \frac{\pi}{3}\left[r^2(h_2 - h_1) + r(h_2r_2 - h_1r_1) + (h_1r_2 - h_2r_1)(r_1 + r_2)\right].$$

Ferner ist die Fläche $f^2$ des Dreiecks $\overline{AOB}$ nach obiger Formel ausgedrückt durch

$$2f^2 = (r_1 + r_2)(h_1 - h_2) + (r + r_2)h_2 - (r + r_1)h_1$$

$$= r(h_2 - h_1) + (h_1r_2 - h_2r_1).$$

Multipliziert man beide Seiten dieser Formel mit $r + (r_1 + r_2)$, so folgt:

$$2f^2(r + r_1 + r_2) = r^2(h_2 - h_1) + r(h_2r_2 - h_1r_1) + (h_1r_2 - h_2r_1)(r_1 + r_2).$$

Ersetzt man in der obigen Formel für $\mathfrak{B}_1$ den Klammerausdruck rechts durch seinen aus der letzten Formel folgenden Wert, so erhält man

$$\mathfrak{B}_1 = \frac{2f^2\pi}{3}(r + r_1 + r_2).$$

Ebenso für die übrigen Bestimmungsdreiecke:

$$\mathfrak{B}_2 = \frac{2f^2\pi}{3}(r + r_2 + r_3)$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\mathfrak{B}_n = \frac{2f^2\pi}{3}(r + r_n + r_1).$$

Addiert man alle diese Ausdrücke, und berücksichtigt, daß (wie oben)

$$r_1 + r_2 + \ldots + r_n = nr$$

ist, so erhält man

$$\mathfrak{V} = \mathfrak{V}_1 + \mathfrak{V}_2 + \ldots + \mathfrak{V}_n = \frac{2f^2\pi}{3}(nr + nr + nr);$$

d. h.: $$\mathfrak{V} = 2r\pi \,.\, nf^2.$$ 325.

Da $nf^2$ die Fläche des rotierenden Polygons und $2r\pi$ die von seinem Mittelpunkte beschriebene Kreislinie ist, so drückt die letzte Formel den Satz aus:

Dreht sich ein regelmässiges Polygon um eine seine Fläche nicht schneidende Axe, so ist das Volumen des Rotationskörpers gleich dem Produkte aus der Fläche des Polygons und der von seinem Mittelpunkte beschriebenen Kreislinie. 326.

Anm. Man stelle analoge Betrachtungen an wie in der Anm. zu 323.

Geht das rotierende Polygon in einen Kreis über, dessen Radius $\varrho$ ist, so erhält man für das Volumen des durch Rotation eines Kreises um eine seine Fläche nicht schneidende Axe entstehenden Körpers die Formel:

$$\mathfrak{V} = 2r\varrho^2\pi^2.$$ 327.

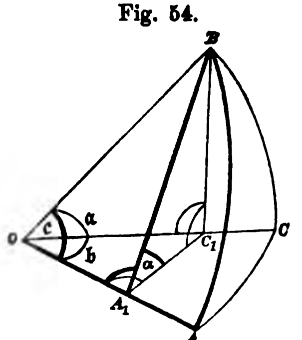
# Sphärische Trigonometrie.

**122.** *Vorbemerkung.* — Nach Nr. 38 ist durch jede dreiseitige Ecke ein Kugeldreieck, und durch jedes Kugeldreieck eine dreiseitige Ecke bestimmt. Da nun nach 102 die letztere durch drei ihrer Stücke bestimmt ist, so findet dasselbe auch mit dem Kugeldreieck statt. Und ebenso, wie es die Aufgabe der ebenen Trigonometrie ist, aus drei gegebenen Stücken eines ebenen Dreiecks die übrigen zu berechnen, so ist es die Aufgabe der sphärischen Trigonometrie, aus drei gegebenen Stücken eines Kugeldreiecks die übrigen zu bestimmen. — Da die Winkelsumme eines Kugeldreiecks ebenso wie die einer Ecke keine feste Grösse hat, so ist hier nicht, wie in der ebenen Trigonometrie, durch zwei Winkel des Dreiecks der dritte bestimmt. Andrerseits lassen sich von den sechs möglichen Fällen der Bestimmung eines Kugeldreiecks (s. Nr. 33) drei auf die übrigen mittelst des Satzes 110 zurückführen. — Wir nehmen im folgenden an, dass die gegebenen Winkel konkave seien. Für konvexe Winkel sind nur (nach T. III, 31) die Vorzeichen einiger Funktionen zu ändern.

## I. Das rechtwinklige Kugeldreieck.

**123.** *Formeln.* — Sei $O$ der Kugelmittelpunkt (Fig. 54), $A$, $B$ und $C$ die Eckpunkte eines rechtwinkligen Kugeldreiecks, dessen Seiten mit $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$, dessen Winkel mit $\alpha$, $\beta$ und $\gamma$ bezeichnet seien. Es sei ferner $\gamma = R$, so dass $\overline{OBC} \perp \overline{OAC}$. — Fällt man dann $BA_1 \perp OA$, $BC_1 \perp OC$ und zieht $A_1C_1$, so ist $BC_1 \perp \overline{AOC}$ (53) also auch $BC_1 \perp A_1C_1$. Ferner ist $A_1C_1$ der Neigungsschenkel der zur Ebene $\overline{AOC}$ schiefen Strecke $BA_1$. Daher ist nach der Umkehrung von 65 auch $A_1C_1 \perp OA$. Da ausserdem $BA_1 \perp OA$,

Fig. 54.



so ist $BA_1C_1$ der Neigungswinkel der Ebenen $\overline{BOA}$ und $\overline{COA}$, d. h. $BA_1C_1 = \alpha$. Nun ist

$$\sin \mathfrak{a} = \frac{BC_1}{OB} = \frac{BA_1 \sin \alpha}{OB} = \sin \mathfrak{c} \,.\, \sin \alpha,$$

also 1) $\sin \alpha = \frac{\sin \mathfrak{a}}{\sin \mathfrak{c}}$; $\sin \beta = \frac{\sin \mathfrak{b}}{\sin \mathfrak{c}}$.*) 328.

Ferner $\cos \mathfrak{a} = \frac{OC_1}{OB} = \frac{A_1C_1}{\sin \mathfrak{b}} : \frac{A_1B}{\sin \mathfrak{c}} = \frac{A_1C_1}{A_1B} : \frac{\sin \mathfrak{b}}{\sin \mathfrak{c}}$.

also (nach 1b)

2) $\cos \mathfrak{a} = \frac{\cos \alpha}{\sin \beta}$; $\cos \mathfrak{b} = \frac{\cos \beta}{\sin \alpha}$. 329.

Dividirt man endlich 1a) durch die aus 2a) folgende Formel

$$\cos \alpha = \cos \mathfrak{a} \,.\, \sin \beta,$$

so folgt: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{tg} \mathfrak{a}}{\sin \mathfrak{c} \sin \beta}$,

oder mit Rücksicht auf 1b)

3) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{tg} \mathfrak{a}}{\sin \mathfrak{b}}$; $\operatorname{tg} \beta = \frac{\operatorname{tg} \mathfrak{b}}{\sin \mathfrak{a}}$. 330.

Aus 3) folgt

$$\sin \mathfrak{b} = \frac{\operatorname{tg} \mathfrak{a}}{\operatorname{tg} \alpha}.$$

Da $\mathfrak{b} < 2R$, so ist $\sin \mathfrak{b}$ stets positiv, d. h. $\operatorname{tg} \mathfrak{a}$ und $\operatorname{tg} \alpha$ sind stets gleichzeitig positiv oder negativ, folglich $\mathfrak{a}$ und $\alpha$ stets gleichzeitig spitz oder stumpf. D. h.:

Im rechtwinkligen Kugeldreieck ist jede Kathete mit dem gegenüberliegenden Winkel stets gleichzeitig $< R$ oder $> R$. 331.

Ferner folgt aus Fig. 54:

$$\cos \mathfrak{c} = \frac{OA_1}{OB} = (OC_1 \,.\, \cos \mathfrak{b}) : \frac{OC_1}{\cos \mathfrak{a}},$$

folglich $\cos \mathfrak{c} = \cos \mathfrak{a} \,.\, \cos \mathfrak{b}$. 332.

Sind nun $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ gleichzeitig spitz oder stumpf, so ist $\cos \mathfrak{c}$ positiv, d. h. $\mathfrak{c}$ spitz. Ist dagegen von den beiden Stücken das eine spitz, das andre stumpf, so ist $\cos \mathfrak{c}$ negativ, d. h. $\mathfrak{c}$ stumpf. Also:

*) Denn man kann offenbar gleichzeitig $\mathfrak{a}$ mit $\mathfrak{b}$ und $\alpha$ mit $\beta$ vertauschen.

333. **Im rechtwinkligen Kugeldreieck ist die Hypotenuse $< R$, wenn beide Katheten $< R$ oder beide $> R$ sind, andernfalls ist sie $> R$.**

Anm. Rückt der Mittelpunkt der Kugel in unendliche Entfernung, während die Punkte $A, B, C$ fest bleiben, so geht das Kugeldreieck in ein ebenes Dreieck über, dessen Winkel die Winkel $\alpha, \beta, \gamma$, dessen Seiten $(a, b, c)$ die (nunmehr geradlinig gewordenen) Bogen der Winkel $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ sind. Da die Kugelradien $OA$, $OB$, $OC$ einander parallel werden, so sind die Winkel $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ sämmtlich Null. Nun ist nach T. III, 47

$$a = \frac{\pi}{2R}\,\mathfrak{a};$$

daher nach T. III, 53

$$\cos \mathfrak{a} = 1 - \frac{a^2}{2!} + \frac{a^4}{4!} - \frac{a^6}{6!} + \ldots = 1 - \left(\frac{\pi}{2R}\right)^2 \frac{\mathfrak{a}^2}{2!} + \left(\frac{\pi}{2R}\right)^4 \frac{\mathfrak{a}^4}{4!} - \ldots$$

$$\frac{\sin a}{a} = 1 - \frac{a^2}{3!} + \frac{a^4}{5!} - \frac{a^6}{7!} + \ldots = 1 - \left(\frac{\pi}{2R}\right)^2 \frac{\mathfrak{a}^2}{3!} + \left(\frac{\pi}{2R}\right)^4 \frac{\mathfrak{a}^4}{5!} - \ldots$$

Setzt man nun $\mathfrak{a} = 0$, so folgt:

$$\cos a = 1, \quad \sin a = a.$$

Dasselbe Resultat ergiebt sich aus folgender Betrachtung: Rückt $O$ in unendliche Entfernung, so bilden $OB$ und $OC$ mit den in $B$ und $C$ gezogenen Tangenten, daher im Grenzfalle mit der Geraden $BC$ selbst rechte Winkel. Es fällt also zuletzt $BC_1$ mit $BC$, d. h. Punkt $C_1$ mit $C$ zusammen. Nun ist, wenn $BC$ durch den Kugelradius gemessen wird,

$$\cos a = \frac{OC_1}{OC}; \quad \sin a = \frac{BC_1}{OC}; \quad \frac{\sin a}{a} = \frac{BC_1}{OC} : \frac{BC}{OC},$$

also im Grenzfalle

$$\cos a = \frac{OC}{OC} = 1; \quad \frac{\sin a}{a} = \frac{BC}{OC} : \frac{BC}{OC} = 1.$$

Setzt man diese Werte in den Formeln 1) bis 3) ein, so erhält man die Formeln des rechtwinkligen ebenen Dreiecks:

$$1)\ \sin \alpha = \frac{a}{c}; \quad 2)\ \cos \alpha = \sin \beta; \quad 3)\ \operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}.$$

**124.** *Anwendung der Formeln.* — Die Formeln 1) bis 3) der vorigen Nr. reichen aus, um in jedem Falle aus zwei gegebenen Stücken des rechtwinkligen Kugeldreiecks die drei übrigen zu berechnen. Im ganzen kann man folgende sechs Aufgaben stellen:

| | Gegeben: | Gesucht: | Formeln: |
|---|---|---|---|
| 1. | $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}$ | $\alpha\,\beta\,c$ | 3a, 3b, 1. |
| 2. | $\mathfrak{a}\,\alpha$ | $b\,\beta\,c$ | 3a, 3b, 1. |
| 3. | $\mathfrak{a}\,\beta$ | $b\,\alpha\,c$ | 3b, 3a, 1. |
| 4. | $\alpha\,\beta$ | $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}$ | 2, 3b, 1. |
| 5. | $\mathfrak{a}\,\mathfrak{c}$ | $\alpha\,b\,\beta$ | 1a, 3a, 3b. |
| 6. | $\alpha\,c$ | $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\beta$ | 1a, 3a, 3b. |

Anm. Es genügen also mit Ausnahme des Falles 4, der in der ebenen Trigonometrie kein Gegenstück hat, die Formeln 1) und 3), also auch die Funktionen *sin* und *tg* zur Berechnung des Dreiecks. — Werden die Stücke $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\alpha$, $\beta$ aus ihrer Sinusfunktion berechnet, so geht aus dem Satze 331 hervor, ob der spitze oder der stumpfe Winkel zu nehmen ist. Nur im Falle 2 bleibt die Zweideutigkeit bestehen, da weder $\mathfrak{b}$ noch $\beta$ gegeben ist, also beide Stücke entweder als spitze oder als stumpfe Winkel berechnet werden können. Die Entscheidung über die Grösse von $\mathfrak{c}$ erfolgt jedesmal durch den Satz 333. — Was findet statt, wenn zwischen den gegebenen Stücken folgende Beziehungen bestehen? 1) $\mathfrak{a} > \alpha$, 2) $\mathfrak{a} = \alpha$, 3) $\mathfrak{a} = \mathfrak{c} = R$? — Zurückführung des gleichschenkligen Kugeldreiecks auf das rechtwinklige durch einen den Winkel an der Spitze halbierenden Diametralkreis.

Zu den gesuchten Stücken kann auch die **Fläche** des Dreiecks gehören. Da sich nun um dieselbe Ecke beliebig viele Kugelflächen beschreiben lassen, aus denen Dreiecke ausgeschnitten werden, welche in den Seiten und Winkeln übereinstimmen, aber verschiedene Grösse (bei gleicher Gestalt) haben, so muss zur Berechnung der Fläche eines Kugeldreiecks noch der Kugelradius $r$ gegeben sein. Alsdann folgt für das rechtwinklige Kugeldreieck aus 312 die Formel

$$f^2 = \frac{(\alpha + \beta - R) r^2 \pi}{2R}.$$

Anm. Sind $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}_1$ die Seiten und $\alpha_1$, $\beta_1$, $\gamma_1$ die Winkel des Polardreiecks, so folgt aus 110, dass $\mathfrak{c}_1 = R$ (da $\gamma + \mathfrak{c}_1 = 2R$ ist). Im Polardreieck des rechtwinkligen Kugeldreiecks ist also eine Seite gleich $R$. Ferner erhält man, wenn man in allen Formeln der Nr. 123 und 124 die griechischen mit den deutschen Buchstaben vertauscht und den *cos*- und *tg*-Funktionen entgegengesetztes Vorzeichen giebt, neue Formeln, welche für dieses rechtseitige Polardreieck gelten (T. III, 29).

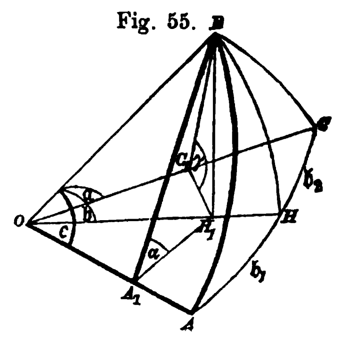
## II. Das schiefwinklige Kugeldreieck.

### 1. Erste Methode.

#### a. Geometrisches Verfahren.

**125.** *Der Sinussatz.* — Es seien $OA$, $OB$, $OC$ die Strecken, welche die Ecken eines schiefwinkligen Kugeldreiecks $\overline{ABC}$ (Fig. 55) mit dem Kugelmittelpunkte verbinden. Legt man dann durch $OB$ die Ebene $\overline{OBH}$ senkrecht zu $OAC$, so entstehen die beiden bei $H$ rechtwinkligen Kugeldreiecke $\overline{BAH}$ und $\overline{BCH}$. Wird dann der zu der ge-

Fig. 55.



meinsamen Seite *BH* gehörige Winkel *BOH* mit $\mathfrak{h}$ bezeichnet, so ist nach 328

$$\sin \alpha = \frac{\sin \mathfrak{h}}{\sin \mathfrak{c}}, \quad \sin \gamma = \frac{\sin \mathfrak{h}}{\sin \mathfrak{a}},$$

folglich durch Division beider Formeln:

334. $$(1) \quad \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} = \frac{\sin \mathfrak{a}}{\sin \mathfrak{c}}.$$

Ebenso würde man mittelst der durch *OA* zu $\overline{OCB}$ senkrecht gelegten Ebene erhalten:

$$(2) \quad \frac{\sin \gamma}{\sin \beta} = \frac{\sin \mathfrak{c}}{\sin \mathfrak{b}}.$$

Endlich erhält man durch Multiplikation der Formeln (1) und (2):

$$(3) \quad \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{\sin \mathfrak{a}}{\sin \mathfrak{b}}.$$

Diese drei Formeln (Sinusformeln) enthalten zusammen den Satz (Sinussatz):

335. Die Sinus der Seiten eines Kugeldreiecks verhalten sich wie die Sinus ihrer Gegenwinkel.

Anm. Ist einer der an *AC* anliegenden Winkel, z. B. $\gamma > R$, so enthält das Dreieck $\overline{BHC}$ nicht $\gamma$, sondern den Winkel $(2R - \gamma)$. Da aber $\sin(2R - \gamma) = \sin \gamma$ ist, so bleibt der Satz auch für das stumpfwinklige Dreieck in Geltung.

Sind von einem Kugeldreieck die Stücke $\mathfrak{a}\mathfrak{b}\alpha$ oder $\alpha\beta\mathfrak{a}$ gegeben, so kann man mittelst der Formeln zu 334 $\beta$ bezw. $\mathfrak{b}$ berechnen, nicht aber $\mathfrak{c}$ und $\gamma$. Der Sinussatz allein reicht also in keinem Falle zur vollständigen Berechnung des Dreiecks aus.

**126.** *Der Cosinussatz.* — Betrachtet man in Fig. 54 das Kugeldreieck $\overline{ABC}$ als schiefwinklig, so sind die Winkel $BC_1O$ und $BC_1A_1$ nicht mehr rechte, wohl aber $BA_1O$ und $C_1A_1O$.

Dann ist nach T. III, 78 in den schiefwinkligen Dreiecken

$$\overline{BC_1O}: \quad BC_1^2 = OC_1^2 + OB^2 - 2\,OC_1 \,.\, OB \,.\cos \mathfrak{a}$$
$$\overline{BC_1A_1}: \quad BC_1^2 = A_1C_1^2 + A_1B^2 - 2\,A_1C_1 \,.\, A_1B \,.\cos \alpha.$$

Durch Subtraktion erhält man hieraus

$$0 = (OC_1^2 - A_1C_1^2) + (OB^2 - A_1B^2) - 2OC_1 \,.\, OB \,.\cos \mathfrak{a} + 2A_1C_1 \,.\, A_1B \,.\cos \alpha,$$

oder, wenn man hieraus $\cos \mathfrak{a}$ bestimmt und die Klammern durch ihren aus den rechtwinkligen Dreiecken folgenden gemeinsamen Wert $OA_1^2$ ersetzt:

$$\cos \mathfrak{a} = \frac{OA_1^2 + A_1C_1 \,.\, A_1B \,.\, \cos \alpha}{OC_1 \,.\, OB},$$

oder
$$\cos \mathfrak{a} = \frac{OA_1}{OC_1} \,.\, \frac{OA_1}{OB} + \frac{A_1C_1}{OC_1} \,.\, \frac{A_1B}{OB} \,.\, \cos \alpha,$$

oder 1) $\cos \mathfrak{a} = \cos \mathfrak{b} \,.\, \cos \mathfrak{c} + \sin \mathfrak{b} \,.\, \sin \mathfrak{c} \,.\, \cos \alpha.$ 336.

Zwei weitere Formeln von gleicher Gestalt erhält man hieraus durch Vertauschung der Buchstaben. Alle zusammen enthalten den Satz (Cosinussatz):

337. Der Cosinus einer Seite des Kugeldreiecks ist gleich dem Produkte der Cosinus der anderen Seiten, vermehrt um das Produkt aus den Sinus dieser Seiten und dem Cosinus des von ihnen eingeschlossenen Winkels.

Anm. Man untersuche die Formel des Cosinussatzes für die Fälle $\alpha = 0$, $R$, $2R$.

Sind $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}_1$ die Seiten und $\alpha_1$, $\beta_1$, $\gamma_1$ die Winkel des Polardreiecks, so folgt aus 110, dass

$$\cos \mathfrak{a} = -\cos \alpha_1, \quad \sin \mathfrak{a} = \sin \alpha_1,$$
$$\cos \alpha = -\cos \mathfrak{a}_1, \quad \sin \alpha = \sin \mathfrak{a}_1,$$

während analoge Formeln für die übrigen Seiten und Winkel gelten. Setzt man diese Werte in 336 ein, und kehrt dann alle Vorzeichen um, so folgt (mit Weglassung der Indices)

2) $\cos \alpha = -\cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cos \mathfrak{a},$ 338.

nebst zwei entsprechenden, durch Vertauschung der Buchstaben entstehenden Formeln.

Anm. Wie lautet die in den Formeln 2) enthaltene zweite Form des Cosinussatzes?

Die Formeln 1) und 2), jede in dreifacher Gestalt aufgestellt, reichen aus, um in jedem Falle aus drei gegebenen Stücken des Kugeldreiecks die drei übrigen zu berechnen.

Im ganzen kann man folgende sechs Aufgaben stellen:

| | Gegeben: | Gesucht: | Formeln: |
|---|---|---|---|
| 1. | $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}$ | $\alpha\,\beta\,\gamma$ | 1a, 1b, 1c. |
| 2. | $\alpha\,\beta\,\gamma$ | $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}$ | 2a, 2b, 2c. |
| 3. | $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\gamma$ | $\mathfrak{c}\,\alpha\,\beta$ | 1c, 1a, 1b. |
| 4. | $\alpha\,\beta\,\mathfrak{c}$ | $\gamma\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}$ | 2c, 2a, 2b. |
| 5. | $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\alpha$ | $\mathfrak{c}\,\beta\,\gamma$ | 1a, 1b, 1c. |
| 6. | $\alpha\,\beta\,\mathfrak{a}$ | $\gamma\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}$ | 2a, 2b, 2c. |

Anm. In den Fällen 5 und 6 würden die Formeln 1a und 2a noch einer Umgestaltung bedürfen, da sie $c$, bezw. $\gamma$ in zwei verschiedenen Funktionen enthalten. Diese Umgestaltung, sowie die Untersuchung über die Zahl der Lösungen in den Fällen 5 und 6, wird hier übergangen, da die Formeln des Cosinussatzes im folgenden durch andere, zur Berechnung mehr geeignete, ersetzt werden sollen.

### b. Algebraisches Verfahren.

**127.** *Gemeinsamer Ursprung des Sinus- und Cosinussatzes.* — Bezeichnet man in dem Kugeldreieck $\overline{ABC}$ (Fig. 55) die Abschnitte $AH$ und $HC$ mit $\mathfrak{b}_1$, bezw. $\mathfrak{b}_2$, die gegenüberliegenden Winkel mit $\beta_1$ und $\beta_2$, so ist zunächst für das rechtwinklige Kugeldreieck $\overline{ABH}$

$$\sin \mathfrak{b}_1 = \sin \beta_1 \,.\, \sin \mathfrak{c} \quad (328),$$

$$\cos \mathfrak{b}_1 = \frac{\cos \mathfrak{c}}{\cos \mathfrak{a}} \quad (332),$$

also durch Division:

$$tg\, \mathfrak{b}_1 = tg\, \mathfrak{c} \,.\, \cos \mathfrak{a} \,.\, \sin \beta_1,$$

oder, da nach 329 $\cos \mathfrak{a} \,.\, \sin \beta_1 = \cos \alpha$ ist:

$$tg\, \mathfrak{b}_1 = tg\, \mathfrak{c} \,.\, \cos \alpha.$$

Ebenso erhält man für das Dreieck $\overline{CBH}$

$$tg\, \mathfrak{b}_2 = tg\, \mathfrak{a} \,.\, \cos \gamma,$$

daher nach T. III. 36

$$tg\,(\mathfrak{b}_1 + \mathfrak{b}_2) = tg\, \mathfrak{b} = \frac{tg\, \mathfrak{a} \,.\, \cos \gamma + tg\, \mathfrak{c} \,.\, \cos \alpha}{1 - tg\, \mathfrak{c} \,.\, tg\, \mathfrak{a} \,.\, \cos \gamma \,.\, \cos \alpha},$$

oder

1) $tg\, \mathfrak{b} = tg\, \mathfrak{c} \,.\, \cos \alpha + tg\, \mathfrak{a} \,.\, \cos \gamma + tg\, \mathfrak{a} \,.\, tg\, \mathfrak{b} \,.\, tg\, \mathfrak{c} \,.\, \cos \alpha \,.\, \cos \gamma.$

Hieraus gehen durch Vertauschung der Buchstaben noch zwei andere Gleichungen hervor. Aus diesen drei Gleichungen lassen sich durch Elimination die Formeln des Sinussatzes und des Cosinussatzes ableiten. — Dividirt man 1) durch $tg\, \mathfrak{a} \,.\, tg\, \mathfrak{b} \,.\, tg\, \mathfrak{c}$, so folgt:

$$(\cot \mathfrak{a} \,.\, \cot \mathfrak{c}) = \cos \alpha \,.\, (\cot \mathfrak{a} \,.\, \cot \mathfrak{b}) + \cos \gamma\, (\cot \mathfrak{b} \,.\, \cot \mathfrak{c}) + \cos \alpha \,.\, \cos \gamma,$$

oder, wenn man

2) $$\begin{cases} \cot \mathfrak{b} \,.\, \cot \mathfrak{c} = x, & \cot \mathfrak{c} \,.\, \cot \mathfrak{a} = y, & \cot \mathfrak{a} \,.\, \cot \mathfrak{b} = z, \\ \cos \alpha = a, & \cos \beta = b, & \cos \gamma = c \end{cases}$$

setzt, und zur Herstellung einer zweiten und einer dritten Gleichung die Buchstaben vertauscht:

$$3)\quad \begin{cases} y = az + cx + ac, \\ z = bx + ay + ba, \\ x = cy + bz + cb. \end{cases}$$

Hieraus folgt:

$$x = \frac{(b + ca)(c + ab)}{1 - 2abc - a^2 - b^2 - c^2},$$

oder, wenn man

$$4)\quad \begin{cases} a + bc = a_1,\ b + ca = b_1,\ c + ab = c_1, \\ 1 - 2abc - a^2 - b^2 - c^2 = d^2 \text{ *)} \end{cases}$$

setzt, und, um $y$ und $z$ zu finden, die Buchstaben vertauscht:

$$5)\quad x = \frac{b_1 c_1}{d^2},\quad y = \frac{c_1 a_1}{d^2},\quad z = \frac{a_1 b_1}{d^2}.$$

Hieraus folgt weiter:

$$\frac{xy}{z} = \frac{b_1 c_1{}^2 a_1 d^2}{a_1 b_1 d^4} = \frac{c_1{}^2}{d^2},$$

oder, wenn man $x$, $y$, $z$ durch die Werte 2) ersetzt:

$$6)\quad \cot^2 \mathfrak{c} = \frac{c_1{}^2}{d^2}.$$

Hieraus folgt weiter:

$$7)\quad \sin^2 \mathfrak{c} = \frac{d^2}{c_1{}^2 + d^2};\quad \sin^2 \mathfrak{a} = \frac{d^2}{a_1{}^2 + d^2};\quad \sin^2 \mathfrak{b} = \frac{d^2}{b_1{}^2 + d^2};$$

$$8)\quad \cos^2 \mathfrak{c} = \frac{c_1{}^2}{c_1{}^2 + d^2};\quad \cos^2 \mathfrak{a} = \frac{a_1{}^2}{a_1{}^2 + d^2};\quad \cos^2 \mathfrak{b} = \frac{b_1{}^2}{b_1{}^2 + d^2}.$$

Nun ist nach 4)

$$\begin{aligned} c_1{}^2 + d^2 &= c^2 + 2abc + a^2b^2 + 1 - 2abc - a^2 - b^2 - c^2 \\ &= 1 - a^2 - b^2 + a^2b^2 = (1 - a^2)(1 - b^2); \end{aligned}$$

also nach 2)

$$9)\quad c_1{}^2 + d^2 = \sin^2 \alpha \,.\, \sin^2 \beta;\quad a_1{}^2 + d^2 = \sin^2 \beta \,.\, \sin^2 \gamma;\quad b_1{}^2 + d^2 = \sin^2 \gamma \,.\, \sin^2 \alpha.$$

Durch Einsetzung dieser Werte in 7) und Elimination von $d^2$ folgt:

$$\sin^2 \mathfrak{c} \,.\, \sin^2 \alpha \,.\, \sin^2 \beta = \sin^2 \mathfrak{a} \,.\, \sin^2 \beta \,.\, \sin^2 \gamma = \sin^2 \mathfrak{b} \,.\, \sin^2 \gamma \,.\, \sin^2 \alpha \;(= d^2),$$

daher durch Radizierung (wobei überall die positiven Zeichen zu nehmen sind, weil alle Winkel konkav sind):

*) Dass $1 - 2abc - a^2 - b^2 - c^2$ positiv ist, also dem Quadrate einer reellen Zahl gleichgesetzt werden kann, folgt aus 6).

$$\sin \mathfrak{c} \,.\, \sin\alpha \,.\, \sin\beta = \sin \mathfrak{a} \,.\, \sin\beta \,.\, \sin\gamma = \sin \mathfrak{b} \,.\, \sin\gamma \,.\, \sin\alpha \;(= d),$$

oder, indem man durch $\sin\alpha \sin\beta \sin\gamma$ dividiert:

$$10)\qquad \frac{\sin \mathfrak{c}}{\sin\gamma} = \frac{\sin \mathfrak{a}}{\sin\alpha} = \frac{\sin \mathfrak{b}}{\sin\beta} \left(= \frac{d}{\sin\alpha \sin\beta \sin\gamma}\right),$$

wodurch die Formeln des Sinussatzes hergestellt sind.

Anm. Die Grösse $\frac{d}{\sin\alpha \sin\beta \sin\gamma}$ heisst der **Modulus** des Dreiecks und entspricht der Grösse $2r$ in der ebenen Trigonometrie.

Setzt man andrerseits die Werte 9) in 8) ein, so folgt mit Berücksichtigung von 4)

$$\cos^2 \mathfrak{c} = \frac{(c + ab)^2}{\sin^2\alpha \sin^2\beta}; \quad \cos \mathfrak{c} = \frac{c + ab}{\sin\alpha \sin\beta},$$

oder mit Rücksicht auf 2)

$$11)\qquad \cos \mathfrak{c} = \frac{\cos\gamma + \cos\alpha \,.\, \cos\beta}{\sin\alpha \,.\, \sin\beta}$$

nebst zwei entsprechenden Formeln für $\cos \mathfrak{a}$ und $\cos \mathfrak{b}$. Alle drei stimmen mit den zweiten Formeln des Cosinussatzes (338) überein.

Anm. Das in dieser Nr. auseinandergesetzte algebraische Verfahren zur Ableitung des Sinus- und des Cosinussatzes entspricht genau dem in der ebenen Trigonometrie (T. III, Nr. 49) beschriebenen. Und die Formel 1) oben geht in die Formel 2) jener Nr. über, wenn die Kugelfläche in eine Ebene übergeht, da alsdann, wie oben gefunden, $tg\,\mathfrak{b}$ durch $b$, $tg\,\mathfrak{a}$ durch $a$, $tg\,\mathfrak{c}$ durch $c$ zu ersetzen ist, während das Produkt $tg\,\mathfrak{a} \,.\, tg\,\mathfrak{b} \,.\, tg\,\mathfrak{c}$ gegenüber jedem einzelnen seiner Faktoren verschwindet.

## 2. Zweite Methode.

**128.** *Vorbemerkung.* — Während die Formeln des Cosinussatzes, wie oben gezeigt, zur Berechnung des Kugeldreiecks in allen sechs Fällen ausreichen, sind sie andrerseits zur logarithmischen Berechnung ungeeignet, und sollen daher im folgenden diesem Zwecke gemäss auf doppelte Weise umgeformt werden.

**129.** *Die Cosinusformeln.* *) — Durch Addition der Formeln (336)

$$\cos \mathfrak{a} = \cos \mathfrak{b} \,.\, \cos \mathfrak{c} + \sin \mathfrak{b} \,.\, \sin \mathfrak{c} \,.\, \cos\alpha$$
$$\cos \mathfrak{b} = \cos \mathfrak{a} \,.\, \cos \mathfrak{c} + \sin \mathfrak{a} \,.\, \sin \mathfrak{c} \,.\, \cos\beta$$

---

*) Diese Formeln werden gewöhnlich Nepersche Analogieen genannt.

folgt

$$(\cos \mathfrak{a} + \cos \mathfrak{b})(1 - \cos \mathfrak{c}) = \sin \mathfrak{c}\,(\sin \mathfrak{b} . \cos \alpha + \sin \mathfrak{a} . \cos \beta),$$

oder nach T. III 46, 43, 40, wenn

(1) $$\frac{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}}{2} = \mathfrak{s}, \quad \frac{\mathfrak{a}-\mathfrak{b}}{2} = \mathfrak{d}; \quad \frac{\alpha+\beta}{2} = \sigma, \quad \frac{\alpha-\beta}{2} = \delta$$

gesetzt wird:

$$2 \cos \mathfrak{s} . \cos \mathfrak{d} . 2 \sin^2 \frac{\mathfrak{c}}{2} = 2 \sin \frac{\mathfrak{c}}{2} . \cos \frac{\mathfrak{c}}{2} (\sin \mathfrak{b} . \cos \alpha + \sin \mathfrak{a} . \cos \beta),$$

oder durch Division mit $2 . \sin \frac{\mathfrak{c}}{2} . \cos \frac{\mathfrak{c}}{2}$:

$$2 \cos \mathfrak{s} . \cos \mathfrak{d} . tg \frac{\mathfrak{c}}{2} = \sin \mathfrak{b} . \cos \alpha + \sin \mathfrak{a} . \cos \beta.$$

Ersetzt man hierin $\sin \mathfrak{b}$ durch seinen Wert $\frac{\sin \mathfrak{a} . \sin \beta}{\sin \alpha}$ (334, 3), so folgt:

$$2 \cos \mathfrak{s} . \cos \mathfrak{d} . tg \frac{\mathfrak{c}}{2} = \frac{\sin \mathfrak{a}}{\sin \alpha} (\sin \beta \cos \alpha + \sin \alpha \cos \beta),$$

oder

(2) $$2 \cos \mathfrak{s} . \cos \mathfrak{d} . tg \frac{\mathfrak{c}}{2} = \frac{\sin \mathfrak{a}}{\sin \alpha} . \sin (\alpha + \beta) = \frac{\sin \mathfrak{a}}{\sin \alpha} . 2 \sin \sigma . \cos \sigma.$$

Nun folgt aus 334, 3):

$$\frac{\sin \mathfrak{a}}{\sin \alpha} = \frac{\sin \mathfrak{a} \pm \sin \mathfrak{b}}{\sin \alpha \pm \sin \beta};$$

also für das obere Zeichen:

(3a) $$\frac{\sin \mathfrak{a}}{\sin \alpha} = \frac{2 \sin \mathfrak{s} . \cos \mathfrak{d}}{2 \sin \sigma . \cos \delta},$$

für das untere:

(3b) $$\frac{\sin \mathfrak{a}}{\sin \alpha} = \frac{2 \cos \mathfrak{s} . \sin \mathfrak{d}}{2 \cos \sigma . \sin \delta}.$$

Setzt man 3a) in 2) ein, so folgt:

$$2 \cos \mathfrak{s} . \cos \mathfrak{d} . tg \frac{\mathfrak{c}}{2} = \frac{\sin \mathfrak{s} . \cos \mathfrak{d}}{\sin \sigma . \cos \delta} . 2 \sin \sigma . \cos \sigma,$$

oder, indem man beiderseits durch $2 \cos \mathfrak{s} . \cos \mathfrak{d}$ dividiert:

(4a) $$tg \frac{\mathfrak{c}}{2} = tg\, \mathfrak{s} . \frac{\cos \sigma}{\cos \delta}.$$ 339.

Setzt man dagegen 3b) in 2) ein, so folgt:

$$2 \cos \mathfrak{s} \cdot \cos \mathfrak{d} \cdot tg \frac{\mathfrak{c}}{2} = \frac{\cos \mathfrak{s} \cdot \sin \mathfrak{d}}{\cos \sigma \cdot \sin \delta} \cdot 2 \sin \sigma \cdot \cos \sigma,$$

oder, indem man beiderseits durch $2 \cos \mathfrak{s} \cdot \cos \mathfrak{d}$ dividiert:

340. (4b)
$$tg \frac{\mathfrak{c}}{2} = tg\, \mathfrak{d} \cdot \frac{\sin \sigma}{\sin \delta}.$$

Aus 110 folgt:

$$\frac{\mathfrak{c}}{2} + \frac{\gamma_1}{2} = R, \quad \mathfrak{s} + \sigma_1 = 2R, \quad \mathfrak{d} = -\delta_1,$$
$$\sigma + \mathfrak{s}_1 = 2R, \quad \delta = -\mathfrak{d}_1,$$

wobei

$$\mathfrak{s}_1 = \frac{\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{b}_1}{2}, \quad \mathfrak{d}_1 = \frac{\mathfrak{a}_1 - \mathfrak{b}_1}{2}, \quad \sigma_1 = \frac{\alpha_1 + \beta_1}{2}, \quad \delta_1 = \frac{\alpha_1 - \beta_1}{2}$$

gesetzt ist.

Daher ist

$$tg \frac{\mathfrak{c}}{2} = \cot \frac{\gamma_1}{2}, \quad tg\, \mathfrak{s} = -tg\, \sigma_1, \quad \cos \sigma = -\cos \mathfrak{s}_1, \quad \cos \delta = \cos \mathfrak{d}_1,$$
$$tg\, \mathfrak{d} = -tg\, \delta_1, \quad \sin \sigma = \sin \mathfrak{s}_1, \quad \sin \delta = -\sin \mathfrak{d}_1.$$

Setzt man diese Werte in 4a) und 4b) ein, so erhält man nach Weglassung der Indices:

(5)
$$\cot \frac{\gamma}{2} = tg\, \sigma \cdot \frac{\cos \mathfrak{s}}{\cos \mathfrak{d}}; \quad \cot \frac{\gamma}{2} = tg\, \delta \cdot \frac{\sin \mathfrak{s}}{\sin \mathfrak{d}}.$$

Anm. Setzt man die beiden Werte von $tg \frac{\mathfrak{c}}{2}$ in 4a) und 4b), oder die beiden Werte von $\cot \frac{\gamma}{2}$ in 5) einander gleich, so folgt

$$\frac{tg\, \sigma}{tg\, \delta} = \frac{tg\, \mathfrak{s}}{tg\, \mathfrak{d}},$$

eine Formel, welche dem Tangentialsatze der ebenen Trigonometrie entspricht, und in denselben übergeht, wenn die Kugelfläche in eine Ebene übergeht.

**130.** *Anwendung der Sinus- und Cosinusformeln.* — Dieselben dienen zur Lösung der Aufgaben $\mathfrak{a}\mathfrak{b}\alpha$, $\alpha\beta\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}\mathfrak{b}\gamma$, $\alpha\beta\mathfrak{c}$.

Aufgabe 1. — Ein Kugeldreieck zu berechnen aus zwei Seiten und einem nicht eingeschlossenen Winkel. ($\mathfrak{a}\mathfrak{b}\alpha$)

Lösung: 1) $\sin \beta = \dfrac{\sin \mathfrak{b} \cdot \sin \alpha}{\sin \mathfrak{a}}$;

2) $\sigma = \dfrac{\alpha + \beta}{2}, \quad \delta = \dfrac{\alpha - \beta}{2}, \quad \mathfrak{s} = \dfrac{\mathfrak{a} + \mathfrak{b}}{2}, \quad \mathfrak{d} = \dfrac{\mathfrak{a} - \mathfrak{b}}{2}$;

3) $tg \dfrac{\mathfrak{c}}{2} = tg\, \mathfrak{d} \cdot \dfrac{\sin \sigma}{\sin \delta}$; 4) $\cot \dfrac{\gamma}{2} = tg\, \delta \cdot \dfrac{\sin \mathfrak{s}}{\sin \mathfrak{d}}$.

Anm. Da die Bedingungen für die Anzahl der Lösungen beim Kugeldreieck dieselben sind wie bei der zugehörigen Ecke, so ist nach 106 und den diesem Satze vorangehenden Bemerkungen die Zahl der Lösungen gleich

$$\begin{array}{llll} 0 \text{ oder } 2, & \text{wenn } \mathfrak{a} > \mathfrak{b} & \text{und } \mathfrak{a} + \mathfrak{b} > 2R, \\ 1, \left\{ \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right. & \begin{array}{l} \text{„} \quad \mathfrak{a} > \mathfrak{b} \\ \text{„} \quad \mathfrak{a} < \mathfrak{b} \end{array} & \begin{array}{l} \text{„} \quad \mathfrak{a} + \mathfrak{b} < 2R, \\ \text{„} \quad \mathfrak{a} + \mathfrak{b} > 2R, \end{array} \\ 0 \text{ oder } 2, & \text{„} \quad \mathfrak{a} < \mathfrak{b} & \text{„} \quad \mathfrak{a} + \mathfrak{b} < 2R. \end{array}$$

Die Bedingung für eine Lösung kann auch so ausgedrückt werden, dass $\mathfrak{a}$ zwischen $\mathfrak{b}$ und $2R - \mathfrak{b}$ liegen muss. — Ob 0 oder 2 Lösungen vorhanden sind, hängt davon ab, ob $\sin\beta >$ oder $< 1$ gefunden wird.

Aufgabe 2. — Ein Kugeldreieck zu berechnen aus einer Seite, einem anliegenden und dem gegenüberliegenden Winkel. $(\alpha\beta\mathfrak{a})$

Lösung: 1) $\sin\mathfrak{b} = \dfrac{\sin\beta \cdot \sin\mathfrak{a}}{\sin\alpha}$;

2) $\mathfrak{s} = \dfrac{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}}{2}$, $\mathfrak{d} = \dfrac{\mathfrak{a}-\mathfrak{b}}{2}$, $\sigma = \dfrac{\alpha+\beta}{2}$, $\delta = \dfrac{\alpha-\beta}{2}$;

3) $\cot\dfrac{\gamma}{2} = tg\,\delta \cdot \dfrac{\sin\mathfrak{s}}{\sin\mathfrak{d}}$; 4) $tg\dfrac{\mathfrak{c}}{2} = tg\,\mathfrak{d} \cdot \dfrac{\sin\sigma}{\sin\delta}$.

Anm. Die Bedingungen für die Anzahl der Lösungen gehen aus der vorigen Anm. hervor, wenn man darin die griechischen und deutschen Buchstaben vertauscht.

Aufgabe 3. — Ein Kugeldreieck zu berechnen aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel. $(\mathfrak{a}\mathfrak{b}\gamma)$

Lösung: 1) $\mathfrak{s} = \dfrac{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}}{2}$, $\mathfrak{d} = \dfrac{\mathfrak{a}-\mathfrak{b}}{2}$;

2) $tg\,\sigma = \cot\dfrac{\gamma}{2} \cdot \dfrac{\cos\mathfrak{d}}{\cos\mathfrak{s}}$; $tg\,\delta = \cot\dfrac{\gamma}{2} \cdot \dfrac{\sin\mathfrak{d}}{\sin\mathfrak{s}}$;

3) $\alpha = \sigma + \delta$, $\beta = \sigma - \delta$; 4) $tg\dfrac{\mathfrak{c}}{2} = tg\,\mathfrak{d} \cdot \dfrac{\sin\sigma}{\sin\delta}$.

Aufgabe 4. — Ein Kugeldreieck zu berechnen aus einer Seite und den beiden anliegenden Winkeln. $(\alpha\beta\mathfrak{c})$

Lösung: 1) $\sigma = \dfrac{\alpha+\beta}{2}$, $\delta = \dfrac{\alpha-\beta}{2}$;

2) $tg\,\mathfrak{s} = tg\dfrac{\mathfrak{c}}{2} \cdot \dfrac{\cos\delta}{\cos\sigma}$; $tg\,\mathfrak{d} = tg\dfrac{\mathfrak{c}}{2} \cdot \dfrac{\sin\delta}{\sin\sigma}$;

3) $\mathfrak{a} = \mathfrak{s} + \mathfrak{d}$, $\mathfrak{b} = \mathfrak{s} - \mathfrak{d}$; 4) $\cot\dfrac{\gamma}{2} = tg\,\delta \cdot \dfrac{\sin\mathfrak{s}}{\sin\mathfrak{d}}$.

**131.** ***Die Tangensformeln.*** — Aus der Formel des Cosinussatzes

$$\cos \mathfrak{a} = \cos \mathfrak{b} \,.\, \cos \mathfrak{c} + \sin \mathfrak{b} \,.\, \sin \mathfrak{c} \,.\, \cos \alpha$$

folgt
$$\cos \alpha = \frac{\cos \mathfrak{a} - \cos \mathfrak{b} \,.\, \cos \mathfrak{c}}{\sin \mathfrak{b} \,.\, \sin \mathfrak{c}}.$$

Addiert man diese Formel zu $1 = 1$, so folgt:

$$1 + \cos \alpha = \frac{\cos \mathfrak{a} - \cos \mathfrak{b} \,.\, \cos \mathfrak{c} + \sin \mathfrak{b} \,.\, \sin \mathfrak{c}}{\sin \mathfrak{b} \,.\, \sin \mathfrak{c}}$$

$$= \frac{\cos \mathfrak{a} - \cos (\mathfrak{b} + \mathfrak{c})}{\sin \mathfrak{b} \,.\, \sin \mathfrak{c}} = \frac{2 \,.\, \sin \frac{1}{2} (\mathfrak{b} + \mathfrak{c} + \mathfrak{a}) \,.\, \sin \frac{1}{2} (\mathfrak{b} + \mathfrak{c} - \mathfrak{a})}{\sin \mathfrak{b} \,.\, \sin \mathfrak{c}},$$

oder, wenn man

(1) $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \mathfrak{c} = 2\mathfrak{p}$, $\mathfrak{b} + \mathfrak{c} - \mathfrak{a} = 2\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{c} + \mathfrak{a} - \mathfrak{b} = 2\mathfrak{p}_2$, $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} - \mathfrak{c} = 2\mathfrak{p}_3$

setzt:

$$1 + \cos \alpha = \frac{2 \,.\, \sin \mathfrak{p} \,.\, \sin \mathfrak{p}_1}{\sin \mathfrak{b} \,.\, \sin \mathfrak{c}},$$

daher

341. (2) $$\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}} = \sqrt{\frac{\sin \mathfrak{p} \,.\, \sin \mathfrak{p}_1}{\sin \mathfrak{b} \,.\, \sin \mathfrak{c}}}.$$

Subtrahiert man die Formel für $\cos \alpha$ von $1 = 1$, so folgt:

$$1 - \cos \alpha = \frac{\sin \mathfrak{b} \,.\, \sin \mathfrak{c} + \cos \mathfrak{b} \,.\, \cos \mathfrak{c} - \cos \mathfrak{a}}{\sin \mathfrak{b} \,.\, \sin \mathfrak{c}}$$

$$= \frac{\cos (\mathfrak{b} - \mathfrak{c}) - \cos \mathfrak{a}}{\sin \mathfrak{b} \,.\, \sin \mathfrak{c}} = \frac{2 \,.\, \sin \frac{1}{2} (\mathfrak{a} + \mathfrak{b} - \mathfrak{c}) \,.\, \sin \frac{1}{2} (\mathfrak{a} - \mathfrak{b} + \mathfrak{c})}{\sin \mathfrak{b} \,.\, \sin \mathfrak{c}}$$

$$= \frac{2 \,.\, \sin \mathfrak{p}_2 \,.\, \sin \mathfrak{p}_3}{\sin \mathfrak{b} \,.\, \sin \mathfrak{c}},$$

daher

342. (3) $$\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}} = \sqrt{\frac{\sin \mathfrak{p}_2 \,.\, \sin \mathfrak{p}_3}{\sin \mathfrak{b} \,.\, \sin \mathfrak{c}}}.$$

Dividiert man 342 durch 341, so folgt:

$$tg \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\sin \mathfrak{p}_2 \sin \mathfrak{p}_3}{\sin \mathfrak{p} \,.\, \sin \mathfrak{p}_1}} = \sqrt{\frac{\sin \mathfrak{p}_1 \sin \mathfrak{p}_2 \sin \mathfrak{p}_3}{\sin \mathfrak{p} \,.\, \sin^2 \mathfrak{p}_1}},$$

oder, wenn

343. (4) $$\sqrt{\frac{\sin \mathfrak{p}_1 \sin \mathfrak{p}_2 \sin \mathfrak{p}_3}{\sin \mathfrak{p}}} = \sin \mathfrak{r}$$

gesetzt wird:

(5) $$tg \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \mathfrak{r}}{\sin \mathfrak{p}_1}, \quad tg \frac{\beta}{2} = \frac{\sin \mathfrak{r}}{\sin \mathfrak{p}_2}, \quad tg \frac{\gamma}{2} = \frac{\sin \mathfrak{r}}{\sin \mathfrak{p}_3}.$$

Anm. Die Formeln 341—343 gehen, wenn das Kugeldreieck ein ebenes wird, in die Formeln T. III, 82—84 über. — Da in jeder konkaven Ecke, also auch in jedem Kugeldreieck, welches nur konkave Winkel enthält, $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\mathfrak{c}<4R$ (122), so ist $\mathfrak{p}$ und umsomehr $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3 < 2R$, also sind in den Formeln (2) bis (5) sämmtliche Sinus positiv, daher sämmtliche Wurzeln reell.

Setzt man

$$\alpha_1+\beta_1+\gamma_1=2\pi', \quad \beta_1+\gamma_1-\alpha_1=2\pi_1', \quad \gamma_1+\alpha_1-\beta_1=2\pi_2',$$
$$\alpha_1+\beta_1-\gamma_1=2\pi_3',$$

so folgt aus 110, dass

$$\mathfrak{p}+\pi'=3R, \quad \mathfrak{p}_1+\pi_1'=R, \quad \mathfrak{p}_2+\pi_2'=R, \quad \mathfrak{p}_3+\pi_3'=R.$$
$$\frac{\alpha}{2}+\frac{\mathfrak{a}_1}{2}=R, \quad \frac{\beta}{2}+\frac{\mathfrak{b}_1}{2}=R, \quad \frac{\gamma}{2}+\frac{\mathfrak{c}_1}{2}=R.$$

Hieraus folgt weiter, dass

$$\sin\mathfrak{p}=-\cos\pi', \quad \sin\mathfrak{p}_1=\cos\pi_1', \quad \sin\mathfrak{p}_2=\cos\pi_2', \quad \sin\mathfrak{p}_3=\cos\pi_3',$$
$$\cos\frac{\alpha}{2}=\sin\frac{\mathfrak{a}_1}{2}, \quad \sin\frac{\alpha}{2}=\cos\frac{\mathfrak{a}_1}{2}, \quad tg\,\frac{\alpha}{2}=\cot\frac{\mathfrak{a}_1}{2}.$$

Setzt man diese Werte in die Formeln (1) bis (5) ein, so erhält man nach Weglassung der oberen Indices:

(6) $\alpha+\beta+\gamma=2\pi,\ \beta+\gamma-\alpha=2\pi_1,\ \gamma+\alpha-\beta=2\pi_2,\ \alpha+\beta-\gamma=2\pi_3$. (1)

(7) $$\sin\frac{\mathfrak{a}}{2}=\sqrt{\frac{-\cos\pi\,.\,\cos\pi_1}{\sin\beta\,.\,\sin\gamma}};\ (2)$$ 345.

(8) $$\cos\frac{\mathfrak{a}}{2}=\sqrt{\frac{\cos\pi_2\,.\,\cos\pi_3}{\sin\beta\,.\,\sin\gamma}};\ (3)$$ 346.

(9) $$\sqrt{\frac{\cos\pi_1\cos\pi_2\cos\pi_3}{-\cos\pi}}=\cos\varrho\ ^{*)}$$ 347.

(10) $$\cot\frac{\mathfrak{a}}{2}=\frac{\cos\varrho}{\cos\pi_1}, \quad \cot\frac{\beta}{2}=\frac{\cos\varrho}{\cos\pi_2}, \quad \cot\frac{\gamma}{2}=\frac{\cos\varrho}{\cos\pi_3}.$$ 348.

Anm. Da nach 123 $\alpha+\beta+\gamma>2R$ und $<6R$, so ist $\pi>R$ und $<3R$, also $\cos\pi$ negativ und $-\cos\pi$ positiv. Da ferner $\mathfrak{b}_1+\mathfrak{c}_1>\mathfrak{a}_1$ (118), so ist $2R-\beta+2R-\gamma>2R-\alpha$ oder $\beta+\gamma-\alpha<2R$, d. h. $\pi_1<R$, ebenso $\pi_2$ und $\pi_3$; also sind in den Formeln (7) bis (10) alle Cosinus, mit Ausnahme von $\cos\pi$, positiv, ebenso die Sinus, daher sämmtliche Wurzeln reell.

---

*) Diese Formel enthält natürlich keine Folgerung aus (4), sondern ebenso, wie letztere Formel, eine willkürliche zur Abkürzung getroffene Bestimmung.

**132.** *Anwendung der Tangensformeln.* — Dieselben dienen zur Lösung der Aufgaben $\mathfrak{abc}$ und $\alpha\beta\gamma$.

Aufgabe 5. — Ein Kugeldreieck zu berechnen aus den drei Seiten. ($\mathfrak{abc}$)

Lösung: 1) $\mathfrak{p} = \frac{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\mathfrak{c}}{2}$, $\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{p} - \mathfrak{a}$, $\mathfrak{p}_2 = \mathfrak{p} - \mathfrak{b}$, $\mathfrak{p}_3 = \mathfrak{p} - \mathfrak{c}$.

$$2)\ \sin \mathfrak{r} = \sqrt{\frac{\sin \mathfrak{p}_1 \sin \mathfrak{p}_2 \sin \mathfrak{p}_3}{\sin \mathfrak{p}}},$$

$$3)\ tg\,\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \mathfrak{r}}{\sin \mathfrak{p}_1},\quad tg\,\frac{\beta}{2} = \frac{\sin \mathfrak{r}}{\sin \mathfrak{p}_2},\quad tg\,\frac{\gamma}{2} = \frac{\sin \mathfrak{r}}{\sin \mathfrak{p}_3}.$$

Aufgabe 6. — Ein Kugeldreieck zu berechnen aus den drei Winkeln. ($\alpha\beta\gamma$)

Lösung: 1) $\pi = \frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}$, $\pi_1 = \pi - \alpha$, $\pi_2 = \pi - \beta$, $\pi_3 = \pi - \gamma$.

$$2)\ \cos \varrho = \sqrt{\frac{\cos \pi_1 \cos \pi_2 \cos \pi_3}{-\cos \pi}},$$

$$3)\ \cot\frac{\mathfrak{a}}{2} = \frac{\cos \varrho}{\cos \pi_1},\quad \cot\frac{\mathfrak{b}}{2} = \frac{\cos \varrho}{\cos \pi_2},\quad \cot\frac{\gamma}{2} = \frac{\cos \varrho}{\cos \pi_3}.$$

## 3. Dritte Methode.

**133.** *Methode des Hilfswinkels.* — Die Formel des Cosinussatzes kann für die einzelnen Aufgaben statt durch Umformung auch durch Einführung eines Hilfswinkels vereinfacht werden.

Aufgabe 1. — Gegeben $\mathfrak{ab}\alpha$.

Multipliziert man die Formel 336 mit $\cos \mathfrak{c}$, so folgt:

$$\cos \mathfrak{a} \,.\, \cos \mathfrak{c} = \cos \mathfrak{b} \,.\, \cos^2 \mathfrak{c} + \sin \mathfrak{b} \,.\, \sin \mathfrak{c} \,.\, \cos \mathfrak{c} \,.\, \cos \alpha.$$

Ferner folgt aus 336 durch Buchstabenvertauschung

$$\cos \mathfrak{b} = \cos \mathfrak{c} \,.\, \cos \mathfrak{a} + \sin \mathfrak{c} \,.\, \sin \mathfrak{a} \,.\, \cos \beta.$$

Durch Addition beider Formeln erhält man

$$\cos \mathfrak{b} = \cos \mathfrak{b} \,.\, \cos^2 \mathfrak{c} + \sin \mathfrak{c}\,(\sin \mathfrak{b} \,.\, \cos \mathfrak{c} \,.\, \cos \alpha + \sin \mathfrak{a} \,.\, \cos \beta)$$

oder, wenn man das erste Glied rechts nach links schafft und durch $\sin \mathfrak{c}$ hebt:

$$\cos \mathfrak{b} \,.\, \sin \mathfrak{c} = \sin \mathfrak{b} \,.\, \cos \mathfrak{c} \,.\, \cos \alpha + \sin \mathfrak{a} \,.\, \cos \beta.$$

Setzt man endlich den aus dem Sinussatze folgenden We

$$\sin \mathfrak{a} = \frac{\sin \mathfrak{b} \,.\, \sin \alpha}{\sin \beta}$$

in diese Formel ein und dividiert durch $\sin\mathfrak{b}$, so erhält man

$$\cot\mathfrak{b} \,.\, \sin\mathfrak{c} = \cos\mathfrak{c} \,.\, \cos\alpha + \sin\alpha \,.\, \cot\beta,$$

oder durch Buchstabenvertauschung

$$\text{(a)}\quad \cot\mathfrak{a} \,.\, \sin\mathfrak{b} = \cos\mathfrak{b} \,.\, \cos\gamma + \sin\gamma \,.\, \cot\alpha. \qquad 349.$$

Von dieser Formel geht man aus, um die oben gestellte Aufgabe zu lösen. Setzt man

$$\text{(b)}\qquad \cot\alpha = \cos\mathfrak{b} \,.\, \cot\varphi,$$

so geht die letzte Formel über in

$$\cot\mathfrak{a} \,.\, \sin\mathfrak{b} = \cos\mathfrak{b}\,(\cos\gamma + \sin\gamma \,.\, \cot\varphi),$$

oder, indem man beiderseits mit $\frac{\sin\varphi}{\cos\mathfrak{b}}$ multipliziert:

$$\text{(c)}\qquad \cot\mathfrak{a} \,.\, tg\,\mathfrak{b} \,.\, \sin\varphi = \sin(\gamma + \varphi).$$

Da man, wenn $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\alpha$ gegeben sind, aus (b) den Winkel $\varphi$, und aus (c) den Winkel $\gamma$ findet, so folgt für Aufgabe 1 die

Lösung: 1) $tg\,\varphi = \cos\mathfrak{b} \,.\, tg\,\alpha$; 2) $\sin(\gamma + \varphi) = \frac{\sin\varphi \,.\, tg\,\mathfrak{b}}{tg\,\mathfrak{a}}$;

3) $\sin\beta = \frac{\sin\mathfrak{b} \,.\, \sin\alpha}{\sin\mathfrak{a}}$; 4) $\sin\mathfrak{c} = \frac{\sin\gamma \,.\, \sin\mathfrak{a}}{\sin\alpha}$.

Aufgabe 2. — Gegeben $\alpha\beta\mathfrak{a}$.

Aus der Formel (a) folgt mittelst 110:

$$-\cot\alpha \,.\, \sin\beta = \cos\beta \,.\, \cos\mathfrak{c} - \sin\mathfrak{c} \,.\, \cot\mathfrak{a},$$

oder

$$(\text{a}_1)\quad \cot\alpha \,.\, \sin\beta = -\cos\beta \,.\, \cos\mathfrak{c} + \sin\mathfrak{c} \,.\, \cot\mathfrak{a}.$$

Setzt man

$$(\text{b}_1)\qquad \cot\mathfrak{a} = \cos\beta \,.\, \cot\varphi,$$

so geht die letzte Formel über in

$$\cot\alpha \,.\, \sin\beta = \cos\beta\,(-\cos\mathfrak{c} + \sin\mathfrak{c} \,.\, \cot\varphi),$$

oder, indem man beiderseits mit $\frac{\sin\varphi}{\cos\beta}$ multipliziert:

$$(\text{c}_1)\qquad \cot\alpha \,.\, tg\,\beta \,.\, \sin\varphi = \sin(\mathfrak{c} - \varphi).$$

Da man, wenn $\alpha$, $\beta$, $\mathfrak{a}$ gegeben sind, aus $(\text{b}_1)$ den Winkel $\varphi$, und aus $(\text{c}_1)$ den Winkel $\mathfrak{c}$ findet, so folgt für Aufgabe 2 die

Lösung: 1) $tg\,\varphi = \cos\beta \,.\, tg\,\mathfrak{a}$; 2) $\sin(\mathfrak{c} - \varphi) = \frac{\sin\varphi \,.\, tg\,\beta}{tg\,\alpha}$;

3) $\sin\mathfrak{b} = \frac{\sin\beta \,.\, \sin\mathfrak{a}}{\sin\alpha}$; 4) $\sin\gamma = \frac{\sin\mathfrak{c} \,.\, \sin\alpha}{\sin\mathfrak{a}}$.

Aufgabe 3. — Gegeben $\mathfrak{b}\mathfrak{c}\alpha$.
Wenn man in der Formel 336

(a) $\cos \mathfrak{a} = \cos \mathfrak{b} \,.\, \cos \mathfrak{c} + \sin \mathfrak{b} \,.\, \sin \mathfrak{c} \,.\, \cos \alpha$

die Substitution macht:

(b) $\cos \alpha = \cot \mathfrak{b} \,.\, \cot \varphi,$

so erhält man

$$\cos \mathfrak{a} = \cos \mathfrak{b} \,(\cos \mathfrak{c} + \sin \mathfrak{c} \,.\, \cot \varphi),$$

oder (c) $\cos \mathfrak{a} = \frac{\cos \mathfrak{b} \,.\, \sin (\mathfrak{c} + \varphi)}{\sin \varphi}.$

Da man, wenn $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\alpha$ gegeben sind, aus (b) den Winkel $\varphi$, und aus (c) die Seite $\mathfrak{a}$ findet, so folgt für Aufgabe 3 die

Lösung: 1) $\cot \varphi = tg\, \mathfrak{b} \,.\, \cos \alpha$; 2) $\cos \mathfrak{a} = \frac{\cos \mathfrak{b} \,.\, \sin (\mathfrak{c} + \varphi)}{\sin \varphi}$;

3) $\sin \beta = \frac{\sin \mathfrak{b} \,.\, \sin \alpha}{\sin \mathfrak{a}}$; 4) $\sin \gamma = \frac{\sin \mathfrak{c} \,.\, \sin \alpha}{\sin \mathfrak{a}}$.

Aufgabe 4. — Gegeben $\beta\gamma\mathfrak{a}$.
Wenn man in der Formel 338

($\mathfrak{a}_1$) $\cos \alpha = - \cos \beta \,.\, \cos \gamma + \sin \beta \,.\, \sin \gamma \,.\, \cos \mathfrak{a}$

die Substitution macht:

($\mathfrak{b}_1$) $\cos \mathfrak{a} = \cot \beta \,.\, \cot \varphi,$

so erhält man

$$\cos \alpha = \cos \beta \,(- \cos \gamma + \sin \gamma \,.\, \cot \varphi),$$

oder

($\mathfrak{c}_1$) $\cos \alpha = \frac{\cos \beta \,.\, \sin (\gamma - \varphi)}{\sin \varphi}.$

Da man, wenn $\beta$, $\gamma$, $\mathfrak{a}$ gegeben sind, aus ($\mathfrak{b}_1$) den Winkel $\varphi$, und aus ($\mathfrak{c}_1$) den Winkel $\alpha$ findet, so folgt für Aufgabe 4 die

Lösung: 1) $\cot \varphi = tg\, \beta \,.\, \cos \mathfrak{a}$; 2) $\cos \alpha = \frac{\cos \beta \,.\, \sin (\gamma - \varphi)}{\sin \varphi}$;

3) $\sin \mathfrak{b} = \frac{\sin \beta \,.\, \sin \mathfrak{a}}{\sin \alpha}$; 4) $\sin \mathfrak{c} = \frac{\sin \gamma \,.\, \sin \mathfrak{a}}{\sin \alpha}$.

Aufgabe 5. — Gegeben $\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}$.
Aus 336 folgt

(a) $\cos \alpha = \frac{\cos \mathfrak{a} - \cos \mathfrak{b} \,.\, \cos \mathfrak{c}}{\sin \mathfrak{b} \,.\, \sin \mathfrak{c}}.$

Setzt man hierin

(b) $\cos \mathfrak{a} = \cos \mathfrak{c} \,.\, \sin \mathfrak{b} \,.\, \cot \varphi,$

so erhält man

$$\cos\alpha = \frac{\cos c\,(\sin b \,.\, \cot\varphi - \cos b)}{\sin b \,.\, \sin c},$$

oder (c) $$\cos\alpha = \frac{\cot c \,.\, \sin(b - \varphi)}{\sin b \,.\, \sin\varphi}.$$

Da man, wenn $a$, $b$, $c$ gegeben sind, aus (b) den Winkel $\varphi$, und aus (c) den Winkel $\alpha$ findet, so folgt für Aufgabe 5 die

Lösung: 1) $tg\,\varphi = \frac{\sin b \,.\, \cos c}{\cos a}$; 2) $\cos\alpha = \frac{\cot c \,.\, \sin(b - \varphi)}{\sin b \,.\, \sin\varphi}$;

3) $\sin\beta = \frac{\sin b \,.\, \sin\alpha}{\sin a}$; 4) $\sin\gamma = \frac{\sin c \,.\, \sin\alpha}{\sin a}$.

Aufgabe 6. — Gegeben $\alpha\beta\gamma$.

Aus 338 folgt

($a_1$) $$\cos a = \frac{\cos\alpha + \cos\beta \,.\, \cos\gamma}{\sin\beta \,.\, \sin\gamma}.$$

Setzt man hierin

($b_1$) $$\cos\alpha = \cos\gamma \,.\, \sin\beta \,.\, \cot\varphi,$$

so erhält man

$$\cos a = \frac{\cos\gamma\,(\sin\beta \,.\, \cot\varphi + \cos\beta)}{\sin\beta \,.\, \sin\gamma},$$

oder ($c_1$) $$\cos a = \frac{\cot\gamma \,.\, \sin(\beta + \varphi)}{\sin\beta \,.\, \sin\varphi}.$$

Da man, wenn $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ gegeben sind, aus ($b_1$) den Winkel $\varphi$, und aus ($c_1$) die Seite $a$ findet, so folgt für Aufgabe 6 die

Lösung: 1) $tg\,\varphi = \frac{\sin\beta \,.\, \cos\gamma}{\cos\alpha}$; 2) $\cos a = \frac{\cot\gamma \,.\, \sin(\beta + \varphi)}{\sin\beta \,.\, \sin\varphi}$;

3) $\sin b = \frac{\sin\beta \,.\, \sin a}{\sin\alpha}$; 4) $\sin c = \frac{\sin\gamma \,.\, \sin a}{\sin\alpha}$.

Die Fläche des Kugeldreiecks wird durch Formel 312 gefunden.

# Anhang.

## Die Flächen zweiter Ordnung.*)

**134.** *Vorbemerkung.* — In der elementaren Stereometrie betrachtet man nur diejenigen Flächen, welche durch eine einfache Bewegung aus einer Geraden oder Kreislinie entstehen, nämlich die Ebene, die gemeine Kegel-, Cylinder- und die Kugelfläche. Zwar ist die Bewegung der Geraden, welche die Kegel- oder Cylinderfläche beschreibt, eine zusammengesetzte, aber die Ebene, in welcher diese Gerade liegt, führt durch ihre Drehung eine einfache Bewegung aus.

Alle anderen Flächen entstehen entweder durch einfache Bewegung einer nicht elementaren Kurve, oder durch zusammengesetzte Bewegung einer Geraden oder Kreislinie, oder sie lassen sich überhaupt nicht durch Bewegung von Linien mit unveränderlicher Gestalt erzeugen, sondern erscheinen als geometrische Oerter von Punkten, die sich nach einem bestimmten Gesetz im Raume bewegen. (Letztere Auffassung lässt sich auf alle Flächen ohne Ausnahme anwenden.) Von dem Gesetze dieser Bewegung sei hier nur bemerkt, dass es sich durch eine Gleichung mit 3 Unbekannten (Veränderlichen) ausdrücken lässt, und dass die Fläche algebraisch oder transcendent genannt wird, je nachdem diese Gleichung algebraisch oder transcendent ist. — Zwei derartige Gleichungen mit denselben veränderlichen Grössen stellen alle diejenigen Punkte dar, welche beiden Flächen gemeinsam sind, d. h. die Schnittlinie der beiden Flächen, drei solcher Gleichungen stellen die einzelnen den drei Flächen gemeinsamen Punkte dar. — Man teilt die algebraischen Flächen ein nach dem Grade der Kurve, in welcher sie von einer Ebene geschnitten werden (oder nach der Klasse der Kurve, in welcher alle aus einem Punkte an

---

*) Vgl. T. II, Nr. 165.

sie gelegten Tangentenebenen sie berühren), und sagt, eine Fläche sei von der $n^{\text{ten}}$ Ordnung, wenn sie von einer Ebene in einer Kurve $n^{\text{ter}}$ Ordnung geschnitten werden kann (von der $n^{\text{ten}}$ Klasse, wenn die Berührungspunkte aller durch einen Punkt an sie gelegten Tangentenebenen auf einer Kurve $n^{\text{ter}}$ Klasse liegen). Hiernach ist die Ebene eine Fläche $1^{\text{ter}}$ Ordnung (der Punkt, als Grenzfall der Kugelfläche betrachtet, eine Fläche $1^{\text{ter}}$ Klasse), die elementaren krummen Flächen sind Flächen $2^{\text{ter}}$ Ordnung und $2^{\text{ter}}$ Klasse.

Anm. Die gemeine Cylinderfläche wird von einer Ebene entweder in einer Kreislinie, oder in einer Ellipse, oder in zwei parallelen Geraden (specieller Fall der Ellipse nach T. II, Nr. 171) geschnitten. Die Berührungspunkte der beiden aus einem Punkte an sie gelegten Tangentenebenen liegen auf zwei parallelen Geraden. — Die (vollständige) gemeine Kegelfläche wird von einer Ebene entweder in einer Kreislinie, oder in einer Ellipse, Parabel, Hyperbel, oder in einem Punkte (specieller Fall der Kreislinie) geschnitten. Die Berührungspunkte der beiden aus einem Punkte an sie gelegten Tangentenebenen liegen auf zwei sich schneidenden Geraden (specieller Fall der Hyperbel nach T. II, Nr. 176). — Die Kugelfläche wird von jeder Ebene in einer Kreislinie geschnitten. Die Berührungspunkte aller aus einem Punkte an sie gelegten Tangentenebenen liegen auf einer Kreislinie.

Es sollen nun im folgenden die übrigen Flächen zweiter Ordnung betrachtet werden.

**135.** *Entstehungsweisen der Flächen zweiter Ordnung.* — 1) Wenn eine Kurve zweiter Ordnung eine halbe Umdrehung um eine ihrer Axen macht, so kommen ihre beiden zur Axe symmetrisch liegenden Hälften zur Deckung, und es entsteht eine specielle Form der Flächen zweiter Ordnung, eine Rotationsfläche. Diese Fläche wird durch jede von zwei auf einander senkrecht stehenden, durch die Axe gelegten Ebenen ($\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$) in der ursprünglich gegebenen Kurve geschnitten, von einer zur Axe senkrechten Ebene ($\mathfrak{c}$) in einer Kreislinie. Denkt man sich nun die Rotationsfläche durch Biegung so verändert, dass aus dieser Kreislinie eine Ellipse wird, so erhält man die allgemeine Form einer Fläche zweiter Ordnung. Sind die Schnittlinien ($\mathfrak{ac}$) und ($\mathfrak{bc}$) die Axen dieser Ellipse, so werden ($\mathfrak{ac}$), ($\mathfrak{bc}$) und ($\mathfrak{ab}$) die Axen, und die Ebenen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ die Hauptschnitte der Fläche genannt. — Die Flächen selbst können elliptische Flächen genannt werden.

2) Auf die eben beschriebene Art können offenbar nur solche Flächen entstehen, welche von irgend einer Ebene in einer Ellipse geschnitten werden. Eine andere Art von Flächen zweiter Ordnung entsteht durch einfache Verschiebung einer

Kurve zweiter Ordnung im Raume. Alle zur Ebene der Kurve parallelen Ebenen schneiden dann die Fläche in Kurven, welche der gegebenen kongruent sind, alle zur Ebene der Kurve senkrechten Ebenen schneiden die Fläche in einem Parallelenpaar. — Durch jeden Punkt der Fläche geht eine Gerade (Seitenlinie). Diese Flächen können cylindrische Flächen genannt werden.

3) Es ist schliesslich noch der Fall denkbar, dass eine Fläche zweiten Grades von einer Ebene weder in einer Ellipse noch in einem Parallelenpaar (welches als Ausartung der Ellipse angesehen werden kann) geschnitten werden kann, sondern nur in Parabeln und Hyperbeln (bezw. zwei sich schneidenden Geraden als Ausartung der Hyperbel). Eine solche Fläche entsteht (Fig. 60), wenn eine Gerade $x$ sich im Raume so bewegt, dass ihre Schnittpunkte mit zwei windschiefen Geraden $a$ und $b$ von zwei Punkten $A$ und $B$ der Geraden $a$ und $b$ beständig gleichen Abstand haben. Sind also $A_1$, $A_2$, ... die Punkte, in welchen $a$, ferner $B_1$, $B_2$, ... die Punkte, in welchen $b$ von $x$ geschnitten wird, und $A_1B_1$, $A_2B_2$, ... verschiedene Lagen von $x$, so ist $A_1A = B_1B$, $A_2A = B_2B$, ... Ebenso wie die Gerade $x$ müssen auch ihre Schnittpunkte mit $a$ und $b$ beständig auf der von $x$ beschriebenen Fläche liegen; d. h. $a$ und $b$ liegen selbst auf der Fläche. Jede durch $a$ (oder $b$) und $x$ (in irgend einer Lage dieser Geraden) gelegte Ebene schneidet die Fläche in dem Geradenpaare $ax$. Die Fläche ist also eine Fläche zweiter Ordnung. Jede andere durch eine Gerade $x$ gelegte Ebene schneidet daher die Fläche noch in einer zweiten Geraden $y$. Diese Geraden $y$ bilden daher ein zweites System von Geraden, die auf der Fläche liegen. Da man zu jeder Ebene des Raumes zwischen zwei windschiefen Geraden beliebige Parallelen ziehen kann,*) so hat jede Ebene des Raumes wenigstens mit einer der auf der Fläche liegenden Geraden einen unendlich fernen Punkt gemeinsam, schneidet also die Fläche in einer Kurve, die wenigstens einen unendlich fernen Punkt hat, also keine Ellipse sein kann, sondern nur eine Hyperbel oder Parabel. — Die so bestimmte Fläche kann windschiefe Fläche genannt werden.

Anm. Die hier angegebenen Entstehungsweisen umfassen sämmtliche Flächen zweiter Ordnung. Der Nachweis hierfür kann jedoch an dieser Stelle nicht gegeben werden.

---

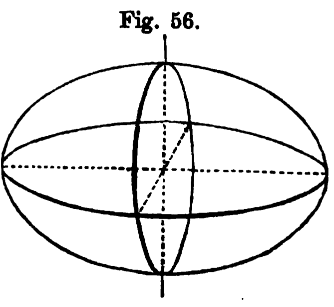
*) Denn jede parallele Ebene schneidet die beiden windschiefen Geraden in zwei Punkten, deren Verbindungslinie der ersten Ebene parallel ist.

## I. Die elliptischen Flächen.

### a. Drehung der Ellipse.

**136.** 1) *Das Ellipsoid.* — Durch halbe Umdrehung einer Ellipse um eine ihrer Axen und nachfolgende Biegung [in Nr. 135, 1) beschrieben] entsteht das Ellipsoid. Dasselbe bildet eine vollkommen geschlossene, endliche Fläche. Die drei Hauptschnitte sind Ellipsen. Da die Fläche sich nirgends ins Unendliche ausdehnt, so müssen auch alle übrigen ebenen Schnitte Ellipsen sein. Der Mittelpunkt der gegebenen Ellipse heisst Mittelpunkt der Fläche, weil jede durch ihn zwischen zwei Punkten der Fläche gezogene Strecke in ihm halbiert wird.

Fig. 56.



*Specielle Fälle* des Ellipsoids sind: a) Das Rotationsellipsoid, wenn zwei Axen gleich lang sind. Die auf der Drehungsaxe senkrechten Schnitte sind Kreislinien. — b) Die Kugel, wenn alle drei Axen gleich lang sind. Alle Schnitte sind Kreislinien.

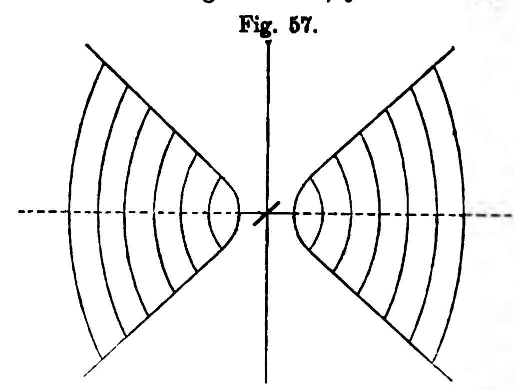
*Abarten* des Ellipsoids entstehen aus den Abarten der Ellipse. — Geht die Ellipse in eine mit ihrer grossen Axe zusammenfallende Strecke über, so entsteht a) durch Drehung um die kleine Axe eine Kreisfläche, resp. eine (doppelte) Ellipsenfläche, d. h. ein Ellipsoid, in welchem eine Axe $=0$ ist; b) durch Drehung um die grosse Axe dieselbe Strecke, d. h. ein Ellipsoid, in welchem zwei Axen $=0$ sind. — Da die Kugel in einen Punkt übergehen kann, so ist auch c) der Punkt als Abart des Ellipsoids anzusehen, d. h. als Ellipsoid, in welchem alle drei Axen $=0$ sind. — Geht die Ellipse in ein der grossen Axe paralleles Parallelenpaar über, so entsteht d) durch Drehung um die kleine Axe ein Paar paralleler Ebenen; e) durch Drehung um die grosse Axe die elliptische Cylinderfläche, von der weiter unten die Rede sein wird. (Man beachte, dass die ebenen Schnitte der Abarten des Ellipsoids zum teil Abarten der Ellipse sind.)

### b. Drehung der Hyperbel.

**137.** 2) *Das zweischalige Hyperboloid.* — Durch halbe Umdrehung einer Hyperbel um ihre Hauptaxe und nachfolgende

Biegung entsteht das zweischalige Hyperboloid. Dasselbe besteht aus zwei getrennten, je nach einer Seite offenen und ins Unendliche sich erstreckenden Flächen. Die beiden durch die Drehungsaxe gehenden Hauptschnitte sind Hyperbeln, ebenso alle ebenen Schnitte, welche **beide** Teile der Fläche treffen. Der dritte Hauptschnitt liegt zwischen beiden Teilen und trifft keinen derselben. Alle ebenen Schnitte, welche nur **einen** Teil der Fläche treffen, sind Ellipsen (oder Parabeln). Der Mittelpunkt der gegebenen Hyperbel ist Mittelpunkt der ganzen Fläche. Die Asymptoten aller durch die Drehungsaxe gehenden Hyperbelschnitte liegen auf einer vollständigen Kegelfläche, dem **Asymptotenkegel.**

Fig. 57.



*Specielle Fälle* des zweischaligen Hyperboloids sind a) das **zweischalige Rotationshyperboloid**, wenn die auf der Drehungsaxe senkrechten Schnitte Kreise sind; b) das **zweischalige rechtwinklige Hyperboloid**, wenn der Winkel an der Spitze des Asymptotenkegels ein rechter ist.

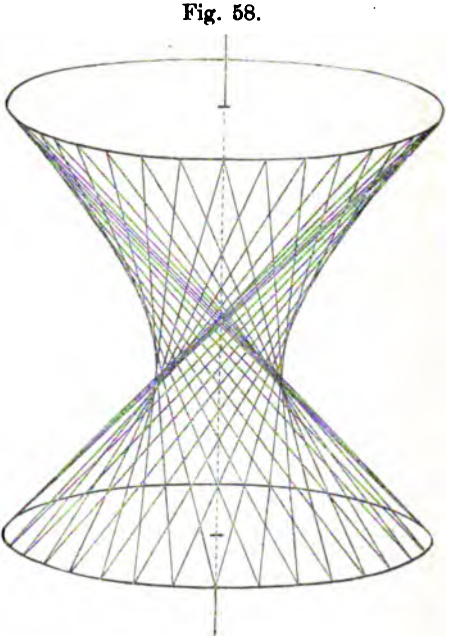
*Abarten* des zweischaligen Hyperboloids entstehen aus den Abarten der Hyperbel. — a) Geht die Hyperbel in eine mit der Hauptaxe zusammenfallende Gerade (mit Ausnahme der Hauptaxe selbst) über, so entsteht durch Drehung um die Hauptaxe dieselbe **Gerade** (mit Ausnahme der Hauptaxe selbst). — b) Geht die Hyperbel in ein Paar sich schneidender Geraden über, so entsteht durch Drehung um die Hauptaxe die **elliptische Kegelfläche.** (Specieller Fall: Die Rotations- oder gemeine Kegelfläche.)

Anm. Durch den Schnitt einer vollständigen gemeinen Kegelfläc mit einer Ebene kann jede Art von Kurven zweiter Ordnung entsteh Ist nämlich der halbe Winkel an der Spitze des Kegels gleich $\alpha$, so der Schnitt eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel, je nachdem der Neigun winkel der Ebene und der Axe der Kegelfläche $> = < \alpha$ ist. Geht Schnitt durch die Spitze der Kegelfläche, so geht die Ellipse in ein Punkt, die Parabel in eine doppelte Gerade, die Hyperbel in ein Paar s

schneidender Geraden über. Die Kurven zweiter Ordnung heissen daher auch **Kegelschnitte.**

3) *Das einschalige Hyperboloid.* — Durch halbe Umdrehung einer Hyperbel um ihre Nebenaxe und nachfolgende Biegung entsteht das einschalige Hyperboloid. Dasselbe bildet eine zusammenhängende, nach zwei Seiten offene und ins Unendliche sich erstreckende Fläche. Die beiden durch die Drehungsaxe gehenden Hauptschnitte sind Hyperbeln, ebenso alle Schnitte, welche den Asymptotenkegel in einer Hyperbel schneiden. Der dritte Hauptschnitt ist eine Ellipse; ebenso alle Schnitte, welche den Asymptotenkegel in einer Ellipse schneiden. Schnitte, welche einer Seitenlinie des Asymptotenkegels parallel sind, sind Parabeln. Der Mittelpunkt der gegebenen Hyperbel ist Mittelpunkt der ganzen Fläche.

Fig. 58.



*Specielle Fälle* des einschaligen Hyperboloids sind: a) das einschalige Rotationshyperboloid, wenn die auf der Drehungsaxe senkrechten Schnitte Kreise sind; b) das einschalige rechtwinklige Hyperboloid, wenn der Winkel an der Spitze des Asymptotenkegels ein rechter ist.

*Abarten* des einschaligen Hyperboloids entstehen aus den Abarten der Hyperbel. — a) Geht die Hyperbel in eine mit der Hauptaxe zusammenfallende Gerade (mit Ausnahme der Hauptaxe selbst) über, so entsteht durch Drehung um die Nebenaxe eine Ebene (mit Ausnahme derjenigen Kreisfläche, welche die Hauptaxe zum Durchmesser hat). — b) Geht die Hyperbel in ein Paar sich schneidender Geraden über, so ent-

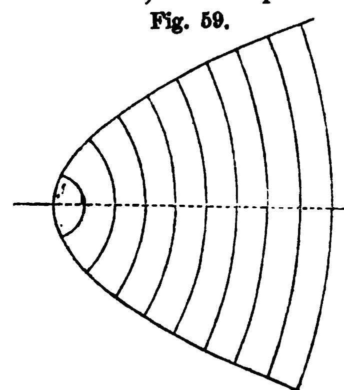
steht durch Drehung um die Nebenaxe wieder die **elliptische Kegelfläche.**

Anm. Die elliptische Kegelfläche bildet also den Grenzfall zwischen dem ein- und dem zweischaligen Hyperboloid.

### c. Drehung der Parabel.

**138.** 4) *Das elliptische Paraboloid.* — Durch halbe Umdrehung einer Parabel um ihre Axe und nachfolgende Biegung entsteht das elliptische Paraboloid. Dasselbe bildet eine nach einer Seite offene, ins Unendliche sich erstreckende Fläche. Die beiden durch die Drehungsaxe gehenden Hauptschnitte sind Parabeln, der dritte Hauptschnitt ist eine Ellipse. Die übrigen Schnitte sind Ellipsen oder Parabeln. Die Fläche besitzt keinen Mittelpunkt.

Fig. 59.



## II. Die cylindrischen Flächen.

### a. Verschiebung der Ellipse.

**139.** 5) *Die elliptische Cylinderfläche.* — Durch Verschiebung einer Ellipse längs einer zu ihrer Ebene senkrechten Geraden entsteht die elliptische Cylinderfläche. Dieselbe bildet eine nach zwei Seiten offene und ins Unendliche sich erstreckende Fläche. Jeder Punkt der vom Mittelpunkte der Ellipse beschriebenen Geraden (Axe der Fläche) ist ein Mittelpunkt der Fläche. Dieselbe besitzt also unendlich viele Mittelpunkte.

*Specieller Fall* der elliptischen Cylinderfläche: Die **Rotations- oder gemeine Cylinderfläche,** wenn die erzeugende Ellipse eine Kreislinie ist.

*Abarten* der elliptischen Cylinderfläche: a) Ein von zwei parallelen Geraden begrenzter Ebenenstreifen, wenn die Ellipse in eine Strecke ausartet; b) die Gerade, wenn die Ellipse in einen Punkt ausartet; c) ein Paar paralleler Ebenen, wenn die Ellipse in ein Parallelenpaar ausartet.

### b. Verschiebung der Hyperbel.

**140.** 6) *Die hyperbolische Cylinderfläche.* — Durch Verschiebung einer Hyperbel längs einer zu ihrer Ebene senkrechten Geraden entsteht die hyperbolische Cylinderfläche. Dieselbe besteht aus zwei getrennten, je nach drei Seiten offenen und ins Unendliche sich erstreckenden Flächen. Jeder Punkt der vom Mittelpunkte der Hyperbel beschriebenen Geraden (Axe der Fläche) ist ein Mittelpunkt der Fläche. Dieselbe besitzt also unendlich viele Mittelpunkte.

*Specieller Fall* der hyperbolischen Cylinderfläche: Die rechtwinklige hyperbolische Cylinderfläche, wenn die erzeugende Hyperbel rechtwinklig ist.

*Abarten* der hyperbolischen Cylinderfläche: a) Eine Ebene (mit Ausnahme eines von zwei parallelen Geraden begrenzten Streifens, welchen die Hauptaxe beschreibt), wenn die Hyperbel in eine Gerade (mit Ausnahme der Hauptaxe) ausartet; b) Ein Paar sich schneidender Ebenen, wenn die Hyperbel in ein Paar sich schneidender Geraden ausartet.

### c. Verschiebung der Parabel.

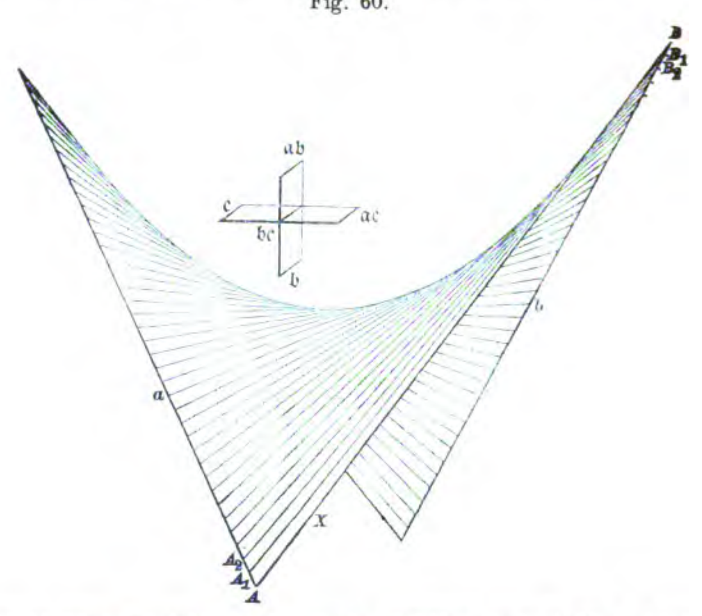
**141.** 7) *Die parabolische Cylinderfläche.* — Durch Verschiebung einer Parabel längs einer zu ihrer Ebene senkrechten Geraden entsteht die parabolische Cylinderfläche. Dieselbe bildet eine nach drei Seiten offene und ins Unendliche sich erstreckende Fläche, welche keinen Mittelpunkt besitzt.

## III. Die windschiefe Fläche.

**142.** 8) *Das hyperbolische Paraboloid.* — Die Entstehung und die wesentlichen Eigenschaften des hyperbolischen Paraboloids wurden bereits in Nr. 135, 3) beschrieben. Es ist noch

hinzuzufügen, dass, wenn in Fig. 60 𝔞 die Ebene des Papiers, 𝔟 und 𝔠 zwei darauf senkrechte, bezw. durch die Geraden 𝔞𝔟

Fig. 60.




und 𝔞𝔠 gehende Ebenen bedeuten, alsdann die Fläche von den Ebenen 𝔞 und 𝔟 in Parabeln, von 𝔠 in einer Hyperbel geschnitten wird. Die Fläche besitzt keinen Mittelpunkt, aber durch jeden ihrer Punkte gehen zwei Geraden.

# Uebungssätze und Aufgaben.

## Reine Stereometrie.

### 1. Die Ebene.

*Sätze.* — 1. Zwei Punkte haben von einer Ebene gleichen Abstand, wenn zwei aus ihnen nach der Ebene unter gleichen Neigungswinkeln gezogene Strecken einander gleich sind. — 2. Steht eine Gerade auf einer Ebene senkrecht, so ist jede auf der Geraden errichtete Senkrechte der Ebene parallel. — 3. Ist eine von mehreren Parallelen einer Ebene parallel, so sind auch die andern der Ebene parallel. — 4. Ist eine Gerade einer Ebene parallel, so sind alle von Punkten der Geraden auf die Ebene gefällten Senkrechten einander gleich. — 5. Ist eine Gerade einer Ebene parallel, so sind alle von Punkten der Geraden nach der Ebene gezogenen parallelen Strecken einander gleich. — 6. Ist eine Gerade einer Ebene parallel, so liegt jede durch einen Punkt der Ebene zu der Geraden gezogene Parallele in dieser Ebene. — 7. Die Ebene des Neigungswinkels zweier Ebenen steht senkrecht zur Schnittlinie derselben. — 8. Jede zur Schnittlinie zweier Ebenen senkrechte Ebene schneidet dieselben in Schenkeln eines Neigungswinkels. — 9. Wenn eine Ebene und eine Gerade auf einer andern Ebene senkrecht stehen, so sind sie parallel. — 10. Alle durch einen Punkt ausserhalb einer Ebene zu dieser gezogenen Parallelen liegen in einer zu der gegebenen Ebene parallelen Ebene. — 11. Haben mehrere nicht in einer Geraden liegende Punkte gleichen Abstand von einer Ebene, und liegen ausserdem auf derselben Seite der Ebene, so liegen sie in einer zu der gegebenen Ebene parallelen Ebene. — 12. Die Verbindungsstrecke zweier Punkte, welche auf entgegengesetzten Seiten einer Ebene liegen, und gleichen Abstand von derselben haben, wird durch die Ebene halbiert. — 13. Werden zwei Ebenen von Geraden geschnitten, die durch einen Punkt gehen,

so sind die Figuren, welche in jeder Ebene durch Verbindung der entsprechenden Schnittpunkte entstehen, kollinear, wenn die Ebenen sich schneiden, ähnlich, wenn sie parallel sind. Werden zwei Ebenen von parallelen Geraden geschnitten, so sind die Figuren, welche in jeder Ebene durch Verbindung der entsprechenden Schnittpunkte entstehen, affin, wenn die Ebenen sich schneiden, kongruent, wenn sie parallel sind. — 14. In jeder dreiseitigen Ecke, die einen rechten Winkel enthält, ist der Cosinus der dem rechten Winkel gegenüberliegenden Seite gleich dem Produkte der Cosinus der beiden anderen Seiten.

*Aufgaben.* — In einer Ebene eine Gerade so zu ziehen, dass jeder Punkt dieser Geraden von zwei ausserhalb der Ebene gegebenen Punkten 15) gleichen, 16) einen gegebenen Abstand hat. — In einer Ebene diejenige Gerade zu ziehen, welche von einem ausserhalb der Ebene gegebenen Punkte eine gegebene Entfernung hat und 17) durch einen gegebenen Punkt geht, 18) einer in der Ebene gegebenen Geraden parallel ist. — 19) Durch den Schnittpunkt einer Geraden und einer Ebene in der letzteren eine Gerade zu ziehen, welche mit der ersteren einen gegebenen Winkel bildet. — 20) Durch einen gegebenen Punkt eine Gerade so zu ziehen, dass sie zwei gegebene windschiefe Geraden schneidet. — 21) Zwischen zwei windschiefen Geraden diejenige Gerade zu ziehen, welche einer gegebenen Geraden parallel ist. — 22) Eine Gerade zu ziehen, welche von drei im Raume gegebenen parallelen Geraden gleichen Abstand hat. — 23) Durch eine gegebene Gerade eine Ebene so zu legen, dass sie von einem gegebenen Punkte einen gegebenen Abstand hat. — 24) Durch einen gegebenen Punkt eine Ebene so zu legen, dass sie von einer gegebenen Geraden einen gegebenen Abstand hat. — 25) Eine Gerade so zu ziehen, dass sie auf zwei gegebenen windschiefen Geraden senkrecht steht. — Durch einen gegebenen Punkt eine Ebene so zu legen, dass sie 26) auf zwei gegebenen Ebenen senkrecht steht, 27) von drei gegebenen Punkten gleichen Abstand hat. — 28) Eine Gerade parallel zu zwei gegebenen Ebenen so zu ziehen, dass sie von jeder einen gegebenen Abstand hat. — Aus einem gegebenen Punkte nach einer gegebenen Ebene eine Strecke so zu ziehen, dsss sie einer anderen gegebenen Ebene parallel ist und 29) eine gegebene Länge hat, 30) mit der ersten Ebene einen gegebenen Winkel bildet. — 31) Durch einen gegebenen Punkt diejenige Ebene zu legen, welche zu zwei gegebenen windschiefen Geraden parallel ist.

## 2. Der Körper.

*Sätze.* — **32.** Verbindet man jeden Eckpunkt eines Tetraeders mit dem Schnittpunkt der Mittellinien der gegenüberliegenden Seite, so gehen diese vier Geraden durch einen Punkt und teilen sich im Verhältnis 1 : 3. — 33. Die Halbierungsebenen der Winkel eines Tetraeders schneiden sich in einem Punkte, welcher von den Seiten des Tetraeders gleichweit entfernt ist. — 34. Errichtet man Senkrechten in den Mittelpunkten der den Seiten eines Tetraeders umbeschriebenen Kreise, so schneiden sich diese Senkrechten in einem Punkte, welcher von den Ecken des Tetraeders gleichweit entfernt ist. — 35. Die in den Mitten der Kanten eines Tetraeders senkrecht auf ihnen errichteten Ebenen schneiden sich in einem Punkte. — 36. Die Verbindungsstrecken der Mitten je zweier gegenüberliegender Kanten eines Tetraeders schneiden sich in demselben Punkte wie die in A. 32 erwähnten Geraden. — 37. Vier von den Halbierungspunkten der Kanten eines Tetraeders sind Ecken eines Parallelogramms, dessen Seiten die Hälften der beiden anderen Kanten sind. — 38. Sind in einem Tetraeder zwei Paar Gegenkanten einander gleich, so sind je zwei Seiten und je zwei Ecken, die eine Kante des dritten Paares gemeinsam haben, kongruent. — 39. Sind in einem Tetraeder je zwei Paar Gegenkanten einander gleich, so sind alle Seiten und alle Ecken einander kongruent. — 40. Die sechs Winkel eines Tetraeders betragen zusammen mehr als $4R$ und weniger als $6R$. — 41. Die Halbierungsebene eines Flächenwinkels im Tetraeder teilt die gegenüberliegende Kante im Verhältnis der Flächen der den Winkel einschliessenden Seiten. — 42. Zieht man aus einer Ecke eines Tetraeders eine Gerade, welche mit den Seiten dieser Ecke gleiche Winkel bildet, und verbindet den Schnittpunkt dieser Geraden und der gegenüberliegenden Seite ($a$) mit den drei anderen Eckpunkten des Tetraeders, so zerfällt die Seite $a$ in drei Dreiecke, deren Flächen sich verhalten wie die anstossenden Seiten des Tetraeders. — 43. Sind aus den Eckpunkten ($A$, $B$, $C$, $D$) eines Tetraeders durch einen Punkt ($M$) innerhalb desselben Geraden gezogen, welche die gegenüberliegenden Seiten in den Punkten $A_1$, $B_1$, $C_1$, $D_1$ schneiden, so ist $\frac{MA_1}{AA_1} + \frac{MB_1}{BB_1} + \frac{MC_1}{CC_1} + \frac{MD_1}{DD_1} = 1$. — 44. Ein Tetraeder wird durch jede Ebene halbiert, welche durch die Halbierungspunkte zweier Paare von Gegenkanten gelegt ist. —

45. Sind in einem Tetraeder je zwei Gegenkanten einander gleich, so ist jede der äusseren Berührungskugeln achtmal so gross als die innere.

**46.** Die Summe aller Raumwinkel in einer Säule beträgt $12R$. — 47. In einem $n$-seitigen Prisma beträgt die Summe der Raumwinkel an den Seitenkanten $(2n-4)R$, an den Grundkanten $2nR$. — 48. Trägt man von einem Eckpunkt eines Würfels, dessen Kante $a+b$ ist, auf den drei anstossenden Kanten gleiche Stücke $b$ ab, und legt durch jeden Endpunkt eines Kantenstücks eine zu der Ebene der beiden andern Kanten parallele Ebene, so zerfällt der Würfel in 8 Körper, nämlich zwei Würfel ($a^3$ und $b^3$), 3 kongruente rechteckige Säulen ($a^2b$) und drei andere kongruente rechteckige Säulen ($ab^2$).*) — 49. Legt man durch die drei Seitenkanten eines dreiseitigen Prismas drei Ebenen, welche entweder die an diesen Kanten liegenden Raumwinkel oder die gegenüberliegenden Seiten halbieren, oder auf letzteren senkrecht stehen, so schneiden sich diese drei Ebenen jedesmal in einer Geraden. — 50. Verbindet man die Eckpunkte einer Grundfläche des dreiseitigen Prismas mit den Mitten der gegenüberliegenden Kanten der andern Grundfläche, so schneiden sich diese drei Geraden in einem Punkte und teilen sich im Verhältnis von 1 : 2.

**51.** In jedem Polyeder ist die Anzahl der Kanten halb so gross als die Anzahl der Kantenwinkel.

## Rechnende Stereometrie.

### 1. Das Prisma und die Pyramide.

*Aufgaben.* — Kante, Oberfläche und Volumen eines Würfels zu berechnen, wenn gegeben ist 52) eine Diagonalaxe, 53) der Umfang eines Diagonalschnittes, 54) der Inhalt eines Diagonalschnittes. — 55) In einer geraden quadratischen Pyramide, deren Grundkante gleich $a$ und deren Höhe gleich $h$ ist, steht ein Würfel so, dass vier seiner Eckpunkte in der Grundfläche, und die vier andern in den Seitenkanten der Pyramide liegen. Wie gross ist die Kante des Würfels? — 56) Dieselbe Aufgabe, wenn die Seitenflächen der Pyramide gleichseitige Dreiecke sind. — 57) Dieselbe Aufgabe, wenn die oberen Eckpunkte des Würfels auf den Mittellinien der Seitenflächen

*) Dieser Satz enthält die Interpretation der Formel für $(a+b)^3$ (T. I, 44). Wie lautet der aus der Formel für $(a-b)^3$ folgende Satz?

liegen. — 58) Ein gleichseitiges Dreieck ist gleichzeitig die Grundfläche eines geraden Prismas und einer geraden Pyramide von gleicher Höhe. Wie gross ist diese Höhe, wenn die Seitenfläche des Prismas $n$-mal so gross ist als die der Pyramide? — 59) Dieselbe Aufgabe, wenn statt des gleichseitigen Dreiecks ein regelmässiges Polygon (grosser Radius $= r$) gegeben ist. — 60) Wie gross ist $n$ in Aufgabe 58, wenn die Pyramide ein regelmässiges Tetraeder ist? — 61) In einem Würfel mit der Kante $a$ ist eine Schnittebene durch den Mittelpunkt, senkrecht zu einer Diagonalaxe, gelegt. Wie gross ist Umfang und Inhalt der Schnittfigur? — 62) Von einem Würfel mit der Kante $a$ sind sämtliche Ecken durch Ebenen abgeschnitten, welche durch die Mitten je dreier Kanten gehen. Wie gross sind die Kanten, die Oberfläche und der Inhalt des so entstandenen Körpers (Kubooktaeders)? — 63) Die Seitenfläche einer geraden regelmässigen dreiseitigen Pyramide ist $n$-mal so gross als die Grundfläche. Welchen Winkel bilden die beiden Flächen mit einander? — 64) Die Grundfläche eines Tetraeders ist ein gleichschenklig rechtwinkliges Dreieck, dessen Katheten gleich $a$ sind; die Spitze liegt senkrecht über dem Schnittpunkte der Mittellinien der Grundfläche. Wenn dann die Höhe des Tetraeders gleich $h$ ist, welche Winkel bilden die Seitenflächen mit der Grundfläche und die Seitenkanten mit den Grundkanten? Wie gross ist die Gesamtoberfläche des Tetraeders? — 65) In einem geraden regelmässigen dreiseitigen Prisma ist eine Ebene durch eine Grundkante $a$ unter dem Winkel $\alpha$ gegen die Grundfläche gelegt. Wie gross ist der Inhalt der Schnittfigur? — 66) In einem regelmässigen Tetraeder ist eine Ebene durch die Mitte einer Seitenkante und durch die gegenüberliegende Grundkante gelegt. Welchen Winkel bildet diese Ebene mit der Grundfläche? — 67) Von der grossen Pyramide zu Ghizeh, deren Grundfläche ein Quadrat ist, sagt Herodot, dass das Quadrat ihrer Höhe gleich jeder Seitenfläche sei. Wie gross ist hiernach jeder Basiswinkel in den vier kongruenten gleichschenkligen Dreiecken, welche ihre Seitenflächen bilden? Wie verhält sich der Umfang ihrer Grundfläche zur Höhe?

68) Wie gross ist die Oberfläche einer geraden Säule mit quadratischer Grundfläche, deren Grundkanten gleich $a$ und deren Seitenkanten gleich $b$ sind? — 69) Wie gross ist die Oberfläche und das Volumen eines geraden regelmässigen sechsseitigen Prismas, dessen Grundkanten gleich $a$ und dessen

Seitenkanten gleich $b$ sind? — 70) Wie gross ist die Oberfläche einer geraden Säule mit quadratischer Grundfläche, wenn der Umfang eines Diagonalschnittes und eine Diagonalaxe gegeben ist? — 71) Von einer rechteckigen Säule sind die Verhältnisse der drei in einer Ecke zusammentreffenden Kanten und eine Diagonale der Grundfläche gegeben. Wie gross ist ihre Oberfläche und ihr Volumen? — 72) Durch eine rechteckige Säule mit quadratischer Grundfläche und den Kanten $a$ und $b$ ist ein ebener Schnitt gelegt, welcher durch eine Kante der oberen Grundfläche geht und mit letzterer einen Winkel von $45^0$ bildet. Wie gross ist die Oberfläche des unteren Körpers? — 73) Aus einem geraden regelmässigen dreiseitigen Prisma, dessen Grundkante gleich $a$ ist, ist durch zwei parallele Ebenen ein schiefes Prisma ausgeschnitten, dessen Seitenkante gleich $b$ ist. Welchen Inhalt haben die Seitenflächen des letzteren? — 74) Aus der Oberfläche eines geraden regelmässigen zehnseitigen Prismas, dessen Seitenkanten den Grundkanten gleich sind, eine Kante zu berechnen. — 75) In eine rechteckige Säule mit quadratischer Grundfläche ist eine zweite so beschrieben, dass ihre Eckpunkte die Grundkanten der ersteren halbieren. Es soll die Oberfläche der letzteren aus den Kanten der ersteren berechnet werden. — 76) Das Volumen einer Säule zu berechnen aus den Grundkanten, dem von ihnen eingeschlossenen Winkel und der Höhe. — 77) Aus dem Volumen und der Höhe einer rechteckigen Säule mit quadratischer Basis die Grundkante und die Oberfläche zu berechnen. — 78) In einem regelmässigen dreiseitigen Prisma ist die Höhe gleich einer Grundkante ($a$); wie gross ist sein Volumen? — 79) Wie gross ist das Volumen einer rechteckigen Säule, deren Diagonalschnitt ein Quadrat mit dem Inhalt $f^2$ ist, und deren Grundkanten sich wie $a:b$ verhalten? — 80) Wie gross ist das Volumen eines dreiseitigen Prismas, dessen Seitenkanten gleich $d$ sind und mit der Grundfläche den Winkel $\varphi$ bilden, wenn von der Grundfläche die Stücke $\alpha$, $\beta$, $r$ gegeben sind? — 81) Durch die Grundkante eines Würfels, dessen Diagonalaxe $d$ gegeben ist, ist ein Schnitt gelegt, welcher mit der Grundfläche einen Winkel $\varphi$ ($> 45^0$) bildet. Wie gross ist das Volumen des abgeschnittenen dreiseitigen Prismas? — 82) Wie gross muss in A. 81 der Winkel $\varphi$ sein, damit die beiden Teile des Würfels sich wie $m:n$ verhalten? — 83) Wie gross ist in A. 81 der Winkel $\varphi$, wenn die Kante des Wür-

fels gleich $a$ und die Gesamtoberfläche des dreiseitigen Prismas gleich $f^2$ gegeben ist? — 84) Wie gross ist das Volumen einer rechteckigen Säule, wenn die Differenzen zwischen der Höhe und den beiden Grundkanten gegeben sind, und ausserdem der Winkel, welchen die Diagonale der Grundfläche mit der grösseren Grundkante bildet? — 85) In einer geraden Säule, deren Höhe gleich der Summe der beiden Diagonalen der Grundfläche ist, und von welcher man das Volumen kennt, sind durch zwei gegenüberliegende Seitenkanten zwei Schnitte mit dem Flächeninhalt $f_1^2$ und $f_2^2$ gelegt. Welchen Winkel bilden diese Schnitte mit einander? — 86) Die Grundfläche eines geraden Prismas ist ein gleichschenkliges Dreieck mit dem Winkel $\alpha$ an der Spitze. Ein durch die Basis dieses Dreiecks und die gegenüberliegende Ecke des Prismas gelegter Schnitt bildet ein gleichschenkliges Dreieck mit den Schenkeln $d$ und dem Winkel $\varphi$ an der Spitze. Wie gross ist das Volumen des Prismas? — 87) In eine rechteckige Säule, deren Kanten gegeben sind, ist eine zweite so konstruiert, dass die Eckpunkte ihrer Grundflächen die Grundkanten der ersteren halbieren. In die zweite ist ebenso eine dritte konstruiert, u. s. f. bis ins Unendliche. Wie gross ist die Summe der Volumina aller dieser Körper?

88) Wie gross ist die Oberfläche einer geraden regelmässigen sechsseitigen Pyramide, wenn die Grundkante $a$ und die Höhe $h$ ist? — 89) Von einer geraden regelmässigen dreiseitigen Pyramide, deren Höhe doppelt so gross als eine Grundkante ist, kennt man die Oberfläche; wie gross ist die Grundkante? — 90) Von einem Pyramidenstumpf mit quadratischen Grundflächen kennt man den Inhalt der kleineren Grundfläche, die Höhe des Stumpfes und die Höhe der ganzen Pyramide. Wie gross ist die Oberfläche des Stumpfes? — 91) Wie gross ist die Oberfläche einer geraden Pyramide mit quadratischer Grundfläche, wenn der Inhalt eines durch zwei gegenüberliegende Seitenkanten gehenden Schnittes und der Umfang der Grundfläche gegeben ist? — 92) Wie gross ist die Oberfläche einer geraden regelmässigen dreiseitigen Pyramide, wenn die Höhe $h$ und eine Seitenkante $s$ gegeben ist? — 93) Ueber der einen Grundfläche einer geraden Säule mit quadratischer Basis ist eine Pyramide so konstruiert, dass ihre Spitze in der Mitte der anderen Grundfläche liegt. Wie gross ist die Oberfläche der Pyramide, wenn die Kanten der Säule gegeben sind? — 94) Ueber einem regelmässigen Fünfeck als Grundfläche sind

nach beiden Seiten hin gerade Pyramiden (eine Doppelpyramide) konstruiert. Wie gross ist die Oberfläche der Doppelpyramide, wenn der Abstand ihrer Spitzen und eine Seitenkante gegeben sind? — 95) Wie gross ist die Oberfläche eines Tetraeders, von dem man die Grundkanten, die Höhe, und die Abstände des Fusspunktes der Höhe von den Ecken der Grundfläche kennt? — 96) Eine rechte Ecke ist durch eine Ebene so geschlossen, dass die Schnittfigur ein gleichseitiges Dreieck ist. Wie gross ist die Oberfläche der so entstandenen regelmässigen Pyramide, wenn eine Grundkante gegeben ist? — 97) Die in A. 96 beschriebene Pyramide ist durch einen Parallelschnitt abgestumpft. Wie gross ist die Oberfläche des Pyramidenstumpfes, wenn die untere und die obere Grundkante gegeben sind? — 98) Wie gross ist die Höhe einer geraden Pyramide mit quadratischer Grundfläche, wenn jede Seitenfläche der $n^{te}$ Teil der Grundfläche ist? — 99) Eine rechte Ecke soll durch ein gegebenes schiefwinkliges Dreieck geschlossen werden. Wie gross werden die Seitenkanten und die Höhe der so entstehenden Pyramide sein? — Wie gross ist das Volumen einer Pyramide, wenn gegeben ist 100) die Grundfläche ein Rechteck mit den Seiten $a$ und $b$, und die Höhe $h$, 101) die Grundfläche ein Quadrat mit dem Inhalt $f^2$ und alle Seitenkanten gleich $b$, 102) die Grundfläche ein Dreieck mit den Seiten $a$, $b$, $c$, und die Höhe $h$, 103) die Grundfläche ein regelmässiges Sechseck mit der Seite $a$, und alle Seitenkanten gleich $b$, 104) die Grundfläche ein Quadrat mit der Seite $a$, und die Fläche eines durch die Spitze und eine Diagonale der Grundfläche senkrecht zu letzterer gelegten Schnittes $f^2$, 105) die Grundfläche ein Sehnenviereck mit den Seiten $a$, $b$, $c$, $d$, und die Höhe $h$. — 106) Wie gross ist das Volumen einer geraden regelmässigen dreiseitigen Pyramide, wenn jede Seitenfläche $n$-mal so gross als die Grundfläche, und der Radius $\varrho$ des Inkreises der Grundfläche gegeben ist? — 107) Wie gross ist die Fläche eines zur Grundfläche einer Pyramide parallel gelegten Schnittes, wenn der Abstand desselben von der Grundfläche der $n^{te}$ Teil der Höhe ist, und wenn diese Höhe $h$ und das Volumen der Pyramide gegeben sind? — 108) Von einer geraden Pyramide mit quadratischer Basis ist das Volumen und der Inhalt eines durch zwei gegenüberliegende Seitenkanten gelegten Schnittes gegeben. Wie gross ist der Neigungswinkel der Seitenflächen gegen die Grundfläche? — 109) Von einer geraden Pyramide mit quadratischer Basis ist der Inhalt einer Seitenfläche und

eines durch zwei gegenüberliegende Seitenkanten gelegten Schnittes gegeben. Wie gross ist das Volumen und der Neigungswinkel der Seitenflächen gegen die Grundfläche? — 110) Aus einer quadratischen Pyramide mit der Höhe $h$ wird eine gleich hohe quadratische Pyramide herausgenommen. Der Neigungswinkel der Seitenflächen gegen die Grundfläche ist in der ersteren $\alpha$, in der letzteren $2\alpha$. Wie gross ist das Volumen des übrig bleibenden Körpers? — 111) Wie gross ist das Volumen einer fünfseitigen Pyramide, deren Kanten alle gleich $a$ sind? — 112) Wie gross ist das Volumen einer Pyramide, deren Grundfläche ein regelmässiges Fünfeck mit der Seite $a$, und deren Höhe $h$ ist? — 113) Wie gross ist das Volumen einer Pyramide, wenn ihre Höhe $h$, und der Inhalt eines durch die Mitte der Höhe parallel zur Grundfläche geführten Schnittes $f^2$ ist? — 114) Wie gross ist Oberfläche und Volumen einer vierseitigen Pyramide, deren Kanten alle gleich $a$ sind? — 115) Wie gross ist das Volumen eines Tetraeders, von welchem drei in einem Eckpunkte zusammentreffende Kanten und die Winkel, welche diese Kanten mit einander bilden, gegeben sind?

**116)** Wie gross ist das Volumen eines Pyramidenstumpfes, von welchem die Grundflächen und die Höhe der Ergänzungspyramide*) gegeben sind? — 117) Wie gross ist das Volumen eines dreiseitigen Pyramidenstumpfes, von welchem die Kanten ($a$, $b$, $c$) der unteren, eine Kante ($a_1$) der oberen Grundfläche, und die drei einander gleichen Seitenkanten ($s$) gegeben sind? — 118) Von einem Pyramidenstumpf sind die Grundflächen und das Volumen gegeben. Wie gross ist das Volumen der Ergänzungspyramide? — 119) Von einem Pyramidenstumpf ist das Volumen, die Höhe und der Inhalt der grösseren Grundfläche gegeben. Wie gross ist der Inhalt der kleineren Grundfläche? — 120) Wie verhält sich das Volumen eines Pyramidenstumpfes zu dem der Ergänzungspyramide, wenn seine Grundflächen sich wie $m^2 : n^2$ verhalten? — 121) In welchem Verhältnis muss die Höhe einer Pyramide durch einen zur Grundfläche parallelen Schnitt geteilt werden, damit die abgeschnittene Pyramide den $n^{\text{ten}}$ Teil der ganzen betrage? — 122) In welchem Verhältnis wird ein Pyramidenstumpf, dessen

---

*) D. i. die Pyramide, welche den Pyramidenstumpf zu einer vollständigen Pyramide ergänzt.

Grundflächen regelmässige Sechsecke mit den Seiten $a$ und $b$ sind, und dessen Höhe $h$ ist, durch einen mit den Grundflächen parallelen, die Höhe halbierenden Schnitt geteilt? — 123) Das Volumen eines Pyramidenstumpfes, dessen Höhe $h$ ist, ist gleich dem seiner Ergänzungspyramide. Wie gross ist die Höhe der letzteren? — 124) Von einem Pyramidenstumpf ist das Volumen, die Höhe und die Differenz der Grundflächen gegeben. Wie gross sind die letzteren?

## 2. Der Cylinder.

*Aufgaben.* — 125) Von einem schiefen Cylinder ist der Radius des Grundkreises, die Axe und der Neigungswinkel der Axe gegen die Grundfläche gegeben. Wie gross ist der Inhalt des Hauptschnittes? — 126) In einem schiefen Cylinder, von welchem der Radius des Grundkreises, die Axe und der Neigungswinkel der Axe gegen die Grundfläche gegeben ist, bildet der Neigungsschenkel der Axe mit dem zu einem Axenschnitte gehörigen Radius der Grundfläche einen gegebenen Winkel. Welchen Inhalt hat dieser Axenschnitt?

127) In welchem Verhältnis wird der Mantel eines geraden Cylinders durch eine Ebene geteilt, welche senkrecht zu einem Axenschnitt durch dessen Diagonale gelegt ist? — 128) Von einem geraden Cylinder ist durch eine mit den Grundflächen nicht parallele Ebene ein Stück so abgeschnitten, dass $a$ die grösste und $b$ die kleinste Seitenlinie des übrig gebliebenen Körpers ist. Wenn dann $r$ der Radius des Grundkreises ist, wie gross ist die Mantelfläche des Restkörpers? — 129) Dieselbe Aufgabe, wenn beide Grundflächen des Cylinders durch schiefe Schnitte abgeschnitten sind. — Wie gross ist der Mantel eines geraden Cylinders, der einem gegebenen Würfel mit der Kante $a$ 130) einbeschrieben, 131) umbeschrieben ist? — 132) Wie gross ist die Höhe eines geraden Cylinders, dessen Mantel gleich der Summe der Mäntel dreier gegebener Cylinder, und dessen Grundfläche einem gegebenen gleichseitigen Dreieck mit der Seite $a$ einbeschrieben ist? — 133) Wie gross ist die Grundkante einer rechteckigen Säule mit quadratischer Grundfläche, wenn diese Säule mit einem gegebenen geraden Cylinder gleiche Höhe und Gesamtoberfläche hat? — 134) Aus einem geraden Cylinder, von dem der Radius der Grundfläche $r$ gegeben ist, ist durch zwei parallele, zur

Grundfläche schiefe Schnitte ein Cylinder herausgeschnitten, dessen Seitenlinie $a$ ist. Wie gross ist der Mantel des ausgeschnittenen Cylinders? — 135) Von einem geraden Cylinder ist der Mantel und die Diagonale $d$ eines Axenschnittes gegeben. In den Cylinder ist eine regelmässige gerade achtseitige Pyramide beschrieben. Wie gross ist deren Grundkante? (Specieller Fall: der Mantel des Cylinders ist gleich der Fläche eines Kreises mit dem Radius $\frac{1}{2}d$.) — 136) Ein gerader Cylinder, dessen Axenschnitt ein Quadrat, und in dem der Radius des Grundkreises $r$ ist, ist durch eine gerade Cylinderfläche, die mit der ersten dieselbe Axe hat, ausgehöhlt. Wenn die Mäntel der beiden Cylinderflächen sich wie $m:n$ verhalten, wie gross ist die Gesamtoberfläche des ausgehöhlten Cylinders? — 137) Drei gerade Cylinder stehen so auf einander, dass ihre Axen auf derselben Geraden liegen. Wenn nun der Axenschnitt des untersten ein Quadrat mit der Fläche $f^2$ ist, wenn ferner die Höhe in jedem folgenden doppelt so gross, und der Radius des Grundkreises in jedem folgenden halb so gross ist als im vorhergehenden, wie gross ist dann die Gesamtoberfläche des Gesamtkörpers?

**138)** Wie gross ist das Volumen einer cylindrischen Röhre, deren Höhe $h$, und deren Radien $r$ und $\varrho$ sind? — 139) Wie dick ist die Seitenwand einer cylindrischen Röhre, wenn ihr Volumen $\mathfrak{V}$, der grössere Radius $r$ und die Höhe $h$ gegeben sind? — Wenn $f^2$ der Mantel, $r$ der Radius der Grundfläche, $h$ die Höhe und $\mathfrak{V}$ das Volumen eines geraden Cylinders ist, so soll man berechnen 140) $\mathfrak{V}$ aus $f^2$ und $r$, 141) $\mathfrak{V}$ aus $f^2$ und $h$, 142) $f^2$ aus $\mathfrak{V}$ und $r$, 143) $f^2$ aus $\mathfrak{V}$ und $h$. — 144) Wie gross ist das Volumen eines Cylinders, dessen Axe $a$ mit der Grundfläche den Winkel $\varphi$ bildet, wenn der Inhalt des Hauptschnittes $f^2$ ist? — 145) In einen Würfel lassen sich zwei Arten gerader Cylinder so konstruieren, dass die Mittelpunkte der 6 Würfelflächen auf der Oberfläche eines Cylinders liegen. Wie verhalten sich die Volumina der beiden Cylinder? — 146) In einen geraden Cylinder, von dem $r$ und $h$ gegeben sind, ist ein Pyramidenstumpf so beschrieben, dass seine untere Grundfläche ein der Grundfläche des Cylinders einbeschriebenes Quadrat ist, während seine obere Grundfläche mit der des Cylinders in derselben Ebene liegt. Wenn dann alle Seitenkanten mit den Grundkanten Winkel von $\frac{2}{3}R$ bilden, um wieviel unterscheiden sich die Volumina beider Körper? —

147) Wie gross ist das Volumen eines geraden Cylinders, von dem die Gesamtoberfläche und die Summen von Seite und Radius gegeben sind? — 148) Wie gross ist das Volumen eines schief abgeschnittenen Cylinders (vgl. A. 128), wenn der Radius des Grundkreises, die grösste und die kleinste Seitenlinie gegeben sind? — 149) Von einem geraden Cylinder ist $h$ und $r$ gegeben. Ein anderer, dem ersten nicht kongruenter, gerader Cylinder hat mit ihm gleiches Volumen und gleiche Gesamtoberfläche. Wie gross ist Höhe und Radius dieses zweiten? — 150) Von einem geraden Cylinder ist $h$ und $r$ bekannt. Ein Schnitt parallel der Axe und um $\frac{1}{2} r$ von ihr entfernt, teilt den Cylinder in zwei Teile. Wie gross ist das Volumen des kleineren Teils? — 151) In einem geraden Cylinder, dessen Mantel $f^2$ ist, bilden die Diagonalen des Axenschnittes den spitzen Winkel $\alpha$. Wie gross ist das Volumen des Cylinders? — 152) Von einem geraden dreiseitigen Prisma ist gegeben die Höhe $h$ und zwei Winkel der Grundfläche, $R$ und $\alpha$. Wie gross ist die Summe seiner Seitenflächen, wenn der Mantel des ihm einbeschriebenen Cylinders $f^2$ ist? — 153) Von einem geraden dreiseitigen Prisma, dessen Höhe gleich dem Radius des Umkreises der Grundfläche ist, sind zwei Winkel der Grundfläche und das Volumen gegeben. Wie gross ist der Mantel des dem Prisma umbeschriebenen Cylinders? — 154) In ein regelmässiges Tetraeder mit der Kante $a$ ist ein Cylinder so einbeschrieben, dass die Grundflächen in eine Ebene fallen. Wenn dann die halbe Axe des Cylinders dem Radius der Grundfläche gleich ist, wie gross ist dieser Radius? — 155) Von einem dreiseitigen Prisma ist die Grundfläche durch die Stücke $a$, $b$, $\alpha$ und das Volumen gegeben. Wie gross ist das Volumen des dem Prisma umbeschriebenen Cylinders? — 156) In ein dreiseitiges Prisma, dessen Grundkanten $a$, $b$, $c$ gegeben sind, ist ein Cylinder beschrieben, dessen Seitenlinie $s$ mit der Grundfläche den Winkel $\varphi$ bildet. Wie gross ist sein Volumen? — 157) Eine cylindrische Röhre, deren Grundfläche $g^2$ ist, deren Axe $a$ mit der Grundfläche den Winkel $\varphi$ bildet, und in der die Radien der Grundfläche ($r$ und $\varrho$) sich wie $m : n$ verhalten, wird in ein regelmässiges Tetraeder verwandelt. Wie gross ist die Oberfläche desselben, und wie verhält sich $r$ zur Kante des Tetraeders?

## 3. Der Kegel.*)

*Aufgaben.* — Im schiefen Kegel soll berechnet werden **158)** $r$ aus $s$, $\sigma$, $a$, 159) $a$ aus $s$, $\sigma$, $r$, 160) $\sigma$ aus $s$, $a$, $r$, 161) $s$ aus $\sigma$, $a$, $r$, 162) $h$, $s$, $\sigma$ aus $a$, $\varphi$, $r$, 163) $\varphi$, $s$, $\sigma$, $\beta$ aus $a$, $h$, $r$, 164) $h$, $\varphi$, $r$ aus $s$, $\sigma$, $\beta$, 165) $s$, $\sigma$, $\varphi$, $h$ aus $a$, $r$, $\beta$, 166) $s$, $\sigma$ aus $a$, $r^2\pi$, $\alpha$.

Im geraden Kegel oder Kegelstumpf soll berechnet werden **167)** $r$ aus $f^2$, $s$, 168) $s$ aus $f^2$, $r$, 169) $f^2$ aus $r$, $h$, 170) $f^2$ aus $s$, $h$, 171) $h$ aus $f^2$, $r$, 172) $h$ aus $s$, $f^2$, 173) $r$ aus $f^2$, $h$, 174) $s$ aus $f^2$, $h$,

$f^2$ aus **175)** $h$, $h_1$, $s_1$, 176) $r$, $\varrho$, $s_1$, 177) $r$, $s_1$, $h_1$, 178) $r$, $\varrho$, $h_1$, 179) $h$, $h_1$, $\varrho$, 180) $\varrho$, $s_1$, $h_1$, 181) $s$, $s_1$, $\varrho$, 182) $s$, $s_1$, $h_1$,

**183)** $h$ aus $f^2$, $h_1$, $s_1$, 184) $h_1$ aus $h$, $f^2$, $s_1$, 185) $s_1$ aus $f^2$, $h$, $h_1$, 186) $s_1$ aus $f^2$, $r$, $\varrho$, 187) $\varrho$ aus $r$, $f^2$, $s_1$, 188) $r$ aus $f^2$, $\varrho$, $s_1$, 189) $r$ aus $f^2$, $s_1$, $h_1$, 190) $s_1$ aus $f^2$, $h_1$, $r$, 191) $h_1$ aus $f^2$, $r$, $s_1$, 192) $h_1$ aus $f^2$, $r$, $\varrho$, 193) $\varrho$ aus $f^2$, $r$, $h_1$, 194) $h_1$ aus $f^2$, $h$, $\varrho$, 195) $\varrho$ aus $f^2$, $h$, $h_1$, 196) $\varrho$ aus $f^2$, $s_1$, $h_1$, 197) $h_1$ aus $f^2$, $\varrho$, $s_1$, 198) $\varrho$ aus $f^2$, $s$, $s_1$, 199) $s_1$ aus $f^2$, $s$, $\varrho$, 200) $s$ aus $f^2$, $\varrho$, $s_1$, 201) $s$ aus $f^2$, $s_1$, $h_1$, 202) $h_1$ aus $f^2$, $s$, $s_1$, 203) $s_1$ aus $f^2$, $s$, $h_1$,

${f_1}^2$ aus **204)** $s$, $s_1$, $\varrho$, 205) $\varrho$, $s_1$, $h_1$, 206) $r$, $s_1$, $h_1$, 207) $r$, $\varrho$, $s$, 208) $h$, $h_1$, $\varrho$,

**209)** $\varrho$ aus ${f_1}^2$, $s$, $s_1$, 210) $s$ aus ${f_1}^2$, $\varrho$, $s_1$, 211) $s_1$ aus ${f_1}^2$, $s$, $\varrho$, 212) $\varrho$ aus ${f_1}^2$, $s_1$, $h_1$, 213) $h_1$ aus ${f_1}^2$, $s_1$, $\varrho$, 214) $r$ aus ${f_1}^2$, $s_1$, $h_1$, 215) $h_1$ aus ${f_1}^2$, $r$, $s_1$, 216) $s$ aus ${f_1}^2$, $r$, $\varrho$, 217) $\varrho$ aus ${f_1}^2$, $r$, $s$, 218) $r$ aus ${f_1}^2$, $s$, $\varrho$,

**219)** ${f_1}^2$ aus $f^2$, $r$, $\varrho$, 220) ${f_1}^2$ aus $f^2$, $r$, $s_1$, 221) ${f_1}^2$ aus $f^2$, $\varrho$, $s_1$.

**222)** Auf derselben Grundfläche steht ein gerader Cylinder und ein gerader Kegel von gleicher Höhe. Wie verhalten sich

---

| *) Bezeichnungen: | Vol. | Mantel | Grösste u. kleinste Seitenlinie | Radien | Axe u. Höhe |
|---|---|---|---|---|---|
| Gerader Kegel | $\mathfrak{V}$ | $f^2$ | $s$ | $r$ | $h$ |
| Gerader Kegelstumpf | $\mathfrak{V}$ | ${f_1}^2$ | $s_1$ | $r$, $\varrho$ | $h_1$ |
| Schiefer Kegel | $\mathfrak{V}$ | $f^2$ | $s$, $\sigma$ | $r$ | $a$, $h$ |
| Schiefer Kegelstumpf | $\mathfrak{V}$ | ${f_1}^2$ | $s_1$, $\sigma_1$ | $r$, $\varrho$ | $a_1$, $h_1$ |

$\varphi$ Neigungswinkel der Axe gegen die Grundfläche.
$\beta$, $\gamma$ Neigungswinkel der grössten und kleinsten Seitenlinie gegen die Grundfl.
$\alpha$ Winkel an der Spitze des Hauptschnittes.

die Mäntel beider Körper und wie gross ist die ganze Oberfläche des Gesamtkörpers? — 223) Auf den Grundflächen eines geraden Cylinders, dessen Höhe *h*, dessen Radius *r* ist, stehen zwei gerade Kegel, deren Radien und Höhen gleich *r* sind. Wie gross ist die Oberfläche des Gesamtkörpers? — 224) Um eine gerade Pyramide mit quadratischer Grundfläche, der Grundkante *a* und der Höhe *h* ist ein Kegel beschrieben. Wie gross ist dessen Mantel? — 225) Die Spitze eines Kegels liegt im Mittelpunkte der oberen Grundfläche eines geraden regelmässigen achtseitigen Prismas, von dem die Grundkante *a* und die Höhe *h* gegeben ist; die Grundfläche des Kegels ist der unteren Grundfläche des Prismas einbeschrieben. Wie gross ist der Mantel des Kegels? — 226) Der Axenschnitt eines geraden Kegels ist ein gleichseitiges Dreieck, seine Höhe gleich *h*, wie gross ist sein Mantel? — 227) In einem geraden Kegelstumpf ist der Durchmesser der oberen Grundfläche den Seitenlinien gleich. Wenn dann der Umfang eines Axenschnittes und die Höhe gegeben ist, wie gross ist der Mantel? — 228) Wie gross ist die Höhe eines geraden Kegels mit dem Radius *r*, wenn sein Mantel gleich dem eines Cylinders von halb so grosser Höhe und viermal so grosser Grundfläche ist? — 229) Um einen geraden Cylinder mit der Höhe *h* und dem Radius *r* ist ein Kegelstumpf so beschrieben, dass die oberen Grundflächen zusammenfallen, die unteren konzentrisch sind und sich wie $m^2 : n^2$ verhalten. Wie gross ist der Mantel des Kegelstumpfes und die Oberfläche des durch Herausschneiden des Cylinders aus dem Kegelstumpf entstehenden Körpers? — 230) Ein Quadrat mit der Seite *a* macht eine halbe Umdrehung um eine Diagonale. Wie gross ist der Mantel des entstehenden Doppelkegels? — 231) Dieselbe Aufgabe, wenn eine ganze Umdrehung um eine parallel zur Diagonale durch eine Ecke des Quadrats gezogene Axe stattfindet. — 232) In einen geraden Kegel ist ein gerader Cylinder konstruiert, dessen Mantel der dritte Teil des Kegelmantels ist. Wenn die Seitenlinie (4) und die Höhe (3) des Kegels gegeben ist, wie gross ist die Höhe des Cylinders? — 233) Wie gross ist der Mantel eines geraden Kegelstumpfes, dessen Axenschnitt gleich $g^2$ ist, und dessen Seitenlinie doppelt so lang als die Höhe ist? — 234) Wie verhält sich der Mantel eines geraden Kegels, dessen Axenschnitt ein gleichseitiges Dreieck ist, zu dem Mantel eines ebenso hohen Cylinders, dessen Axenschnitt ein Quadrat ist? — 235) Wie gross ist der Mantel eines geraden Kegelstumpfes,

wenn die grössere Grundfläche, $h_1$ und $\beta$ gegeben sind? — 236) Wie gross ist der Mantel eines geraden Kegelstumpfes, wenn die Differenz der Grundflächen, das Verhältnis ihrer Umfänge und $\beta$ gegeben sind?

Im geraden Kegel oder Kegelstumpf soll berechnet werden das Volumen $\mathfrak{B}$ aus **237)** $r$, $h$, 238) $r$, $s$, 239) $r$, $f^2$, 240) $s$, $f^2$, 241) $h$, $f^2$, 242) $r$, $\alpha$, 243) $s$, $\beta$, 244) $r$, $\varrho$, $h_1$, 245) $r$, $\varrho$, $s_1$, 246) $r^2\pi$, $h_1$, $\beta$, 247) $f_1{}^2$, $h_1$, $s_1$, aus der Gesamtoberfläche und 248) $r$, 249) $s$, 250) $h$, 251) aus $r$, wenn der Axenschnitt des Kegels ein gleichseitiges Dreieck ist, 252) aus dem Inhalt des Axenschnittes des Kegels und dem Inhalt seiner Grundfläche, 253) aus der Grundfläche, wenn der Mantel des Kegels, in eine Ebene aufgerollt, einen Sektor mit dem Centriwinkel $\frac{2}{3}R$ liefert, 254) aus $f_1{}^2$ und $\beta$, wenn die Grundflächen des Kegelstumpfes sich wie $m^2 : n^2$ verhalten, 255) aus $f_1{}^2$, $s_1$, $\beta$,

**256)** $r$ aus $\mathfrak{B}$, $h$, 257) $h$ aus $\mathfrak{B}$, $r$, 258) $f^2$ aus $\mathfrak{B}$, $r$, 259) $f^2$ aus $\mathfrak{B}$, $h$, 260) $\varrho$ aus $\mathfrak{B}$, $r$, $h_1$, 261) $h_1$ aus $\mathfrak{B}$, $r$, $\varrho$, 262) $r$, $\varrho$ aus $\mathfrak{B}$, $h_1$, $(r : \varrho)$, 263) $r$, $\varrho$ aus $\mathfrak{B}$, $h_1$, $(r - \varrho)$, 264) $h$, $r$ aus $\mathfrak{B}$ und der Gesamtoberfläche, 265) $\beta$ aus $\mathfrak{B}$ und dem Inhalt des Axenschnittes des Kegels, 266) $\beta$ aus $f_1{}^2$, $(r - \varrho)$, $(r : \varrho)$.

Im schiefen Kegel oder Kegelstumpf soll berechnet werden das Volumen $\mathfrak{B}$ aus **267)** $s$, $\sigma$, $r$, 268) $s$, $\sigma$, $a$, 269) $s_1$, $\sigma_1$, $r$, $\varrho$, 270) $s$, $\beta$ und dem Winkel $(sa)$, 271) $h$, wenn der Kegel einer dreiseitigen Pyramide umbeschrieben ist, deren Grundfläche durch die Stücke $a$, $b$, $\gamma$ bestimmt ist, 272) $h$, wenn der Kegel einer vierseitigen Pyramide umbeschrieben ist, deren Grundkanten $a$, $b$, $c$, $d$ sind, 273) $s$, $\sigma$, wenn der Grundkreis einem Dreieck umbeschrieben ist, von dem $c$ und $\gamma$ gegeben sind, 274) $r$, $h$, $\alpha$, 275) $r$, $\alpha$ und dem Verhältnis, in welchem $2r$ durch $h$ geteilt wird, 276) $s$, $\sigma$, $\varphi$, 277) $a$, $\varphi$, wenn die Grundfläche einem Rechteck mit den Seiten $d$, $e$ umbeschrieben ist,

**278)** $r$, $\varrho$ aus $\mathfrak{B}$, $f_1{}^2$, $h_1$.

**279)** Wie gross ist der Centriwinkel eines Sektors, der durch Zusammenrollen den Mantel eines Kegels mit dem Volumen $\mathfrak{B}$ und der Höhe $h$ liefert? — 280) Wie verhalten sich die Mäntel und wie die Volumina zweier Kegel, welche entstehen, wenn ein rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten $a$ und $b$ einmal um $a$, und das andre Mal um $b$ sich dreht? — 281) Wie verhalten sich die Volumina eines geraden Kegels, dessen Axenschnitt ein gleichseitiges Dreieck, und eines gera-

den Cylinders, dessen Axenschnitt ein Quadrat ist, bei gleicher Mantelfläche? — 282) Wie verhalten sich die Volumina zweier Kegel, welche einem regelmässigen Tetraeder um- und einbeschrieben sind? — 283) Aus einem geraden Cylinder ist ein gerader Kegel, welcher mit ihm dieselbe Grundfläche und Höhe hat, herausgeschnitten. Der übrig gebliebene Körper soll durch eine Cylinderfläche, welche mit der gegebenen dieselbe Axe hat, halbiert werden. Wie gross ist der Radius der halbierenden Fläche, wenn der der gegebenen $r$ ist? — 284) Ein gerader Kegel, von dem $r$ und $h$ gegeben sind, soll durch eine gerade Cylinderfläche, welche dieselbe Axe mit ihm hat, halbiert werden. Wie gross müssen Radius und Höhe der Cylinderfläche sein? — 285) Ueber einem Kreise mit dem Radius $r$ sind zwei gerade Kegel errichtet, deren Spitzen um die Strecke $d$ von einander entfernt sind ($d = h - h'$). Wie gross ist der von den Kegelflächen eingeschlossene Raum, und wie gross sind die Seiten der Kegel, wenn der Winkel an der Spitze des grösseren Kegels $\alpha$ ist? — Ueber einem Kreise ist ein gerader Cylinder und ein um das Volumen $v^3$ kleinerer gerader Kegel von derselben Höhe errichtet. Wie gross ist 286) der Mantel des Kegels, wenn der Winkel an seiner Spitze $\alpha$ ist, 287) die Grundfläche des Kegels, wenn die Oberfläche des Körpers, der nach Entfernung des Kegels übrig bleibt, $g^2$ ist? — 288) Wie verhält sich das Volumen eines geraden Cylinders zu dem eines geraden Kegels, wenn ihre Mäntel sich wie $m^2 : n^2$ verhalten, ihre Höhen gleich sind und vom Kegel $\beta$ gegeben ist? — 289) Wie verhalten sich die Mäntel eines geraden Kegels, dessen Axenschnitt ein gleichseitiges Dreieck, und eines geraden Cylinders, dessen Axenschnitt ein Quadrat ist, bei gleichem Volumen? — 290) In ein dreiseitiges Prisma, von welchem Umfang und Inhalt der Grundfläche und die Höhe gegeben sind, ist ein Cylinder beschrieben. Wie gross ist Grundfläche und Höhe eines geraden Kegels, dessen Axenschnitt ein gleichseitiges Dreieck ist, und der mit diesem Cylinder gleiches Volumen hat? — 291) Aus einem geraden Kegel, von welchem $r$ und $\beta$ bekannt sind, ist ein Kegel herausgeschnitten, dessen Seitenlinien denen des ersten parallel sind. Wie gross ist as Volumen der übrig bleibenden Schicht, wenn dieselbe übe all die Dicke $d$ hat? — 292) Von der in voriger Aufgabe e- schriebenen Schicht ist das Volumen, die Höhe des grösse en Kegels, und die Differenz der Radien beider Kegel gegeb n; wie gross sind diese Radien? — 293) Dieselbe Aufgabe, w m

von der Schicht das Volumen, die Dicke und der Winkel $\beta$ gegeben ist. — 294) Ein Kegel ist durch drei der Grundfläche parallele Ebenen in vier gleiche Teile geteilt. Wie verhalten sich die Höhen dieser Teile zu einander? — 295) Dieselbe Aufgabe, wenn die Teile (von der Spitze angefangen) sich wie $1:3:7:8$ verhalten. — 296) Ein Kegelstumpf, von dem $r$, $\varrho$, $h_1$ gegeben sind, soll durch eine den Grundflächen parallele Ebene halbiert werden. Wie gross ist die Fläche des halbierenden Kreises, und die Höhen der beiden Teile? — 297) Von einem geraden Kegel ist $h$ und $r$ gegeben. Ein anderer, dem ersten nicht kongruenter, gerader Kegel hat mit ihm gleiches Volumen und gleiche Mantelfläche. Wie gross sind Höhe und Radius des zweiten Kegels? — 298) Von einem geraden Kegel ist $r$, von einem geraden Cylinder $h$ gegeben. Wenn dann die Mantelflächen beider Körper gleich sind und ihre Volumina sich wie $m^3 : n^3$ verhalten, wie gross ist im Kegel $\alpha$? — 299) Der Mantel eines geraden Kegels ist $f^2$, der eines ihm einbeschriebenen geraden Cylinders $f_1{}^2$. Wenn dann die Höhen beider Körper sich wie $m : n$ verhalten, wie gross ist im Kegel $\alpha$?

## 4. Die Kugel.

*Aufgaben.* — **300)** Um ein regelmässiges Tetraeder ist eine Kugel, und in den äusseren Raum zwischen der Oberfläche der letzteren und einer Tetraederfläche ist die grösste, beide Flächen berührende Kugel beschrieben. Wie verhält sich der Radius dieser letzteren Kugel zum Radius der dem Tetraeder einbeschriebenen? — 301) Um ein gerades regelmässiges dreiseitiges Prisma, dessen Seitenflächen zusammen gleich der Summe der Grundflächen sind, ist eine Kugel beschrieben. Wie gross ist der Radius derselben, wenn eine Grundkante des Prismas $a$ ist? — 302) In jeder Grundfläche eines geraden Cylinders mit dem Radius $r$ ist ein Durchmesser so gezogen, dass die beiden durch diese Durchmesser gehenden Axenschnitte auf einander senkrecht stehen. Wenn $AB$ und $CD$ diese Durchmesser sind, und noch die Strecke $AC$ bekannt ist, wie gross ist der Radius der Kugel, welche durch die vier Punkte $A$, $B$, $C$, $D$ geht, und wie gross ist die Oberfläche des Tetraeders $ABCD$? — 303) Auf einer Ebene liegen vier gleiche Kugeln so, dass ihre Mittelpunkte ein Quadrat bilden und jede zwei der anderen berührt. Eine fünfte von gleicher Grösse liegt so auf ihnen, dass sie alle vier berührt. Wie weit ist der

Mittelpunkt der fünften von der Ebene entfernt, wenn der Radius jeder Kugel $r$ ist? — 304) In einem Würfel mit der Kante $a$ liegen zwei Kugeln, deren Radien sich wie $m:n$ verhalten, so, dass jede die andere und drei Würfelflächen berührt. Wie gross sind die Radien der Kugeln? — 305) Eine Halbkugel und ein gerader Kegel, dessen Höhe doppelt so gross ist als der Radius $r$ der ersteren, haben denselben Kreis als Grundfläche. Wie gross ist der Kreis, in welchem sich ihre Mäntel schneiden, und wie gross ist sein Abstand von der Grundfläche? — 306) Auf der Grundfläche eines Würfels liegen vier gleich grosse Kugeln, von denen jede die zwei benachbarten und drei Würfelflächen berührt. Wie gross sind die Radien der grössten und der kleinsten innerhalb des Würfels liegenden Kugel, welche die vier andern Kugeln berührt? — 307) Wie gross muss die Höhe eines geraden Kegelstumpfes mit den Radien $r$ und $\varrho$ sein, damit sich in denselben eine Kugel beschreiben lässt, welche beide Grundflächen und den Mantel berührt?

**308)** Wie gross ist Seitenlinie, Höhe, Radius, Mantel und Volumen eines geraden Kegels, von welchem $\alpha$ bekannt ist, und welcher einer Kugel vom Radius $r$ einbeschrieben ist? — 309) Aus der Oberfläche einer Kugel ihr Volumen zu berechnen. — 310) Aus dem Volumen einer Kugel ihre Oberfläche zu berechnen. — 311) Wie gross ist die Oberfläche einer Kugel, deren Volumen gleich der Summe der Volumina zweier anderer Kugeln von gegebener Oberfläche ist? — 312) Wie verhalten sich die Volumina eines Kegels, einer Halbkugel und eines Cylinders zu einander, wenn der Radius der Grundfläche und die Höhe im Kegel und Cylinder dem Radius der Halbkugel gleich sind? — 313) Wie verhalten sich die krummen Oberflächen der drei in voriger Aufgabe beschriebenen Körper? — 314) Wie verhalten sich die Volumina und die Oberflächen einer Kugel, des ihr umbeschriebenen geraden Cylinders, und desjenigen ihr umbeschriebenen geraden Kegels, dessen Axenschnitt ein gleichseitiges Dreieck ist? — 315) Wie gross ist das Volumen einer Kugel, in welcher ein Schnittkreis, dessen Abstand vom Mittelpunkte gleich $a$ ist, den Umfang $u$ hat? — 316) Eine Kugel mit dem Radius $r$ soll in einen geraden Kegel verwandelt werden, dessen Axenschnitt ein gleichseitiges Dreieck ist. Wie gross wird die Höhe desselben sein? — 317) Welchen Radius hat die Grundfläche eines geraden Cylinders, der mit einer Kugel von gegebener Ober-

fläche ($f^2$) gleiches Volumen hat, und dessen Mantel der Oberfläche der Kugel gleich ist? — 318) Die Grundfläche eines geraden Cylinders ist gleich einem grössten Kreise einer Kugel, die Gesamtoberfläche des Cylinders verhält sich zur Kugelfläche wie $m:n$, wie verhalten sich die Volumina beider Körper? Für welchen Wert von $m:n$ sind dieselben einander gleich? — 319) Ein gerader Kegel, dessen Höhe sich zum Radius der Grundfläche wie $m:n$ verhält, hat mit einer Kugel, deren Radius $\varrho$ ist, gleiches Volumen. Wie gross ist im Kegel $r$ und $h$? Wie gross muss $m:n$ sein, damit $r=\varrho$ sei? — 320) Durch eine Kugel mit dem Radius $r$ ist im Abstand $a$ vom Mittelpunkt eine Ebene gelegt, und in jede der beiden Kugelkappen die grösste Kugel konstruiert, welche die erste Kugel und die Schnittebene berührt. Wie verhält sich die Summe der Volumina der inneren Kugeln zum Volumen der gegebenen? — 321) Durch eine Kugel ist ein ebener Schnitt gelegt, welcher den zu ihm senkrechten Radius im Verhältnis $m:n$ teilt. Ueber der Schnittfläche sind zwei gerade Kegel konstruiert, deren Spitzen auf der Oberfläche der Kugel liegen. Wie verhält sich das Volumen des entstandenen Doppelkegels zum Volumen der Kugel? — 322) Um eine Kugel mit dem Radius $r$ soll ein Kegelstumpf beschrieben werden, dessen Volumen das $m$-fache von dem der Kugel ist. Wie gross sind die Radien seiner Grundflächen zu nehmen? (Specieller Fall $m=n$.) — 323) Dieselbe Aufgabe, wenn statt des Volumens der Mantel des Kegelstumpfes das $m$-fache von der Oberfläche der Kugel sein soll. (Specieller Fall $m=1$.) — 324) Wie gross ist der Mantel eines geraden Kegels, von welchem $\beta$ gegeben ist, und dessen Volumen gleich dem einer Kugel mit dem Radius $\varrho$ ist. — 325) In eine Kugel, deren Volumen $\mathfrak{V}$ ist, ist ein regelmässiges Tetraeder beschrieben, in dieses eine zweite Kugel, in diese ein zweites Tetraeder, u. s. f. ins Unendliche. Wie gross ist die Summe der Volumina aller Kugeln und die aller Tetraeder? — 326) Dieselbe Aufgabe, wenn statt der Tetraeder Würfel konstruiert werden. — 327) Dieselbe Aufgabe, wenn regelmässige Oktaeder konstruiert werden. — 328) Wie gross ist der Winkel $\alpha$ an der Spitze einer Kegelfläche, wenn die Volumina zweier Kugeln, welche der Kegelfläche so einbeschrieben sind, dass sie einander von aussen berühren, sich wie $m^3:n^3$ verhalten? — 329) Um eine Kugel ist ein gerader Kegel beschrieben, dessen Axenschnitt ein gleichseitiges Dreieck ist. Wie verhalten sich die krummen Ober-

flächen und die Volumina beider Körper zu einander? — 330) In eine Kugel mit dem Radius $r$ ist ein gerader Kegel beschrieben, dessen Grundfläche der $n^{te}$ Teil eines grössten Kugelkreises ist. Wie verhalten sich die Volumina beider Körper zu einander? — 331) In eine Kugel ist ein gerader Kegel so einbeschrieben, dass seine Höhe durch den Kugelmittelpunkt nach dem goldenen Schnitt geteilt wird. Wie verhalten sich die Volumina beider Körper zu einander? — 332) Die Dicke einer Hohlkugel ist $a$, der Radius der äusseren Kugelfläche $r$; wie gross ist der Radius einer Kugel, welche mit der Hohlkugel gleiches Volumen hat? — 333) In eine Kugel mit dem Radius $r\,(=\sqrt{5})$ ist ein gerader Cylinder beschrieben, dessen Gesamtoberfläche halb so gross als die Oberfläche der Kugel ist. Wie gross ist Radius und Höhe des Cylinders?

Wie gross ist das Volumen eines Kugelkegels, wenn gegeben ist **334)** Höhe und Radius des zugehörigen Kegels, 335) Kugelradius und Winkel an der Spitze des Kegels?

Wie gross ist das Volumen einer Kugelkappe, wenn gegeben ist **336)** der Inhalt ihrer krummen Fläche und der Abstand ihres Grundkreises vom Kugelmittelpunkt, 337) ihre Höhe und die Oberfläche der ganzen Kugel, 338) der Kugelradius, und die Bedingung, dass die krumme Fläche der Kappe viermal so gross sein soll als die ebene. Wie gross ist ferner die Höhe der Kugelkappe?

**339)** Wenn das Volumen und die Höhe einer Kugelkappe gegeben ist, wie gross ist dann der Kugelradius? — 340) Um ein regelmässiges Tetraeder ist eine Kugel beschrieben. In welchem Verhältnis wird dieselbe durch eine erweiterte Tetraederfläche geteilt? — 341) Dieselbe Aufgabe, wenn statt des Tetraeders ein Würfel gesetzt wird. — 342) Dieselbe Aufgabe für das regelmässige Oktaeder. — 343) In eine Kugel mit dem Radius $r\,(=\sqrt{2})$ ist ein Cylinder konstruiert, dessen Axenschnitt ein Quadrat ist. Wie gross sind die vier Stücke, in welche die Kugel durch die Oberfläche des Cylinders geteilt wird? — 344) Zwei gleiche Kugelflächen schneiden einander so, dass der Mittelpunkt der einen auf der andern liegt. Wie gross ist der beiden Kugeln gemeinsame Körper?

**345)** Wie gross ist das Volumen einer Kugelzone, wenn ihre Höhe, der Kugelradius, und der Abstand ihres grösseren Grundkreises vom Kugelmittelpunkt gegeben ist? — 346) Von einer Kugelzone sind die Radien ihrer Grundkreise und ihre

Höhe gegeben. Wie gross ist ihre krumme Oberfläche und ihr Volumen? — 347) Von einer Kugelzone ist der Radius ihres grösseren Grundkreises, ihre Höhe und der Kugelradius gegeben; wie gross ist ihre krumme Oberfläche und ihr Volumen? — Wenn die Erde als Kugel mit dem Radius 858 Meilen betrachtet wird, wie gross ist dann 348) die Oberfläche der vom 60. Parallelkreise begrenzten kleineren Kugelkappe, 349) die Oberfläche der zwischen dem 50. und 60. Parallelkreise liegenden Zone? 350) Wie hoch ist ein Berg, den man im flachen Lande 17 Meilen weit sieht? 351) Wie weit ist ein Leuchtturm von 120 Fuss Höhe auf See sichtbar? (1 Meile = 24000 Fuss. 352) Wie weit sind zwei Orte auf demselben Meridian von einander entfernt, wenn die Sonne an dem einen $84^0$ hoch, an dem andern im Zenith steht?

**353)** Wie gross ist der Mantel eines Kegels, von welchem $\beta$ bekannt ist, wenn sein Volumen gleich dem einer Kugel mit dem Radius $\varrho$ ist? — 354) Um einen Würfel mit der Oberfläche $f^2$ ist eine Kugel beschrieben. Wie gross ist ihr Volumen und ihre Oberfläche? — 355) In eine Kugel mit dem Volumen $\mathfrak{V}$ ist ein gerader Cylinder mit der Mantelfläche $f^2$ beschrieben. Wie gross ist sein Volumen? — 356) In eine Kugel mit der Oberfläche $f^2$ ist ein gerader Kegel beschrieben, von welchem $\alpha$ gegeben ist. Wie gross ist sein Mantel und sein Volumen? — 357) In einen geraden Kegel, von welchem $\mathfrak{V}$ und $h$ gegeben sind, ist eine Kugel beschrieben. Wie gross ist ihr Volumen und ihre Oberfläche?

**358)** Wieviel Meilen misst ein Grad des Breitenkreises unter 53½ Grad Breite, wenn ein Grad des Aequators 15 Meilen lang ist, und die Erde als Kugel betrachtet wird. — 359) Unter welcher Breite misst ein Grad des Breitenkreises 7½ Meilen? — 360) Wie gross ist das Volumen einer Kugel, wenn von einem auf ihr liegenden Kugeldreieck die Fläche und die Winkel gegeben sind? — 361) Wie gross ist die Fläche eines Kugeldreiecks, von welchem der Kugelradius und die Winkel gegeben sind?

## 5. Rotationskörper.

*Aufgaben.* — Wie gross ist Oberfläche und Volumen des Körpers, welcher entsteht, wenn rotiert **362)** ein gleichseitiges Dreieck mit der Seite $a$ um eine seiner Seiten, 363) ein gleichseitiges Dreieck mit der Seite $a$ um eine in der Entfernung $d$ zu einer seiner Seiten parallel gezogene Gerade,

364) ein beliebiges Dreieck um eine ausserhalb desselben liegende Axe, wobei zwei Seiten des Dreiecks und die Abstände seiner Ecken von der Axe gegeben sind? — Wie gross ist das Volumen des Körpers, welcher entsteht, wenn rotiert 365) ein regelmässiges Sechseck mit der Seite $a$ um einen grossen Durchmesser, 366) dieselbe Figur um einen kleinen Durchmesser, 367) ein Sektor mit dem Radius $r$ und dem Centriwinkel $\alpha$ um einen zur Sehne seines Bogens parallelen Durchmesser, 368) in voriger Aufgabe das Segment statt des zugehörigen Sektors, 369) ein Segment mit dem Radius $r$ und der Sehne $a$ um einen ausserhalb des Segments liegenden Durchmesser, welcher mit der Sehne den Winkel $\varphi$ bildet (specieller Fall $\varphi = 0$), 370) ein Dreieck mit den Stücken $a, \beta, \gamma$ um die Seite $a$, 371) ein Trapez, dessen parallele Seiten und Winkel gegeben sind, um eine der parallelen Seiten, 372) ein Parallelogramm von gegebener Fläche um eine ausserhalb desselben liegende Axe, deren Entfernung von seinem Mittelpunkte $d$ ist, 373) ein Dreieck mit den Stücken $a, b, \gamma$ um eine Axe, die in $B$ auf $a$ senkrecht steht.

## 6. Vermischte Aufgaben.

374) Wie gross ist das Volumen eines Cylinders, der einem dreiseitigen Prisma umbeschrieben ist, wenn von dem letzteren das Volumen nebst zwei Winkeln der Grundfläche gegeben ist? — 375) Ein gerader Cylinder soll durch Wegnahme einer überall gleich dicken Schicht unter Beibehaltung seiner Höhe auf die Hälfte seines Volumens reduziert werden. Wie dick muss die Schicht sein? — 376) Wie gross ist das Volumen und die Oberfläche einer geraden quadratischen Pyramide, deren Kanten alle gleich $a$ sind, und die in eine Kugel mit dem Radius $r$ beschrieben ist? — 377) Von der Grundfläche eines geraden dreiseitigen Prismas sind die Stücke $a, \beta, \gamma$ gegeben, während seine Höhe gleich dem Radius des Umkreises der Grundfläche ist. Wie gross ist der Mantel des dem Prisma einbeschriebenen Cylinders? — 378) Um eine Kugel mit d m Radius $\varrho$ ist ein gerader Kegel beschrieben, dessen Volur n sich zu dem der Kugel wie $p:q$ verhält. Wie gross ist s n Radius und seine Höhe? — 379) In ein Tetraeder, von w l- chem alle Kanten gegeben sind, ist eine Kugel beschrieb n. Wie gross ist der Radius derselben? — 380) Wie gross it das Volumen eines Kubooktaeders, von welchem die Kant a

gegeben ist? (S. A. 62.) — 381) Wie gross ist das Volumen eines regelmässigen Oktaeders, welches einer Kugel mit dem Radius $\varrho$ umbeschrieben ist? — 382) In einen Würfel ist ein regelmässiges Tetraeder so konstruiert, dass ein Eckpunkt des letzteren auf einen Eckpunkt des ersteren fällt, und die drei anderen Tetraederecken auf den von der gegenüberliegenden Würfelecke ausgehenden Diagonalen der Seiten liegen. Wie verhalten sich die Volumina beider Körper zu einander?

Die folgenden Aufgaben führen auf Gleichungen dritten Grades:

**383)** Ein gerader Kegel, von dem $r$ und $h$ gegeben ist, soll in einen anderen verwandelt werden, welcher doppelte Mantelfläche hat. Wie gross ist Radius und Höhe des neuen Kegels? — 384) Wie gross ist die Höhe einer Kugelkappe, wenn ihr Volumen und der Kugelradius gegeben ist? — 385) In eine Kugel mit dem Radius $\varrho$ soll ein Kegel von gegebenem Volumen beschrieben werden. Wie gross sind Radius und Höhe desselben? — 386) In einen Kegel soll ein Cylinder von gegebenem Volumen beschrieben werden. Wie gross sind Radius und Höhe desselben? — 387) Von einem geraden Kegel ist Mantel und Volumen gegeben, wie gross ist sein Radius und seine Höhe? — 388) Eine Kugel von gegebener Oberfläche soll durch zwei parallele Ebenen in drei gleiche Teile von gleichem Volumen geteilt werden. In welcher Entfernung vom Mittelpunkte müssen diese Ebenen liegen? — 389) Eine Kugel von gegebenem Radius soll durch parallele Ebenen in vier Teile von gleichem Volumen geteilt werden. Welche Höhe haben die beiden entstehenden Kugelkappen? — 390) Ueber der oberen Grundfläche eines geraden Cylinders von gegebener Höhe ist eine Halbkugel konstruiert. Welches Volumen hat dieselbe, wenn das Volumen des Gesamtkörpers gegeben ist?

# Sphärische Trigonometrie.

## Tafel rechtwinkliger und schiefwinkliger Kugeldreiecke.

| Nr. | $\mathfrak{a}$ | $\mathfrak{b}$ | $\mathfrak{c}$ | $\alpha$ | $\beta$ | $\gamma$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2. 41. 10 | 14. 17. 12 | 14. 31. 55 | 10. 45. 52 | 79. 34. 20 | 90. 0. 0 |
| 2 | 4. 2. 50 | 44. 17. 5 | 44. 25. 52 | 5. 47. 11 | 85. 51. 40 | 90, 0. 0 |
| 3 | 5. 42. 30 | 55. 18. 41 | 55. 30. 28 | 6. 55. 53 | 86. 3. 42 | 90. 0. 0 |
| 4 | 69. 12. 10 | 44. 24. 26 | 75. 18. 23 | 75. 6. 59 | 46. 20. 12 | 90. 0. 0 |
| 5 | 83. 6. 15 | 20. 23. 11 | 83. 32. 17 | 87. 35. 15 | 20. 31. 21 | 90. 0. 0 |
| 6 | 65. 1, 30 | 30. 48. 9 | 68. 44. 10 | 76. 35. 5 | 33. 19. 55 | 90. 0. 0 |
| 7 | 32. 38. 10 | 49. 5. 20 | 56. 31. 51 | 40. 16. 43 | 64. 57. 5 | 90. 0. 0 |
| 8 | 25. 13. 12 | 37. 14. 9 | 58. 31. 51 | 18. 37. 50 | 26. 58. 46 | 140. 14. 50 |
| 9 | 97. 12. 25 | 54. 18. 16 | 124. 12. 31 | 72. 26. 40 | 51. 18. 13 | 127. 22. 3 |
| 10 | 88. 12. 19 | 27. 16. 8 | 93. 44. 45 | 78. 43. 30 | 26. 42. 52 | 101. 44. 20 |
| 11 | 26. 11. 15 | 42. 18. 17 | 53. 19. 34 | 32. 25. 57 | 54. 52. 50 | 102. 55. 3 |
| 12 | 82. 33. 51 | 27. 16. 9 | 89. 12. 24 | 75. 11. 22 | 26. 31. 57 | 102. 52. 9 |
| 13 | 31. 31. 30 | 64. 19. 21 | 82. 11. 17 | 27. 17. 17 | 52. 12. 27 | 119. 41. 37 |
| 14 | 20. 19. 18 | 21. 17. 51 | 19. 12. 11 | 61. 0. 52 | 66. 11. 0 | 55. 56. 29 |
| 15 | 55. 36. 19 | 77. 12. 17 | 63. 9. 41 | 57. 42. 14 | 92. 36. 47 | 66. 4. 17 |
| 16 | 42. 19. 31 | 65. 12. 10 | 83. 44. 19 | 39. 46. 11 | 59. 35. 34 | 109. 11. 59 |
| 17 | 89. 59. 59 | 88. 58. 58 | 87. 57. 57 | 90. 2. 9 | 88. 58. 56 | 87. 57. 56 |

*Formeln.* — a) *Rechtwinkliges Kugeldreieck.* — **391.** $tg^2 \alpha/_2 = \sin(\mathfrak{c}-\mathfrak{b}) : \sin(\mathfrak{c}+\mathfrak{b})$. — 392. $tg^2 \mathfrak{a}/_2 = tg\, ½(\mathfrak{c}+\mathfrak{b}) . tg\, ½(\mathfrak{c}-\mathfrak{b})$. — 393. $tg^2 \mathfrak{c}/_2 = -\cos(\alpha+\beta) : \cos(\alpha-\beta)$. — 394. $\sin^2 \mathfrak{a} . \cos^2 \mathfrak{b} = \sin(\mathfrak{c}-\mathfrak{b}) . \sin(\mathfrak{c}+\mathfrak{b})$. — 395. $\cos^2 \alpha . \sin^2 \mathfrak{c} = \sin(\mathfrak{c}-\mathfrak{a}) . \sin(\mathfrak{c}+\mathfrak{a})$. — 396. $\cos^2 \mathfrak{c} . \sin^2 \alpha = \sin(\alpha-\mathfrak{a}) . \sin(\alpha+\mathfrak{a})$. — 397. $\sin^2 \alpha . \cos^2 \mathfrak{b} . \sin^2 \mathfrak{c} = \sin(\mathfrak{c}-\mathfrak{b}) . \sin(\mathfrak{c}+\mathfrak{b})$. — 398. $\cos^2 \mathfrak{a} . \cos^2 \beta = \sin(\alpha-\mathfrak{a}) . \sin(\alpha+\mathfrak{a})$. — 399. $\sin^2 \mathfrak{a} + \sin^2 \mathfrak{b} - \sin^2 \mathfrak{c} = \sin^2 \mathfrak{a} . \sin^2 \mathfrak{b}$. — 400. $\cos^2 \alpha + \cos^2 \mathfrak{c} - \cos^2 \mathfrak{a} = \cos^2 \alpha . \cos^2 \mathfrak{c}$. — 401. $\sin^2 \alpha = \cos^2 \beta + \sin^2 \mathfrak{a} . \sin^2 \beta$. — 402. $tg\, \mathfrak{a} . \cos \mathfrak{c} = \sin \mathfrak{b} . \cot \beta$. — 403. $2 . \cos^2 \alpha/_2 . \cos \mathfrak{b} . \sin \mathfrak{c} = \sin(\mathfrak{b}+\mathfrak{c})$. — 404. $2 . \sin^2 \alpha/_2 . \cos \mathfrak{b} . \sin \mathfrak{c} = \sin(\mathfrak{c}-\mathfrak{b})$. — 405. $\cot \alpha . \cot \beta = \cos \mathfrak{a} . \cos \mathfrak{b}$. — 406. $\sin(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}) . tg\, ½(\alpha+\beta) = \sin(\mathfrak{a}-\mathfrak{b}) . \cot ½(\alpha-\beta)$.

b) *Schiefwinkliges Kugeldreieck.* — **407.** $\sin^2 \alpha = (4 \sin \mathfrak{p} . \sin \mathfrak{p}_1 . \sin \mathfrak{p}_2 . \sin \mathfrak{p}_3) : (\sin^2 \mathfrak{b} . \sin^2 \mathfrak{c})$. — 408. $\sin^2 \mathfrak{a} = -(4 \cos \pi . \cos \pi_1 . \cos \pi_2 . \cos \pi_3) : (\sin^2 \beta . \sin^2 \gamma)$. — 409. $\cos \mathfrak{a} = \cos \mathfrak{b} . \cos \mathfrak{c} + \sin \mathfrak{a} . \sin \mathfrak{b} . \sin \gamma . \cot \alpha$. — 410. $\cos \mathfrak{a} . \sin \mathfrak{c} = \sin \mathfrak{b} . \cos \mathfrak{c} . \cos \beta + \sin \mathfrak{b} . \cos \alpha$. — 411. $2 . \cos ½(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}) . \cos ½(\mathfrak{a}-\mathfrak{b}) . tg\, ½ \mathfrak{c} = \sin \mathfrak{b} . \cos \alpha + \sin \mathfrak{a} . \cos \beta$. — 412. $tg\, ½(\alpha-\mathfrak{a}) . tg\, ½(\beta+\mathfrak{b}) = tg\, ½(\beta-\mathfrak{b}) . tg\, ½(\alpha+\mathfrak{a})$. — 413. $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \mathfrak{b} . \sin \alpha . \cot \beta \pm \sqrt{\sin^2 \beta - \sin^2 \mathfrak{b} . \sin^2 \alpha}$. — 414. $(\cos 2\alpha - \cos$ [illegible]

— ($\cos 2\mathfrak{a} - \cos 2\mathfrak{b}) = \cos 2\alpha \,.\, \cos 2\mathfrak{b} - \cos 2\mathfrak{a} \,.\, \cos 2\beta$. — 415. $tg\, {}^{\alpha}/_2 \,.\, tg\, {}^{\beta}/_2 = \sin \mathfrak{p}_3 : \sin \mathfrak{p}$. — 416. $tg\, {}^{\alpha}/_2 \,.\, \cot {}^{\beta}/_2 = \sin \mathfrak{p}_2 : \sin \mathfrak{p}_1$. — 417. $\sin \mathfrak{p} \,.\, \sin \mathfrak{p}_1 + \sin \mathfrak{p}_2 \,.\, \sin \mathfrak{p}_3 = \sin \mathfrak{b} \,.\, \sin \mathfrak{c}$. — 418. $\sin^2 \mathfrak{a} \,.\, \sin \beta \,.\, \sin \gamma = 4 \,.\, \sin^2 {}^{\alpha}/_2 \,.\, \sin \mathfrak{p} \,.\, \sin \mathfrak{p}_1$. — 419. $tg\, {}^1/_2 (\beta + \gamma) + tg\, {}^1/_2 (\beta - \gamma) = 2 \cot {}^{\alpha}/_2 \,.\, \sin \mathfrak{b} : \sin (\mathfrak{b} + \mathfrak{c})$. — 420. $tg\, {}^1/_2 (\beta + \gamma) - tg\, {}^1/_2 (\beta - \gamma) = 2 \cot {}^{\alpha}/_2 \,.\, \sin \mathfrak{c} : \sin (\mathfrak{b} + \mathfrak{c})$.

*Aufgaben.* — ***Berechnung von Dreiecken.*** — Gegeben: **421)** $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\alpha + \beta$. — 422) $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$, $\alpha + \beta$, $\gamma$. — 423) $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\gamma$. — 424) $\alpha$, $\beta$, $\varrho$. — 425) $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\varrho$. — 426) $\alpha$, $\beta$, $\mathfrak{p}$. — 427) $\alpha + \beta$, $\gamma$, $\mathfrak{p}$.

**428)** Von zwei Punkten der Erdoberfläche kennt man Länge und Breite. Wie gross ist der zwischen ihnen liegende kleinere Bogen des durch sie bestimmten grössten Kugelkreises? — 429) Von drei Punkten der Erdoberfläche, die nicht auf demselben Diametralkreise liegen, kennt man Länge und Breite. Wie gross ist die Fläche des zwischen ihnen liegenden Kugeldreiecks?

**430)** Wie gross ist das Volumen einer Säule, von welcher drei Kanten und die Winkel, welche sie mit einander bilden, gegeben sind? — 431) Wie gross sind die Raumwinkel eines Tetraeders, von welchem drei von einer Ecke ausgehende Kanten und die Winkel, welche sie mit einander bilden, gegeben sind? — 432) Wie gross sind die Seiten und Winkel einer Ecke eines Tetraeders, von welchem die sechs Kanten gegeben sind? — 433) Von einem schiefen Kegel ist $a$, $\varphi$, $r$ und der Winkel gegeben, welchen der Neigungsschenkel einer Seitenlinie mit dem nach dem Fusspunkte dieser Seitenlinie gehenden Radius des Grundkreises bildet. Wie lang ist diese Seitenlinie? — 434) Von einem Kugeldreieck, dessen Fläche ${}^1/_{16}$ von der Oberfläche der Kugel beträgt, sind zwei Winkel nebst dem Kugelradius gegeben. Wie gross sind die Seiten des Dreiecks?

---

# Register.


| | Nr. |
|---|---|
| Asymptotenkegel | 137 |
| Augenpunkt | 2 |
| Axe | 10 |
| „ der Kegelfläche | 14 |
| „ des Kegels | 47 |
| „ der Cylinderfläche | 15 |
| „ des Cylinders | 59 |
| „ der Fläche 2. Ordnung | 135 |
| „ der Säule | 55 |
| Axenschnitt der Kegelfläche | 14 |
| „ des Kegels | 47 |
| „ d. Cylinderfläche | 15 |
| „ des Cylinders | 61 |
| | |
| Berührungskugel des Polyeders | 83 |
| „ linie des Kegels | 48 |
| „ „ „ Cylinders | 61 |
| „ punkt der Kugel | 78 |
| Bestimmungspyramide | 87 |
| | |
| Centrallinie | 88 |
| Centriwinkel der Kugelfläche | 22 |
| Cosinussatz | 126 |
| Cylinder (κύλινδρος) | 59 |
| „ gemeiner | 59 |
| „ gerader | 59 |
| „ schiefer | 59 |
| „ fläche | 15 |
| „ „ elliptische | 139 |
| „ „ hyperbolische | 140 |
| „ „ parabolische | 141 |
| | |
| Diagonalaxe der Säule | 55 |
| „ schnitt d. dreis. Prismas | 51 |
| „ „ der Säule | 55 |
| Diametralkreis | 22 |
| Dodekaeder (δώδεκα, ἕδρα), homogenes | 85 |
| „ regelmässiges | 87 |
| Drehung der Ebene | 10 |
| Drehungsaxe | 10 |
| Durchmesser der Kugelfläche | 22 |
| | |
| Ebene, antiparallele | 5 |
| „ parallele | 5 |
| „ schneidende | 10 |
| „ senkrechte | 18 |
| Ecke | 28 |
| „ flache | 29 |
| „ geschlossene | 29 |
| „ gestreckte | 29 |
| „ gleichschenklige | 36 |
| „ gleichseitige | 36 |
| „ konkave | 29 |
| „ konvexe | 29 |
| „ rechte | 29 |
| „ vielseitige | 38 |
| „ des Tetraeders | 40 |
| Eckpunkt des Tetraeders | 40 |
| Ellipsoid | 136 |
| Entfernung | 20 |
| Excess, sphärischer (excessus, sphaera) | 113 |
| | |
| Fläche, zweifach zusammenhängende | 120 |
| „ cylindrische | 135 |
| „ elliptische | 135 |
| „ windschiefe | 135 |
| | |
| Gegenecke der Säule | 2 |
| „ fläche „ „ | 2 |
| „ kante d. dreiseit. Prismas | 0 |
| „ „ der Säule | 2 |
| „ punkte d. dreiseit. Prismas | 0 |
| „ „ der Kugelfläche | 2 |
| „ „ der Säule | 2 |
| „ winkel „ „ | 2 |

| | Nr. |
|---|---|
| Gerade, parallele (zur Ebene) . | 8 |
| „ senkrechte „ . | 18 |
| „ unendlich ferne . . | 26 |
| „ windschiefe . . . | 9 |
| Grundfläche des Cylinders . | 59 |
| „ „ Kegels . . | 47 |
| „ „ Prismas . . | 50. 56 |
| „ der Pyramide . | 45 |
| „ d. Pyramidenstumpfs | 46 |
| „ der Säule . . | 52 |
| Grundkante des Prismas . . | 50. 56 |
| „ der Pyramide . | 45 |
| „ „ Säule . . | 52 |
| Grundkreis des Cylinders . . | 59 |
| „ „ Kegels . . | 47 |
| Halbkugel . . . . . . | 22 |
| Hauptschnitt des Cylinders . | 61 |
| „ d. Fläche 2. Ordn. | 135 |
| „ des Kegels . . | 47 |
| Hauptstück des Tetraeders . | 43 |
| Hexaeder (ἕξ, ἕδρα) . . . | 52 |
| „ homogenes . . . | 85 |
| „ regelmässiges . . | 87 |
| Höhe des Cylinders . . . | 59 |
| „ „ Kegels . . . | 47 |
| „ „ Prismas . . . | 56 |
| „ der Pyramide . . . | 45 |
| Höhenebene der Ecke . . | 81 |
| Hyperboloid . . . . . | 137 |
| Hypotenusenseite . . . . | 41 |
| Ikosaeder (εἴκοσι, ἕδρα), homogenes | 85 |
| „ regelmässiges . . | 87 |
| Kante der Ecke . . . . | 28 |
| „ des Tetraeders . . | 40 |
| Kathetenseite . . . . . | 41 |
| Kegel . . . . . . . | 47 |
| „ gemeiner . . . . | 47 |
| „ gerader . . . . | 47 |
| „ schiefer . . . . | 47 |
| Kegelfläche . . . . . | 14 |
| „ elliptische . . . | 137 |
| Kegelschnitt . . . . . | 137 |
| „ stumpf . . . . . | 48 |
| Kugel . . . . . . | 75. 136 |
| „ ausschnitt . . . . | 75 |
| „ dreieck . . . . . | 38 |
| „ „ rechtwinkliges . | 128 |
| „ „ schiefwinkliges . | 125 |
| „ fläche . . . . . | 22 |
| Kugelkappe . . . . . | 77 |
| „ kegel . . . . . | 75 |
| „ zone . . . . . | 111 |
| „ zweieck . . . . . | 22 |
| „ einbeschriebene . . | 83 |
| „ umbeschriebene . . | 83 |
| Lage des Raumwinkels . . | 12 |
| Leitlinien der Cylinderfläche . | 15 |
| „ der Kegelfläche . | 14 |
| Mantel des Cylinders . . | 59 |
| „ des Kegels . . . | 47 |
| Mittelpunkt der Kugelfläche . | 22 |
| „ des regelm. Polyeders | 87 |
| „ der Säule . . | 55 |
| Nebenecke . . . . . | 30 |
| Nebenscheitelecke . . . | 30 |
| Nebenstück des Tetraeders . | 43 |
| Neigungswinkel zweier Ebenen | 17 |
| „ zw. Gr. u. Eb. | 19 |
| Neigungsschenkel . . . | 19 |
| Netz des Körpers . . . | 2 |
| Normalschnitt des Cylinders . | 61 |
| „ des Kegels . | 48 |
| Nullecke . . . . . . | 29 |
| Oktaeder (ὀκτώ, ἕδρα), homogenes | 85 |
| „ regelmässiges . . | 87 |
| Paraboloid, elliptisches . . | 138 |
| „ hyperbolisches . | 142 |
| Parallelepipedon (ἐπίπεδον) . | 52 |
| Parallelprojection . . . | 2 |
| Pentaeder (πέντε, ἕδρα) . . | 49 |
| Polardreieck . . . . | 38 |
| „ ecke . . . . . | 34 |
| Polyeder (πολύς, ἕδρα) . . | 42 |
| „ Eulersches . . | 42 |
| „ homogenes . . | 85 |
| „ konkaves . . . | 42 |
| „ regelmässiges . . | 87 |
| Prisma (πρίσμα) . . . . | 56 |
| „ dreiseitiges . . . | 49 |
| „ gerades . . . . | 56 |
| „ n-seitiges . . . | 56 |
| „ regelmässiges . . | 56 |
| „ schiefes . . . . | 56 |
| „ unregelmässiges . . | 56 |
| Product von drei Strecken . | 92 |
| Projection . . . . . | 2. 41 |

| | Nr. |
|---|---|
| Projectionsebene . . . | 2 |
| Pyramide (πυραμίς) . . | 45 |
| „ gerade . . . | 45 |
| „ n-seitige . . | 45 |
| „ regelmässige . . | 45 |
| „ schiefe . . . | 45 |
| „ unregelmässige . . | 45 |
| Pyramidenstumpf . . . | 46 |
| Radius des regelm. Polyeders . | 87 |
| „ der Kugelfläche . . | 22 |
| Raumstück prismatisches . . | 27 |
| „ winkel . . . . | 12 |
| Rhomboeder (ῥόμβος, ἕδρα) . | 54 |
| Rotationsellipsoid . . . | 136 |
| „ fläche . . . . | 135 |
| „ hyperboloid . . . | 137 |
| „ körper . . . . | 74 |
| Säule . . . . . . . | 52 |
| „ rechteckige . . . | 54 |
| „ rhombische . . . | 54 |
| „ quadratische . . . | 54 |
| Scheitel der Ecke . . . | 28 |
| Scheitelecke . . . . | 30 |
| „ linie des Raumwinkels . | 12 |
| Schenkelebene der Ecke . . | 28 |
| „ des Raumwinkels | 12 |
| Seite der Ebene . . . | 2 |
| „ der Ecke . . . . | 31 |
| „ des Kugeldreiecks . . | 38 |
| „ des Tetraeders . . . | 40 |
| Seitenfläche des Prismas . . | 50. 56 |
| „ der Pyramide . | 45 |
| „ der Säule . . | 52 |
| Seitenkante des Prismas . . | 50. 56 |
| Seitenkante der Pyramide . | 45 |
| „ der Säule . . | 52 |
| Seitenlinie des Cylinders . . | 59 |
| „ der Cylinderfläche . | 15 |
| „ des Kegels . . | 47 |
| „ der Kegelfläche . | 14 |
| Sekantenebene des Cylinders . | 61 |
| „ des Kegels . | 48 |
| „ der Kugel . . | 77 |
| Sinussatz . . . . . . | 125 |
| Spitze des Kegels . . . . | 47 |
| „ der Kegelfläche . . | 14 |
| „ der Pyramide . . . | 45 |
| Sternpolyeder . . . . . | 42 |
| „ regelmässiges . | 87 |
| Tangentenebene des Cylinders . | 61 |
| „ des Kegels . | 48 |
| „ der Kugel . | 78 |
| Tetraeder (τέσσαρες, ἕδρα) . | 40 |
| „ gleichschenkliges . | 44 |
| „ gleichseitiges . . | 44 |
| „ homogenes . . | 85 |
| „ rechteckiges . . | 41 |
| „ regelmässiges . . | 44. 87 |
| Verschiebung der Ebene . . | 5 |
| Volumen (volumen) . . . | 90 |
| Winkel der Ecke . . . . | 31 |
| „ a. d. Spitze d. Kegelfl. | 14 |
| „ des Kugeldreiecks . | 38 |
| „ des Tetraeders . . | 40 |
| „ zweier Ebenen . . | 12 |
| Würfel . . . . . . | 54 |
| Zweieck . . . . . . | 22 |

---

**Berichtigungen.**

S. 118. Z. 10 v. u. lies Polyeder statt Polygon.

# Stereoskopische Bilder

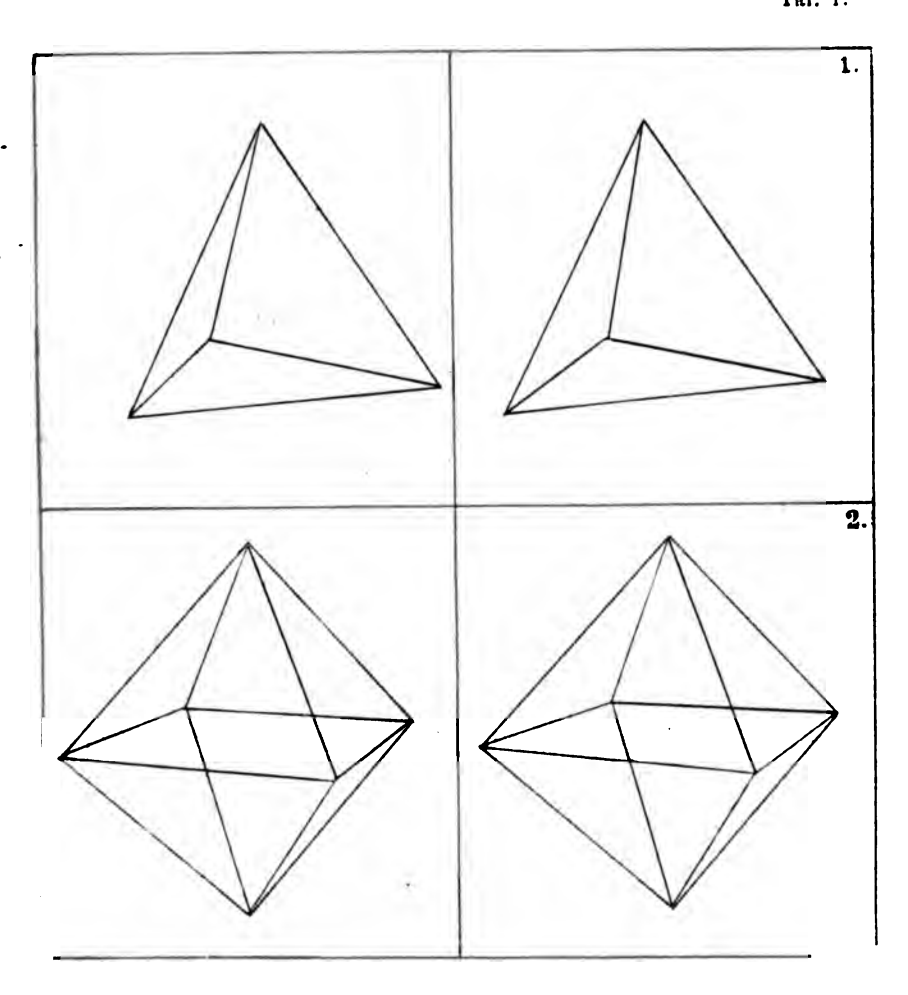
der

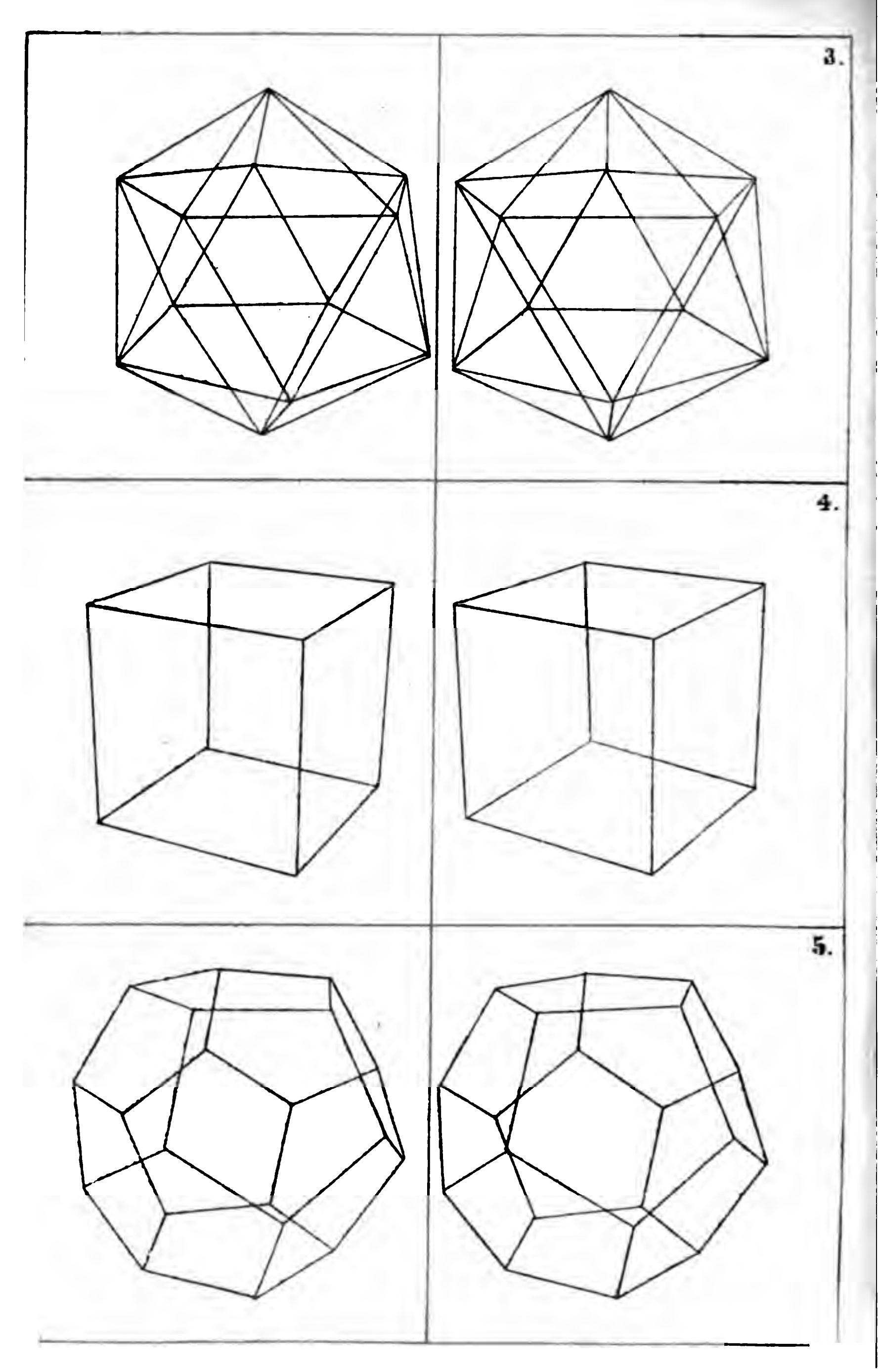
## regelmässigen konkaven Polyeder.

(Nach Dr. Th. Hugel.)

**Bemerkung.** Die Betrachtung dieser Bilder erfordert kein Stereoskop. Es genügt, die beiden Bilder eines Körpers, in 20 cm. Entfernung vom Auge, so zu betrachten, dass die senkrecht dazwischen gehaltene Hand jedem Auge nur eins der beiden Bilder zu sehen gestattet. Es gelingt dann leicht, die beiden Bilder zu einem einzigen zu vereinigen.

Taf. 1.




3.
4.
5.

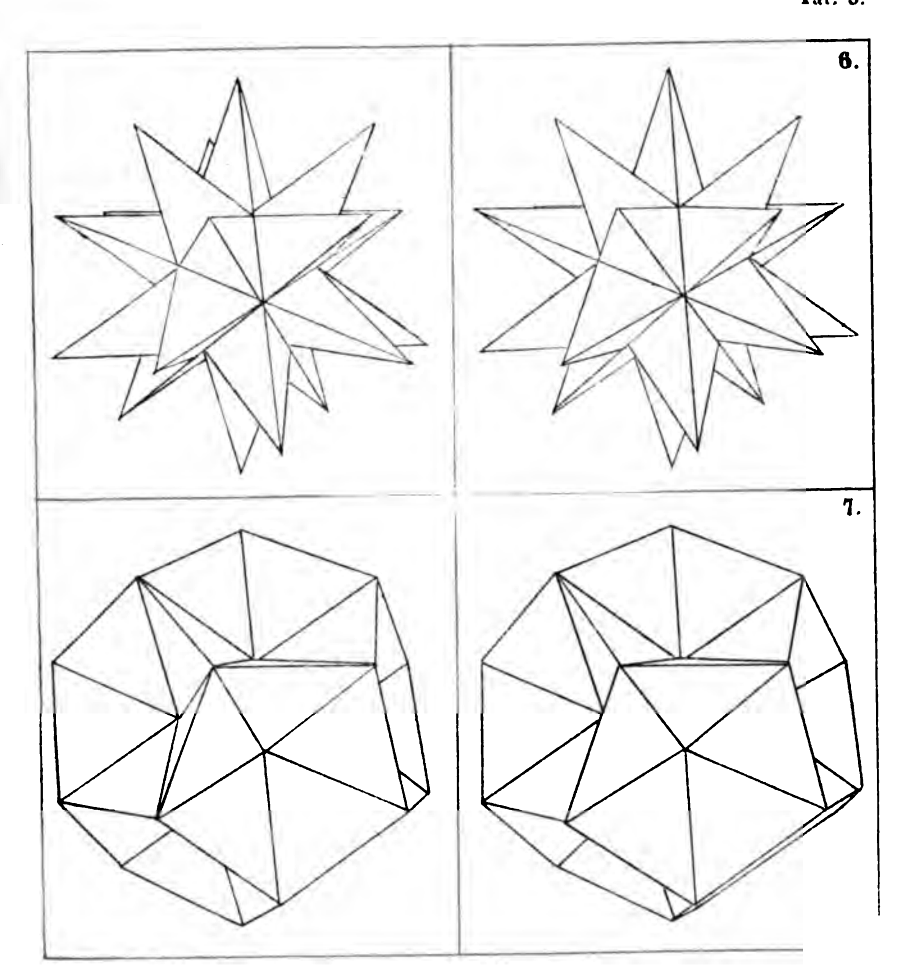
# Stereoskopische Bilder

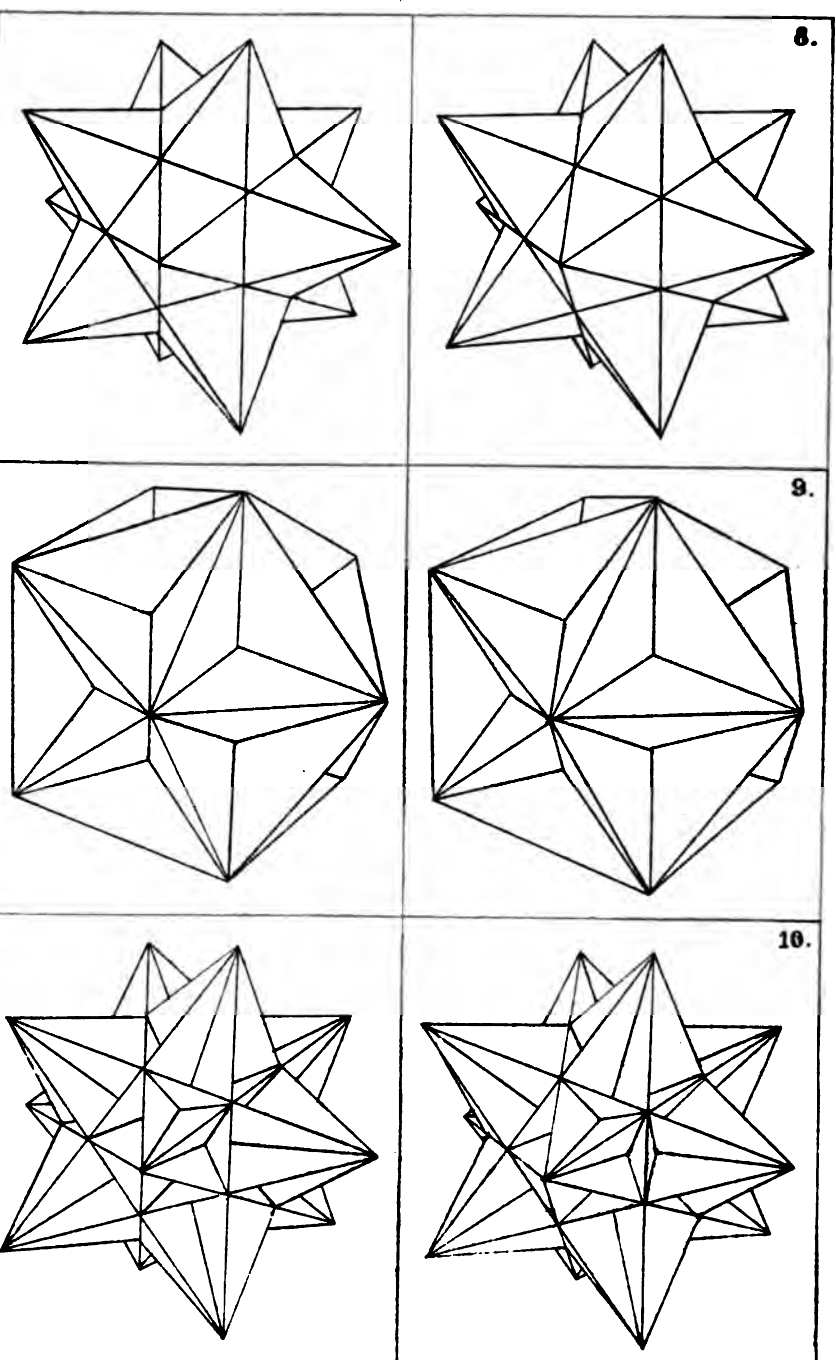
der

## regelmässigen Stern-Polyeder.

(Nach Dr. Ch. Engel.)

Taf. 3.




8.
9.
10.